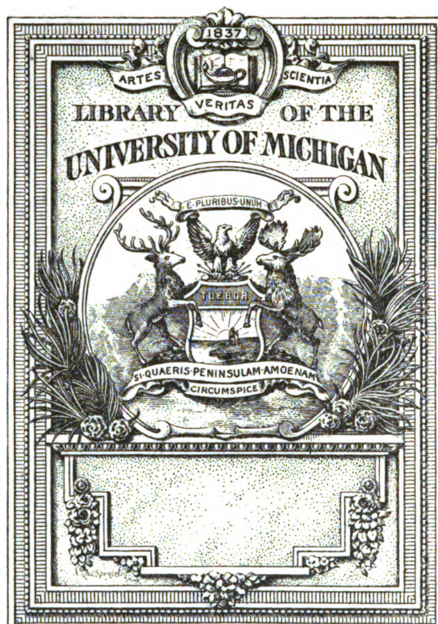

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Astronomische Geographie.

Ein Lehrbuch angewandter Mathematik

von

Prof. H. C. E. Martus,
Direktor des Sophien-Realgymnasiums in Berlin.

Mit 100 Figuren im Texte.

Zweite Auflage
mit vielen Zusätzen.

Leipzig, 1888.
C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.
(J. Sengbusch.)

Vorwort.

Was über die Erde als Weltkörper die schärfsten Denker mathematisch erforschten, interessiert jeden Gebildeten. Dieser natürliche Zug ist für den mathematischen Unterricht zu verwerten.

Wo gäbe es in der gesamten Mathematik vorzüglicheren Bildungsstoff, als auf dem Gebiete der astronomischen Geographie? Die Freude, große Schwierigkeiten überwunden zu haben und verwickelte Naturvorgänge nun klar zu durchschauen, das Bewußtsein, mit den bisher erlangten mathematischen Kenntnissen doch schon etwas leisten zu können, sind mächtige Förderungsmittel für erfolgreiches Fortarbeiten in der Mathematik. Die so gewonnene rege Thätigkeit der Schüler ermöglicht dann, Abschnitte des mathematischen Schulpensums, welche der Lehrer einstweilen zurückstellte, nun schneller und eindringlicher zu bewältigen, und in der gesamten mathematischen Ausbildung erfreuliche Erfolge zu erzielen.

Das in den Büchern über „mathematische Geographie" überall wiederkehrende Mitteilen, man habe dies und jenes so und so groß gefunden, giebt nur ein angelerntes, unhaltbares Wissen. Zu befriedigendem Verständnis kann der Leser erst gelangen, wenn er, nachdem er eingesehen hat, wie die Beobachtungen angestellt sind, die Frage mathematisch behandelt und das Gesuchte selber ausrechnet. Dann hat er durch Einsicht die Gewißheit, daß es so ist. Es muß hier in der angewandten, wie in der reinen Mathematik, von Grund auf Satz an Satz sich fügen; man darf niemals etwas noch nicht Erwiesenes vorweg mit einflechten, weil man es an der betreffenden Stelle braucht.

Vorliegendes Lehrbuch setzt nur voraus Kenntnis der Hauptsätze der ebenen Trigonometrie und von der sphärischen nichts

weiter als die beiden Neperschen Gleichungen für das rechtwinklige Dreieck, den Sinussatz, den Kosinussatz und die Neperschen Analogien, also eine Zugabe zur ebenen Trigonometrie, die in zwei bis drei Lehrstunden zu erreichen ist. [Die Beweise dieser Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie sind in der zweiten Auflage hinter der Inhaltsangabe (Seite XI) eingeschaltet worden.]

An denjenigen Stellen des Buches, wo zahlreiche Beispiele tabellarisch zusammengestellt sind, wird der Lehrer irgend einen Schüler ein beliebiges Beispiel herausgreifen lassen. Ist dann das Rechnungsergebnis in Übereinstimmung mit dem angegebenen gefunden, ist also der Gang der Rechnung verstanden, so wird man den aus allen Ergebnissen gezogenen Schluß anerkennen können. Die Rechnungen wurden ausgeführt mit den siebenstelligen Logarithmentafeln von Vega-Bremiker (Berlin, Weidmannsche Buchhandlung), sowie auch mit den fünfstelligen von F. G. Gauß (Halle a. S., Eugen Strien) und deren Ergebnisse sind in runden Klammern jenen angefügt. (Dabei wurde die sechste Ziffer, welche selbstverständlich unzuverlässig ist, nicht unterdrückt, um die Abweichung vom genaueren Werte nicht ungünstiger erscheinen zu lassen, hauptsächlich aber, um den Vergleich mit der Rechnung beim Gebrauche fünfstelliger Logarithmentafeln von anderer Einrichtung zu ermöglichen.) Daß man schließlich von dem erlangten Ergebnisse jeder Untersuchung sich eine deutliche Vorstellung verschaffe, darauf werde auch an dieser Stelle nachdrücklich hingewiesen.

Die Figuren sind nach den Zeichnungen des Verfassers durch Photographie auf die Holzstöcke übertragen. An Figuren etwa bemerkbare geringe Abweichungen von den Größenangaben im Texte rühren her von der ungleichen Zusammenziehung des beim Drucken feuchten Papiers.

Zur Förderung gründlicher Bildung beizutragen, hat der Verfasser die mühevolle Arbeit angefertigt. Möge Gottes Segen der Saat nirgends fehlen!

Berlin, im November 1879.

Hermann Martus.

Zur zweiten Auflage.

Die zweite Auflage bringt mehrere Verbesserungen und viele Zusätze, von denen hier angegeben werden mögen: Nr. 84, mit Ergebnis V und Anmerkung, Nr. 89 und 91, Nr. 98, Nr. 112, Anm., Nr. 115 und 118, Anm. (Weltzeit), die Anmerkungen zu Nr. 121 und 122, besonders die Veranschaulichung der Krümmung der Erdoberfläche (§ 11) Nr 140 bis 146; ferner Nr. 158; dann Noten zu Nr. 149, 175, 189, 200, 240 und 246, endlich zu Nr. 258. Auch sind viele geschichtliche Bemerkungen hinzugefügt, für welche hauptsächlich als Quelle benutzt wurde die vortreffliche „Geschichte der Astronomie" von Rudolf Wolf (in Bern), München, R. Oldenbourg, 1877; 815 Seiten.

Da der Lehrplan für die preußischen höheren Schulen, vom 31. März 1882, die Lehraufgabe in der sphärischen Trigonometrie auf das beschränkt, was zum Verständnis der astronomischen Geographie erforderlich ist, so wurden diese Hauptsätze mit ihren Beweisen aufgestellt und hinter der Inhaltsangabe eingefügt, zur Vorbereitung auf die Entwicklungen von Nr. 46 an. Das Buch setzt also nur voraus Kenntnis der wichtigsten Sätze der ebenen Trigonometrie und Übung im Rechnen mit Logarithmen.

Weil der trotz der kostspieligen Figuren möglichst niedrig gestellte Preis des Werkes, 7 Mark 50 Pf., doch noch die Einführung als Schulbuch erschwert, so wurde unter der Bezeichnung „Schul-Ausgabe" eine Verkürzung des Werkes 1881 herausgegeben, welche hinreicht, das in der Klasse ausführlich Besprochene ins Gedächtnis zurückzurufen. Die Schul-Ausgabe, welche durch übereinstimmende Numerierung neben der andern in der Klasse gebraucht werden kann, ist also kein selbständiges Werk; sie soll nur häusliche Ausarbeitung verhindern. Das Hauptwerk ist für Schüler bestimmt, nicht allein für Lehrer. Es behandelt nicht mehr, als in einem elementar-mathematisch aufbauenden Lehrbuche der astronomischen

Geographie erwartet werden muß [z. B. § 20 ist für Nr. 191 notwendig]; es enthält aber mehr als in 4 wöchentlichen mathematischen Lehrstunden während eines Halbjahres in der Klasse durchgenommen werden kann. Es ist das Kapitel über das Erdsphäroid für sich zu behandeln in einem andern Halbjahre im Anschluß an das stereometrische Gebiet des Lehrganges. Bei solcher Teilung läßt sich der reiche Stoff bewältigen. Und sollte im ersten Halbjahre etwas übrig geblieben sein, so wird das gewonnene Interesse strebsame Schüler veranlassen, dies für sich durchzuarbeiten, und Freude wird sie reich belohnen!

Berlin, Weihnachten 1887.

H. Martus.

Inhaltsangabe.

Astronomische Geographie.

Erster Abschnitt.

Der Sternhimmel.

Zweiter Abschnitt.

Die Erde.

I. Kapitel. Kugelgestalt der Erde.

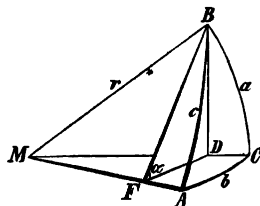
II. Kapitel. Größe der Erde.

Vorbereitung.

Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie.

A. Das rechtwinklige sphärische Dreieck.

Die Neperschen Gleichungen für das rechtwinklige sphärische Dreieck.*)



Figur — 3. Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

Man fälle vom Eckpunkte B des bei C rechtwinkligen sphärischen Dreiecks ABC auf die nach den beiden andern Eckpunkten gehenden Kugelradien die Senkrechten BD und BF und verbinde deren Fußpunkte D und F. Der entstandene Winkel BFD ist zwischen den Ebenen BAM und CAM der Neigungswinkel, welcher ebensoviele Grade, Minuten und Sekunden hat, wie der sphärische Winkel α (BAC) sphärische Winkel-Grade, Minuten und Sekunden enthält. Das rechtwinklige Dreieck BDF giebt die Werte der trigonometrischen Funktionen des Neigungswinkels BFD $= \alpha$. Nach Aufstellen jedes dieser Brüche dividiere man Zähler und Nenner durch die Linie, welche vom Mittelpunkte nach dem Treffpunkte der beiden gebrauchten Seiten geht.

$$1)\quad \sin\alpha = \frac{BD}{BF} = \frac{BD:r}{BF:r} = \frac{\sin BMD}{\sin BMF} = \frac{\sin a}{\sin c}.$$

$$2)\quad \cos\alpha = \frac{DF}{BF} = \frac{DF:MF}{BF:MF} = \frac{tg\, DMF}{tg\, BMF} = \frac{tg\, b}{tg\, c}.$$

$$3)\quad tg\,\alpha = \frac{BD}{DF} = \frac{BD:MD}{DF:MD} = \frac{tg\, BMD}{\sin DMF} = \frac{tg\, a}{\sin b}.$$

Nun werde mit der zuletzt benutzten Linie MD der Zähler beim Kosinus der Hypotenuse c dividiert und multipliziert:

$$\cos c = \cos BMF = \frac{MF}{r} = \frac{MF:MD\cdot MD}{r}$$

$$4)\quad \cos c = \cos DMF \cdot \cos BMD = \cos b \cdot \cos a.$$

Aus diesen Formeln gehen durch Umformung neue hervor. Das Ergebnis von 2) liefert

$$\cos\alpha = \frac{\sin b}{\sin c}\cdot\frac{\cos c}{\cos b}.$$

Der erste Bruch bedeutet, gemäß 1), $\sin\beta$ und der zweite nach 4) $\cos a$; also hat man

5) $\cos\alpha = \sin\beta \cdot \cos a$ und entsprechend
$\cos\beta = \sin\alpha \cdot \cos b$; daraus folgt durch Multiplizieren
$\cos\alpha\cos\beta = \sin\alpha\sin\beta \cdot \cos b\cos a$; daher nach 4)
6) $\mathrm{cotg}\,\alpha \cdot \mathrm{cotg}\,\beta = \cos c$.

*) Neper (Napier), Baron von Merchiston, geb. 1550, gest. 1617 April 3 (alten Stils) zu Merchiston-Castle unweit Edinburgh.

Den 6 Formeln giebt man, um sie leichter im Gedächtnis behalten zu können, andere Gestalt. Man beseitigt die Nenner und setzt für die Katheten ihre Ergänzung zu 90°. Nach den dadurch entstehenden Formen treten sie in 2 Gruppen zusammen:

I.	II.
1) $\cos(90^0 - a) = \sin\alpha \sin c$	2) $\cos\alpha = \operatorname{cotg}(90^0 - b) \operatorname{cotg} c$
4) $\cos c = \sin(90^0 - b) \sin(90^0 - a)$	3) $\cos(90^0 - b) = \operatorname{cotg}(90^0 - a) \operatorname{cotg}\alpha$
5) $\cos\alpha = \sin\beta \sin(90^0 - a)$	6) $\cos c = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta$.

Schreibt man nach der Figur die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks mit Fortlassen des bekannten rechten Winkels heraus, so ersieht man aus der Anordnung

$$\begin{matrix} & \beta & \\ c & & a \\ & \alpha \;\; b & \end{matrix}$$

daß in Gruppe I auf der rechten Seite immer zwei zusammenliegende Stücke auftreten und links das von ihnen getrennte, in jeder Formel der Gruppe II aber drei nebeneinander liegende, deren mittleres links steht. Bezeichnet man deshalb die zusammenliegenden Stücke mit z und z', das getrennt liegende mit g, das mittlere mit m, die nebenliegenden mit n und n', so hat man nur 2 Formeln zu merken

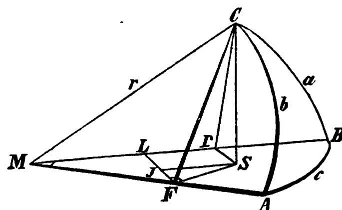
1. I. $\cos g = \sin z \cdot \sin z'$ und II. $\cos m = \operatorname{cotg} n \cdot \operatorname{cotg} n'$,

wo statt der Katheten ihre Komplemente zu nehmen sind.

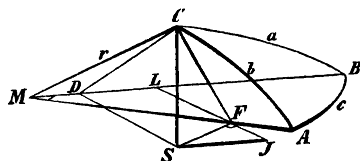
I und II sind die beiden Neperschen Gleichungen für das rechtwinklige sphärische Dreieck.

B. Das schiefwinklige sphärische Dreieck.

Der Sinus- und der Kosinus-Satz.



Figur — 2. ∠ A ist spitz.



Figur — 1. ∠ A ist stumpf.

1) Man fälle vom dritten Eckpunkte C des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks ABC auf die Grundebene MAB die Senkrechte CS, sowie auf die Radien MB und MA die Senkrechten CD und CF, und verbinde deren Fußpunkte D und F mit S. Von den entstandenen Neigungswinkeln ist $CDS = \beta$ des sphärischen Dreiecks und $CFS = \alpha$, wenn α spitz ist, und $= 180^0 - \alpha$, wenn α ein stumpfer sphärischer Winkel ist.

Die erste Senkrechte CS, auf zwei Weisen durch Hypotenusen trigonometrisch ausgedrückt, giebt in beiden Fällen (mittels CD und CF)

$$CS = r \sin a \cdot \sin\beta = r \sin b \cdot \sin\alpha,$$

und durch Dividieren mit $\sin\alpha \sin\beta$ folgt

2. der **Sinussatz**: $$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta}.$$

2) Nun werde auch von dem auf MA liegenden Fußpunkte F die Senkrechte FL auf MB gefällt und bis zu ihr von S aus die Parallele zu MB gezogen, welche sie in J trifft. Weil $\angle$ MFL (und im andern Falle mit seinem Scheitelwinkel) jeden von beiden Winkeln zu einem Rechten ergänzt, ist

$$\angle SFJ = FML = c.$$

Ist $\angle\alpha$ spitz, so ist $MD = ML + JS$, und wenn man diese Linien der Reihe nach durch Hypotenusen trigonometrisch ausdrückt, steht da

$$r\cos a = r\cos b \cdot \cos c + r\sin b \cdot \cos\alpha \cdot \sin c.$$

Ist $\angle\alpha$ stumpf, so wird $MD = ML - JS$ und das ist

$$r\cos a = r\cos b \cdot \cos c - r\sin b \cdot \cos(180^0 - \alpha) \cdot \sin c.$$

Folglich lautet in beiden Fällen der **Kosinussatz** für die Seiten

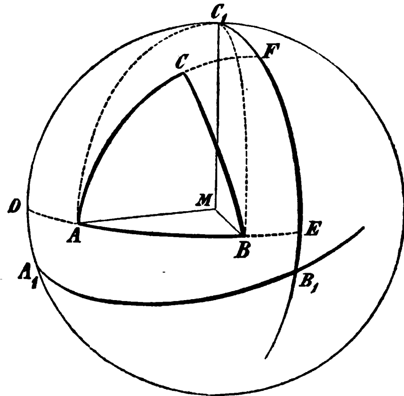
3. $$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cdot \cos\alpha.$$

[Man denke, zum leichteren Behalten dieser Gleichung, an die Kosinus-Grundformel: $\cos(b - c) = \ldots\ldots$]

Um hieraus andere Formeln bequem ableiten zu können, ist Kenntnis der Eigenschaften der Polardreiecke erforderlich.

C. Polardreiecke.

1. Lehrsatz. Macht man bei drei Eckpunkte eines sphärischen Dreiecks zu Polen von Bogen größter Kreise, die man um sie auf der Kugel bei dem gegebenen Dreiecke mit dem Viertel eines größten Kreises beschreibt, so umschließen dieselben ein neues sphärisches Dreieck, dessen Eckpunkte die Pole zu den Seiten des ersten Dreiecks sind.



Figur 0. Polardreiecke.

Beweis. Um A ist mit 90^0 eines größten Kreises der Kugel der Bogen C_1FB_1 beschrieben und um B der Bogen A_1DC_1. Ihr Schnittpunkt C_1 ist der Pol zu AB, weil, wenn man die Bogen C_1A und C_1B zieht, $\angle C_1MA$ als Centriwinkel zu $AC_1 = 90^0$ ein Rechter ist und ebenso $\angle C_1MB$; weshalb MC_1 auf der Ebene AMB im Mittelpunkte senkrecht steht. — Der um C beschriebene Bogen A_1B_1 liefert B_1 als Pol zu AC, wie die Hilfsbogen B_1C und B_1A zeigen könnten; und ebenso ist es mit A_1 für BC.

Man erkennt sogleich, daß, wenn man das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ zuerst angenommen hätte, die Konstruktion der Kreisbogen um C_1, B_1 und A_1 das Dreieck ABC zu ihm liefern muß. Wegen dieser Wechselbeziehung der Eckpunkte, als Pole zu den Seiten des andern, heißen zwei so zusammengehörige sphärische Dreiecke Polardreiecke.

2. Lehrsatz. In Polardreiecken ergänzt jeder Winkel des einen Dreiecks die gegenüberliegende Seite des andern Dreiecks zu 180°.

Beweis. Der Winkel $A_1 C_1 B_1$ hat ebensoviele sphärische Grade, Minuten und Sekunden, wie der durch seine Schenkel abgegrenzte Äquatorbogen DE Bogen-Grade, Minuten und Sekunden enthält. Addiert man beide gleiche Zahlen zur Zahl der Grade, Minuten und Sekunden der Seite AB, so wird (den Buchstaben ist nur die Benennung Grad beigefügt)

$$AB^0 + A_1 C_1 B_1{}^0 = AB^0 + DE^0 = AB^0 + BE^0 + BD^0 = 90^0 + 90^0 = 180^0.$$

Da der Eckpunkt A des andern Dreiecks Pol zu $B_1 C_1$ ist, so stimmen überein in Graden, Minuten und Sekunden $\angle BAC$ und Bogen EF. Deshalb wird

$$B_1 C_1{}^0 + BAC^0 = B_1 C_1{}^0 + EF^0 = B_1 F^0 + FC_1{}^0 + EF^0 = 90^0 + 90^0 = 180^0.$$

Ebenso ist es bei den übrigen Paaren.

3. Lehrsatz. Die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks beträgt mehr als 180° und weniger als dreimal 180°.

Beweis. Da im Dreieck ABC und seinem Polardreiecke $\angle A + B_1 C_1 = 180^0$ ist, so kommt durch Hinzufügen der beiden anderen Gleichungen

$$A + B + C + B_1 C_1 + A_1 C_1 + A_1 B_1 = 3 \times 180^0;$$

also ist $A + B + C$ allein weniger als dreimal 180°. Der Umfang des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ ist kleiner als ein größter Kreis; erst wenn ABC in einen Punkt überginge, würde das Polardreieck zu einem größten Kreise werden. Mithin ist

$$B_1 C_1 + A_1 C_1 + A_1 B_1 < 360^0 \text{ oder } 2 \times 180^0.$$

Zieht man dies von jener Gleichung ab, so bleibt

$$A + B + C > 180^0.$$

Anmerkung. Der Überschuß der Winkelsumme über 180° wird der sphärische Exceß genannt und mit E bezeichnet oder (entsprechend der zweckmäßigen Bezeichnung des Dreiecksumfanges mit **2m**) mit 2ε.

Durch 2 Winkel eines sphärischen Dreiecks ist der dritte noch nicht bestimmt; weil die Summe der drei Winkel keine feste Zahl, wie beim ebenen Dreiecke, ist.

D. Der Kosinus-Satz für die Winkel.

Wendet man den oben unter B 2) entwickelten Kosinus-Satz (Formel 3) auf die Seiten a_1, b_1 und c_1 des zum Dreieck ABC gehörigen Polardreiecks an, so hat man die Gleichung

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cdot \cos \alpha_1.$$

Es ist aber nach dem 2. Lehrsatze (unter C) $a_1 = 180^0 - \alpha$, $b_1 = 180^0 - \beta$, $c_1 = 180^0 - \gamma$ und $\alpha_1 = 180^0 - a$. Durch Einsetzen dieser Werte entsteht

$$-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cdot\cos a$$

oder nach Umkehren der Vorzeichen

der Kosinussatz für die Winkel

4. $$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cdot\cos a$$

welcher sich vom Kosinussatz für die Seiten durch das rechts vorangehende Minuszeichen wesentlich unterscheidet.

E. Die Neperschen Analogien.

Aus dem Sinussatz in der Form

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta$$

folgt durch einen oft zu brauchenden Proportionssatz

$$\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}.$$

Nach dem Einsetzen der Werte ziehe man links zusammen, rechts nicht:

I. $$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Aus dem Kosinussatz für die Seite a und für die Seite b hat man

$$\cos a - \cos b\cos c = \sin b\sin c\cdot\cos\alpha$$
$$\cos b - \cos a\cos c = \sin a\sin c\cdot\cos\beta.$$

Subtrahiert man die erste Gleichung von der zweiten, so entsteht

$\cos b - \cos a + (\cos b - \cos a)\cos c$ oder zusammengezogen

$$(\cos b - \cos a)(1 + \cos c) = \sin c(\sin a\cos\beta - \sin b\cos\alpha)$$

und durch Addieren der beiden Gleichungen folgt ebenso

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \sin c(\sin a\cos\beta + \sin b\cos\alpha).$$

Es fällt der Faktor $\sin c$ fort, wenn man die vorletzte Gleichung durch die letzte dividiert:

$$\frac{\cos b - \cos a}{\cos a + \cos b}\cdot\frac{1+\cos c}{1-\cos c} = \frac{\sin a\cos\beta - \sin b\cos\alpha}{\sin a\cos\beta + \sin b\cos\alpha}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner des rechts stehenden Bruches durch $\sin b$, so kann man für $\frac{\sin a}{\sin b}$ nach dem Sinussatze $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ setzen. Beseitigt man dann wieder den Nenner $\sin\beta$ durch Multiplizieren, so wird der Bruch zu $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$, den man, weil links halbe Winkel entstehen, auch zerlegen wird:

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)}{2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\frac{2\cos^2\frac{1}{2}c}{2\sin^2\frac{1}{2}c} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$ also

II. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}c\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$

Multipliziert man die Gleichungen I und II miteinander, so kommen lauter quadratische Größen und es ergiebt das Quadratwurzelausziehen

5. $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

Dividiert man die II. Gleichung durch diese, so hat man

6. $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}c\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}.$$

Entsprechende Formeln für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ könnte man ebenso ableiten aus dem Sinussatz und aus dem Kosinussatz für die Winkel. Man kommt aber leichter dazu, wenn man die Formeln 5. und 6. auf das Polardreieck anwendet und durch $a_1=180^0-\alpha$, $b_1=180^0-\beta$ u. s. w. zu dem ersten Dreieck zurückkehrt. Dabei ist

$$\frac{1}{2}(a_1+b_1)=180^0-\frac{1}{2}(\alpha+\beta),\quad \frac{1}{2}c_1=90^0-\frac{1}{2}\gamma,\quad \frac{1}{2}(\alpha_1-\beta_1)=-\frac{1}{2}(a-b)$$
$$\frac{1}{2}(a_1-b_1)=-\frac{1}{2}(\alpha-\beta),\quad \frac{1}{2}(\alpha_1+\beta_1)=180^0-\frac{1}{2}(a+b).$$

Hierdurch wird in beiden Formeln die linke Seite negativ, aber auch die rechte, in 5. durch den Nenner und in 6. durch den Zähler, so daß die Minuszeichen sich aufheben und dasteht

7. $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

8. $$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Diese Formeln heißen die Neperschen Analogien, und zwar 5. und 6. für die Seiten, 7. und 8. für die Winkel; denn durch jene findet man aus einer Seite und den anliegenden Winkeln die beiden anderen Seiten, und durch diese aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die beiden anderen Winkel. Zu beachten ist, daß in den Formeln für die Winkel rechts **cotg** eingetreten ist. Welche Funktion in den rechts stehenden Brüchen auftritt, sagt das auf der linken Seite gebrauchte Vorzeichen durch den Gleichklang: bei Minus kommt Sinus.

Schlußbemerkung. Läßt man bei unveränderter Seitenlänge den Kugelmittelpunkt weiter und weiter vom Dreieck abrücken, so gehen, wenn die Seiten im Vergleich zu dem außerordentlich großen Kugelradius sehr klein sind, **sin** und tg der Seiten in die Bogen über und diese strecken sich, wenn der Kugelradius unendlich groß wird, zu geraden Linien. So verwandeln sich die Formeln der sphärischen Trigonometrie in die der ebenen, mit Ausnahme des Kosinussatzes für die Seiten, dessen Form nichts Gleichartiges in der Ebene hat und in $1=1$ übergehen würde.

Astronomische Geographie.

1. Einleitung. Die astronomische Geographie, früher mathematische Geographie genannt, ist derjenige Teil der Erdbeschreibung, welcher die Erde als Weltkörper betrachtet, und von der Gestalt und Größe der Erde und von ihrer Stellung und Bewegung im Raume handelt.

Die zu diesem Gebiete der Naturwissenschaft gehörenden Erkenntnisse haben die Menschen nur gewonnen durch Wahrnehmung von Veränderungen am Sternhimmel. Somit ist als Grundlage erforderlich: Kenntniß des gestirnten Himmels und Bekanntschaft mit Meßinstrumenten, die zur Beobachtung der Gestirne dienen.

Erster Abschnitt.

Der Sternhimmel.

§ 1. Das Himmelsgewölbe.

2. Horizont, Vertikallinie, Zenit. Befinden wir uns bei sternklarem Himmel im Freien, wo nichts unsere Aussicht hemmt — also am besten auf hoher See — so erscheint uns die Erde als eine nach allen Seiten weithin sich ausdehnende Ebene, über welcher der Himmel als ein Halbkugelgewölbe sich ausbreitet. Unser Standpunkt ist der Mittelpunkt dieser Halbkugel; und darum ist die weit herumlaufende Durchschnittslinie unserer Standebene und des Himmelsgewölbes ein größter Kreis. Derselbe wird der Horizont genannt; die Standebene ist die Ebene des Horizontes. Errichtet man im Standpunkte auf der Ebene eine Senkrechte, die Vertikallinie, so schneidet sie das Himmelsgewölbe in einem Punkte, welcher das Zenit heißt.*)

Anmerkung. Wenn wir urteilen, das Himmelsgewölbe sei beim Zenit niedriger, als es einer Halbkugel zukommt, so übertragen wir eine durch den Anblick des Wolkenhimmels uns geläufige Vorstellung auf den sternklaren Himmel.

---

*) Zenit stammt vom arabischen samt, Gegend; es heißt vollständig samt-ar-râs, Gegend des Kopfes, d. h. der Scheitelpunkt am Himmel. Der Schlußbuchstabe des arabischen Wortes entspricht unserm t. Ein h haben Franzosen angehängt, um anzudeuten, daß das t gehört werden muß. — K. Zöppritz in der Zeitschrift für Vermessungswesen (Stuttgart, Konrad Wittwer) 12. Band (1883) Seite 321.

3. Die 4 Himmelsgegenden. Wer den Sternhimmel aufmerksam betrachtet, bemerkt schon nach weniger als 10 Minuten, daß die Sterne an der einen Seite langsam emporsteigen, und daß die an der entgegengesetzten Seite mehr und mehr sich hinabsenken.*) Diejenige Gegend des Horizontes, an welcher die Sterne, wie die Sonne und der Mond, aufgehen, nennen wir Osten; die Gestirne bewegen sich über Süden hin und gehen im Westen unter. Die vierte Himmelsgegend, Süden gegenüber, ist Norden.

4. Gruppierung der Sterne. Wenn man an mehreren Abenden den gestirnten Himmel betrachtet, findet man leicht, daß die Sterne bei ihrer fortschreitenden Bewegung doch ihre gegenseitigen Stellungen beibehalten. Darum konnte man die Sterne in Gruppen, Sternbilder, zusammenfassen, und nur dadurch ist es möglich geworden, einen Stern in einer andern Nacht wieder zu erkennen.
Ferner wird man, wenn man die Sternbilder nach ein paar Wochen genau wieder in derselben Abendstunde betrachtet, sofort bemerken, daß sie sämmtlich nicht mehr dieselbe Lage zum Horizonte haben. — Wir geben die nachfolgende Beschreibung der wichtigsten und schönsten Sternbilder nach derjenigen Lage, welche sie am 21. Oktober abends 9 Uhr haben. In derselben Stellung befinden sie sich am 5. November abends 8 Uhr, am 20. November abends 7 Uhr, und so fort für jeden folgenden Tag 4 Minuten früher.**)

5. Größenklassen der Sterne. Nach der Stärke des Glanzes unterscheidet man Sterne erster, zweiter, dritter u. s. f. Größe. In unsern Figuren zeichnen wir***) für jeden Stern zuerst einen wagerechten Strich und geben

einem Sterne vierter Größe 2 kurze sich schneidende Linien,
" " dritter " 3 " " " "
" " zweiter " 4 längere,
" " erster " 6 noch längere sich schneidende Linien.

*) Sieht man die Sterne an durch ein festgestelltes Fernrohr, so bemerkt man ihr Fortrücken sogleich.

**) Diese Zeitangabe ist für eine schnell und sicher zu erlangende Kenntnis des gestirnten Himmels wohl zu beachten! Man finde sich also zur Sternbeobachtung stets so viel mal 4 Minuten früher ein, als Tage seit dem ersten Anschauen verflossen sind.

***) Es ist dringend anzuraten, die Sternbilder wiederholt aus dem Kopfe (auf einer Schiefertafel) zu zeichnen. Nur wer die Figuren genau inne hat, genießt die Freude, im Sternenheere sich zurecht zu finden. — Nachdem man sich so die einzelnen Sternbilder gut eingeprägt hat, suche man sie am Himmel und auf einer Sternkarte auf.

Als eine ganz vorzügliche Wandkarte, welche auf einem dunkelblauen Kreise von 90 cm Durchmesser die Sterne weiß und hellblau, die Gestalten und die Sternbildnamen in matten roten Linien, ohne die Gruppierung der Sterne undeutlich zu machen, giebt (so schön, daß sie als Zimmerschmuck dienen kann), ist

§ 2. Sternbilder.*)

6. Der große Bär (große Himmelswagen). Man orientiert sich am Himmel sofort durch das am leichtesten zu erkennende Sternbild: der große Himmelswagen.

Figur 1. Der große Bär (Ursa major) mit dem großen Himmelswagen.

---

zu empfehlen: Der nördliche gestirnte Himmel, dargestellt von Dr. Ferd. Reuter. Gotha, Justus Perthes. (4. Aufl. 1874.) Preis 5 M., aufgezogen und zusammengelegt in Mappe 7,50 M., auf Leinwand über einen Holzrahmen gespannt 9 M.

In gleicher Größe viel einfacher, da sie nur die Haupt-Sternbilder weiß auf dunkelblauem Grunde ohne die figürlichen Darstellungen bringt, ist: Brüllow und Jul. Straube, Schulwandkarte vom nördlichen Sternhimmel. (Geographisches Institut und Landkarten-Verlag von Jul. Straube, Berlin.) Aufgezogen 7,50 M.

Dr. Ed. Weiß, Professor an der Sternwarte zu Wien, zwei Sternkarten. Berlin, Dietrich Reimer, 1874 2 Blatt Querfolio (die nördliche und die südliche Halbkugel ohne den Rand 34 cm lang und 18 cm breit, die Sterne schwarz auf weißem Grunde). 2 M.

Gut und billig ist der Himmels-Atlas von R. Schurig. (8 Karten.) Leipzig, Pfau, 1886. 3 M.

Ein großes schönes Werk von 12 Tafeln ist: Dr. Eduard Heis, neuer Himmels-Atlas. Darstellung der im mittleren Europa mit bloßen Augen sichtbaren Sterne. Nebst Sternverzeichnis. Köln, Du Mont-Schauberg'sche Buchhandlung, 1872. Gebunden 24 M.

*) Auf Sternkarten müssen die Sternbilder, je nach der Stelle, welche sie in der Grad-Einteilung auf dem Blatte einnehmen, in verschiedenen Maßstäben

Er besteht aus sieben hell glänzenden Sternen: vier, welche mit einander verbunden ein Trapez geben, deuten die Räder an und drei die gekrümmte Deichsel. Sie werden von den Astronomen mit den in der Figur beigesetzten griechischen Buchstaben bezeichnet,*) und führen die Namen**) α Dubhe, β Merak, γ Phachd, δ Megrez (3. Größe), ε Alioth, ζ Mizar und η Benetnasch. — Denkt man an der Himmelskugel vom Zenit nach der Nordseite des Horizontes einen Bogen senkrecht hinabgezogen, so steht der große Himmelswagen jetzt [21. Oktober abends 9 Uhr***)] an der Stelle, welche das unterste Viertel dieses Bogens abgrenzt. — Zu diesen 7 Sternen kommt noch eine Menge kleiner auf der der Deichsel entgegengesetzten Seite und hinab bis zum Horizonte; und diese bilden allzusammen das Sternbild des großen Bären (Ursa major). Von den in fast gleicher Entfernung stehenden 3 Paaren befindet sich das unterste†) jetzt unter dem Horizonte. Scharfe Augen erkennen neben ζ [11 Bogenminuten entfernt] einen Stern 5. Größe, Alcor oder das Reiterlein (g in der Figur); ein mäßig gutes Fernrohr aber zeigt, daß Mizar selbst ein Doppelstern ist, nämlich aus einem Sterne 3. und einem 5. Größe besteht. [Ihr Abstand beträgt nur 14″, weshalb sie bei zu schwacher Vergrößerung nicht unterschieden werden können.]

7. Der kleine Bär mit dem **Polarstern.** Verbindet man die beiden Hinterräder β und α des großen Himmelswagens, und verlängert diese Linie über α hinaus, also jetzt nach oben, um das Fünf- bis Sechsfache, so trifft man auf einen Stern zweiter Größe, welcher der Polarstern heißt. Derselbe ist der äußerste des auch

---

gezeichnet werden. Die hier vorgelegten Darstellungen von zwölf Sternbildern sind alle von solcher Größe, wie ein im Mittelpunkte befindliches Auge sie an der Innenseite einer Hohlkugel von nur 12,5 cm Radius erblicken würde. In der Weite des deutlichen Sehens, 25 cm, in welcher man bei nicht kurzsichtigen Augen das Buch beim Lesen hält, sind demnach die Abstände der Sterne doppelt so groß zu denken, und in 1 m Entfernung ist jede Figur schon 8 mal so breit und 8 mal so hoch zu nehmen. In einer Entfernung von 3 m, etwa an der Wand des Zimmers, würde der Abstand $\alpha\eta$, welcher in Figur 1 5,67 cm beträgt, schon 136 cm groß werden. In solcher Stärke wachsen die Sternbilder mit dem Abstande. Beim Aufsuchen am Himmel sind sie also sehr groß zu erwarten.

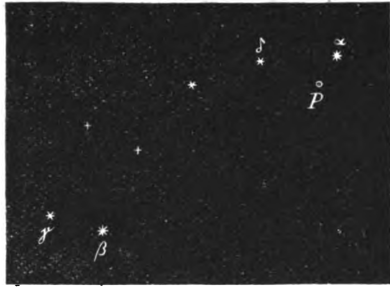
*) Die Bezeichnung der Sterne mit griechischen Buchstaben, denen die lateinischen folgen, ist eingeführt von Johann Bayer, in dessen Uranometria (Atlas von 51 Sternkarten), 1603 zu Augsburg erschienen, sie sich zuerst findet.

**) Die Namen der Sterne sind größtenteils arabischen Ursprungs. Eine Erklärung derselben gab Ideler in seinen Untersuchungen über den Ursprung und die Bedeutung der Sternnamen. (Berlin, 1809.)

***) Am 6. April abends 10 Uhr, am 21. April abends 9 Uhr u. s. f. steht der große Himmelswagen beim Zenit.

†) Dieses Paar und das mittelste dachten sich die Alten an den Hinterfüßen, ε, ζ und η am Schwanze der am Himmelsgewölbe hinauflaufenden Bärin.

aus sieben Sternen bestehenden kleinen Himmelswagens. Diese und noch einige sehr kleine Sterne (unterhalb β) rechnet man zum kleinen Bären, dessen Stellung (Richtung) im Vergleich zum großen Bären dadurch leicht zu merken ist, daß die Fortsetzung des aus den 5 Sternen gebildeten Bogens $\alpha\beta$ über β hin auf ζ Ursae majoris trifft und daß β des kleinen Bären die Mitte dieses Bogens ist.



Figur 2. Der kleine Bär (Ursa minor) (kleine Himmelswagen) mit dem Polarstern α.

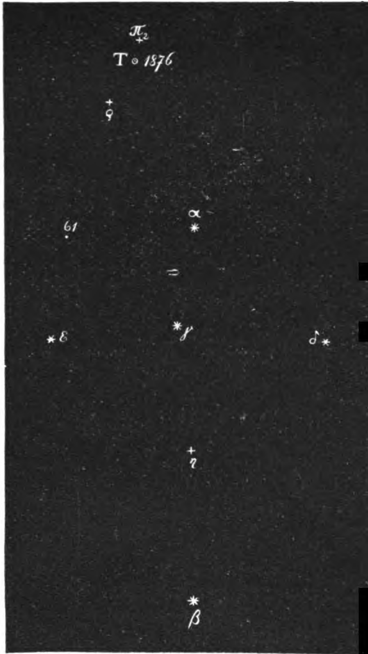
8. Der Drache. Zwischen beiden Bären zieht sich der Schwanz des Drachen hin; der dritte Stern, α, des Schwanzes liegt in der Mitte zwischen β des kleinen und ζ des großen Bären.



Figur 3. Der Drache (Draco).

Diese aus 8 Sternen dritter Größe gebildete Schlangengestalt zieht sich herum in weitem Bogen zu den 4 nahe bei einander stehenden Sternen (γ zweiter Größe) am Kopfe des Drachen, so daß der ganze Zug aussieht wie ein großes Z.

9. Der Schwan. Die Richtung vom Viereck des großen Himmelswagens durch das Viereck des kleinen führt in fast doppelter Entfernung zu dem als ein schönes Kreuz sich sehr deutlich markierenden Sternbilde des Schwanes. Der Stern α, Deneb genannt, bildet mit den vier nächsten ungefähr die Ecken eines Quadrates, aus dessen Diagonalendurchschnittspunkt der Stern γ nur wenig verschoben ist. Der sechste Stern, β, am Schnabel des mit weit ausgebreiteten Flügeln am Himmel fliegenden Schwanes, heißt Albireo. Von den vielen Sternen vierter Größe sind bei den Schwanzfedern noch 2 angegeben, ϱ und π_2. An der zwischen ihnen mit T bezeichneten Stelle entdeckte der Astronom Julius Schmidt in Athen bei fortgesetztem Beobachten der Zenitsterne am 24. November 1876 einen Stern, welcher am 20. November noch nicht sichtbar war (am 21., 22. und 23. war der Himmel in Athen bedeckt). Er war zur Zeit der Entdeckung 3. Größe und hatte weißes Licht. Diesen Glanz behielt er nur 4 Tage. Er zeigte sich bei den in jeder folgenden Nacht fortgesetzten Beobachtungen am 28. November von 4. Größe, am 30. von 5., am 5. Dez. von 6., vom 15. Dez. an von 7. Größe und hatte eine entschieden rote Farbe angenommen, welche am 9. Januar 1877 einen deutlichen Stich ins Purpur enthielt. Bei seiner spektroskopischen Untersuchung sahen Astronomen in Paris und Berlin die Linien des glühenden Wasserstoffs und einige andere helle Linien. Wahrscheinlich war (nach Dr. Lohses Erklärung) die atmosphärische Hülle, welche die glühenden Dämpfe und Gase jenes Weltkörpers lichtabsorbierend umgiebt, durch Wärmeausstrahlung so weit abgekühlt, daß eine chemische Vereinigung der betreffenden Elementarstoffe eintrat, die unter bedeutender Wärme- und Lichtentwickelung den im Ueberschusse vorhandenen Wasserstoff bis zum Glühen erhitzte. Der Verbrennungsprozeß kann dort schon vor vielen Jahren stattgefunden haben; das Licht brächte uns die erste Nachricht von dem Erglühen erst nach dem 20. November 1876. Dem unbewaffneten Auge blieb der neue Stern vom Jahre 1876, den Julius Schmidt mit T Cygni bezeichnet, 21 Tage sichtbar. Im



Figur 4. Der Schwan (Cygnus).

September 1877 war er 10,5. Größe und von rein blauer Farbe, die der Stickstofflinie 498,7 Milliontel-Millimeter Wellenlänge entspricht. Ebenso im Februar 1878 bei 11,5. Größe. Dieser Stern ist das einzige Beispiel für den (in Jahresfrist erfolgten) Übergang eines kontinuierlichen Spektrums in eine einzige helle Linie.*)

10. Die Leier. In der Mitte zwischen dem Kopfe des Drachen und dem Kopfe des Schwanes steht das kleine, aber durch den Stern erster Größe, **Wega** (α), sehr leicht kenntliche Sternbild: die Leier. Es ist ein kleines Parallelogramm von Sternen neben der funkelnden Wega. Ein Fernrohr zeigt die ihr nächste Ecke ζ als zwei kleine Sterne [in einem gegenseitigen Abstande von 44″].



Figur 5. Die Leier (Lyra).

11. Cassiopeja. Am leichtesten zu merken ist das Sternbild Cassiopeja; denn 5 Sterne bilden ein breit gezogenes W.**) Der Polarstern steht in der Mitte der Verbindungslinie zwischen δ des großen Bären und β der Cassiopeja.



Figur 6. Cassiopeja (Cassiopeia).

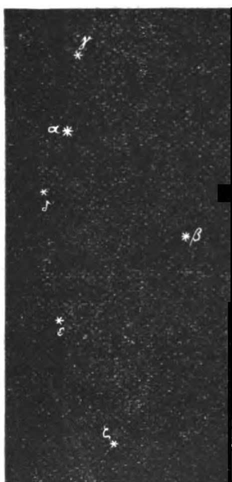
Anmerkung. Um die Cassiopeja im Sommer zu finden, muß man dahin sehen, wo der große Himmelswagen zu derselben Abendstunde im Winter steht; und wo man jetzt die Cassiopeja erblickt, dort befindet sich nach einem halben Jahre zu derselben Abendstunde der große Himmmelswagen. An der wechselnden Stellung dieser beiden Sternbilder kann man die Änderung der Stellung des Himmelsgewölbes am leichtesten

*) Bis zu dieser Zeit sind seit 134 vor Christi Geburt als sogenannte neue Sterne bekannt geworden zwanzig. Von ihnen schreibt Hermann J. Klein, der Fixsternhimmel (Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1872) Seite 100 bis 110. Alle loderten plötzlich in ihrem vollen Glanze auf und nahmen allmählich an Helligkeit ab. Am 12. Mai 1866 wurde ein dem bloßen Auge nicht sichtbarer Stern T in der nördlichen Krone, Nr. 2765 des Argelanderschen Katalogs, welcher dort als 9,5. Größe bezeichnet ist, plötzlich zu einem Sterne 2. Größe, verlor schnell an Leuchtkraft, so daß er nur 9 Tage mit freien Augen gesehen wurde, und erreichte am 30. Juni seine ursprüngliche Lichtstärke, die er dann unverändert beibehielt (nach Beobachtungen von 1866 bis 1876). Das Spektroskop zeigte auf einem Spektrum, ähnlich dem der Sonne, helle Linien, unter andern die des glühenden Wasserstoffs. Im März 1878 wurde er von Prof. Dr. H. C. Vogel, Direktor des astrophysikalischen Observatoriums bei Potsdam, 10. Größe gesehen und zeigte ein kontinuierliches Spektrum, welches von dem anderer Sterne nicht auffallend verschieden war.

**) Diesen Anblick erhält man zu der in Rede stehenden Beobachtungszeit, wenn man sich mit dem Gesicht nach Süden hinstellt und dann gerade in die Höhe sieht.

erkennen, die, allnächtlich um 4 Minuten vorschreitend (Nr. 4), nach einem ganzen Jahre das Himmelsgewölbe zu derselben Abendstunde wieder in derselben Lage erscheinen läßt.

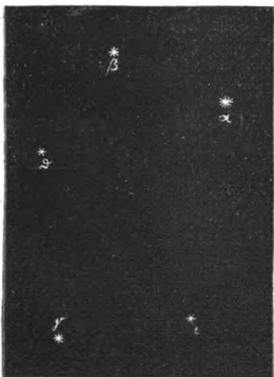
12. (Die Milchstraße.) Als Verbindung zwischen Cassiopeja und Schwan und über beide hinaus über den ganzen Himmel hin sieht man in sehr klaren Nächten einen matten Lichtstreifen sich erstrecken, welcher beim Schwan sich in zwei Arme teilt. Es ist die Milchstraße. Betrachtet man sie durch ein Fernrohr, so sieht man sie sich auflösen in eine zahllose Menge von Sternen, die also nur dem unbewaffneten Auge in einander verschwimmen und nebelartig erscheinen.



Figur 7. Perseus (Perseus).

13. Perseus. Vom Schwan aus hinter Cassiopeja folgt in der Milchstraße Perseus; ein von 5 Sternen gebildeter Bogen, wie ein von der Seite gesehener Hohlspiegel, bei welchem der Stern Algol (β) die Stelle des Brennpunktes einnimmt. Algol ist ein merkwürdiger Stern, weil seine Lichtstärke einem kaum dreitägigen Wechsel unterworfen ist in der Weise, daß er $\frac{6}{7}$ der Zeit zweiter Größe ist, dann sinkt er während $4\frac{3}{4}$ Stunden bis zur 4. Größe hinab und nimmt in den folgenden $4\frac{3}{4}$ Stunden an Helligkeit wieder bis 2. Größe zu.

14. Die Plejaden. Die Verlängerung des Sternbogens Perseus aus der Milchstraße hinaus führt sofort auf eine kleine Gruppe dicht an einander gedrängter Sterne: die Plejaden. In ihrer Mitte leuchtet Alcyone als ein Stern dritter Größe am hellsten unter den 7 Hauptsternchen dieser Gruppe, die man auch Siebengestirn nennt. Mit einem mäßig vergrößernden Fernrohr betrachtet, gewähren sie einen überraschend schönen Anblick. Entsprechend stehen in der entgegengesetzten Verlängerung des Perseus-Bogens mitten zwischen γ des Perseus und δ der Cassiopeja in der Milchstraße dicht bei einander zwei kleine helle Wolken, zwei Sternhaufen, welche zu den interessantesten Fernrohr-Objekten am Himmel gehören.



Figur 8. Der Fuhrmann (Auriga).

15. Der Fuhrmann. Es folgt dann auf der Milchstraße, als ein schräg darüber hinaus gerecktes Fünfeck, der Fuhrmann, mit dem Stern erster Größe Capella (α).

16. Der Stier. Der Stern γ des Fuhrmann wird auch zum Sternbilde des Stiers gerechnet und dann mit β bezeichnet. Er und ein Stern dritter Größe, ζ, stehen an den Spitzen der riesigen Hörner; es wird aber nur der Vorderkörper des Stiers zur Darstellung des Sternbildes verwandt; sein vorgebeugter Kopf wird angedeutet durch das aus dem rötlich glänzenden Sterne erster Größe Aldebaran (α) und 5 kleineren Sternen gebildete gleichschenkelige Dreieck, welches durch noch dazwischen tretende Sternchen deutlich wie V aussieht. (Diese Gruppe nannte man die Hyaden.) Die Alten dachten sich den Stier im Sprunge (die drei untersten Sterne 4. Größe zeigen diese Haltung der Vorderfüße an) gegen den mit geschwungener Keule ihm entgegenstürmenden Orion.



Figur 9. Der Stier (Taurus).

17. Orion. Das prachtvollste Sternbild ist der Orion. Jedem, der an einem klaren Winter- oder Frühlingsabend den gestirnten Himmel betrachtet, fallen die drei in gerader Linie und gleichem Abstande nahe bei einander stehenden Sterne 2. Größe, δ, ε, ζ, auf; sie bilden den Gürtel des Orion; man nennt sie für sich auch den Jakobstab.*) Darüber und darunter, wieder in gleichem



Figur 10. Orion (Orion).

*) Dies ist der Name eines einfachen Visier-Instruments, welches im 16. und 17. Jahrhunderte zum Winkelmessen gebraucht wurde. Es bestand aus einem Stabe, durch welchen in gleichen Abständen Löcher gebohrt waren. Durch eines derselben steckte man ein Stäbchen, dessen Länge gleich dem Abstande der Löcher war. Dieses Querstäbchen mußte die Enden des anvisierten Gegenstandes gerade verdecken. Der am meisten auf der See gebrauchte Jakobstab wurde von 1731 an verdrängt durch den Spiegelsextanten (Nr. 22).

Abstande von ihnen, strahlen die beiden Sterne erster Größe Beteigeuze (α) und Rigel (β). Dann kommen, auch in regelmäßiger Stellung, in gerader Linie mit dem mittleren der drei Sterne, γ zweiter und $\varkappa$ dritter Größe; ferner 2 dritter Größe unter den beiden äußeren Sternen des Jakobstabes (allzusammen wie X); und nun noch darüber eine Menge kleiner Sterne in schön geschwungenem Zuge. Dieses Sternbild geht jetzt (21. Oktober) erst um 10 Uhr auf.*)



Figur 11. Die Zwillinge (Gemini).

18. Die Zwillinge. In der Richtung $\beta\alpha$ des Orion stehen auf der andern Seite der Milchstraße, aus zweimal 4 Sternen gebildet, zwei gleiche und ziemlich parallele Linien, so daß die Figur aussieht wie eine römische II (so groß, wie die Länge $\alpha\beta$ des Orion). Dies Sternbild heißt die Zwillinge. Von den beiden Hauptsternen ist α Castor**) und β Pollux. Wenn man den Abstand $\alpha\beta$ des Fuhrmann über β hinaus um das Dreifache verlängert, trifft man Castor,. bei vierfacher Verlängerung streift man Pollux. Auch die Richtung der Diagonale $\delta\beta$ des großen Himmelswagens führt auf Castor.

19. Der kleine und der große Hund. Die Linie α der Zwillinge bis α des Orion ist Hypotenuse eines gleichschenkelig-rechtwinkeligen Dreiecks,***) für welches die dritte (über Pollux hinaus zu suchende) Ecke ein Stern erster Größe, Procyon, ist. (Schwan, Polarstern, Castor und Pollux und Procyon liegen in einer Richtung.) Außer diesem Stern hat der kleine Hund nur noch einen Stern dritter Größe. Unter dem Schenkel Procyon bis α des Orion setzt sich ein gleichseitiges Dreieck an, dessen dritte Spitze der hellste von allen Sternen, der grünlich funkelnde, rot aufblitzende Sirius ist. (Der Jakobstab $\delta\varepsilon\zeta$ zeigt auf ihn.) Er gehört zu dem bei uns nur wenig über die Südseite des Horizontes kommenden Sternbilde: der große Hund.

---

*) Der Nebel im Orion (dem bloßen Auge mit Anstrengung sichtbar) steht bei dem Sterne 4. Größe senkrecht unter ε. Mit einem lichtstarken Fernrohr betrachtet, gewährt dieser mannigfaltig gestaltete Lichtschimmer mit darüber zerstreuten Sternchen, besonders bei den 4 „das Trapez“ bildenden Sternchen, einen überaus wunderbaren Anblick. Die Spektralanalyse hat nachgewiesen, daß dort glühendes Gas leuchtet.

**) Ein gutes Fernrohr zeigt, daß Castor ein Doppelstern ist von 2,7. und 3,7. Größe und beide sind grünlich.

***) Auf einer das Himmelsgewölbe in einer Ebene darstellenden Sternkarte muß sich natürlich die Gestalt der dem Rande nahen Dreiecke etwas verändern.

20. Der Löwe. Errichtet man über der Linie Procyon-Pollux ein gleichschenkeliges Dreieck mit $1\frac{3}{4}$ so großen Schenkeln, so kommt seine Spitze in einen Stern erster Größe, Regulus (α), im (großen) Löwen. Die 7 Hauptsterne desselben bilden ein rechtwinkeliges Dreieck und ein Parallelogramm, dessen kleinere Parallelen der kleineren Kathete des Dreiecks parallel laufen. Man sieht dieses Sternbild, welches die Gestalt eines nach rechts springenden Löwen wohl erkennen läßt, am 28. März abends 9 Uhr im Südosten. Zu dem letzten Sterne β (Denebola) dieses großen Sternbildes gelangt man, wenn man vom Polarstern eine Linie durch γ des großen Himmelswagens zieht. Daraus folgt, daß es in den Abendstunden der Wintermonate nicht sichtbar ist, weil es unter der Nordseite des Horizontes liegt.



Figur 12. Der Löwe (Leo).

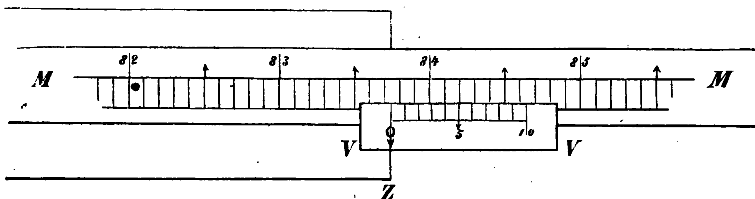
Schlußbemerkung. Der Raum in vorliegendem Buche und die auf den ganzen Abschnitt jetzt zu verwendende Zeit gebieten, die Vorführung noch anderer großer Sternbilder, wie Andromeda, Pegasus, Hercules, Bootes nebst Krone, Jungfrau, zu unterlassen. Der Leser wird durch obige Besprechung genug Anleitung erhalten haben, sich selbständig weitere Kenntnis des Sternhimmels durch Studium einer Himmelskarte zu verschaffen. (S. Note zu Nr. 5.)

§ 3. Meßinstrumente.

21. Der Vernier. Einem Meßinstrumente, sei es geradlinig oder kreisförmig, mit welchem genaue Längen- oder Winkelbestimmungen

ausgeführt werden sollen, giebt man ein Hilfsmittel, **Vernier***) genannt, um den bei der Messung bleibenden Rest, der also kleiner ist als die kleinste Unterabteilung des Maßes, auch noch als Bruch mit Sicherheit ablesen zu können. Der Vernier besteht in einem Schieber mit kurzer Teilung, welcher sich dicht an dem Hauptmaße hin bewegen läßt.

a. Sollen z. B. bei einem Meterstabe, welcher in Centimeter und Millimeter geteilt ist, auch noch Zehntel-Millimeter angegeben werden, so wird auf den Schieber eine neun Millimeter lange Strecke aufgetragen und in 10 gleiche Teile geteilt. Die Figur 13 zeigt ein Stück solches Maßstabes MM, wie es beim Ablesen mit einer Lupe vergrößert erscheint. VV ist der Schieber, auf ihm von 0 bis 10 die Vernierteilung. Nachdem man den Nullpunkt des Maßstabes MM auf den Anfangspunkt der zu messenden Länge (in der Figur weit links zu denken) gelegt hat, schiebt man VV am Stabe hin, bis der Nullpunkt (0) des Verniers genau mit dem Ende Z der zu messenden Strecke zusammenfällt, wovon man sich mit Hülfe einer Lupe überzeugt. Die in der Figur dargestellte Messung ergiebt 83^{cm} 7^{mm} und einen Rest. Um diesen zu bestimmen, geht man mit dem Auge auf



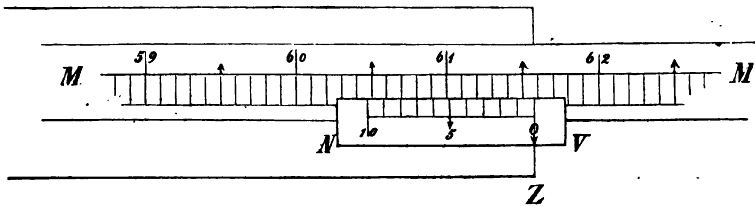
Figur 13. Vortragender Vernier.

der Vernierteilung hin, bis zu der Stelle, wo ein Vernierstrich mit einem Teilstrich des Maßstabes zusammenstimmt. Man sieht in der Figur, daß in dem dargestellten Falle der Vernierstrich Nummer 4 zusammenfällt mit dem auf 84 folgenden Strich der Hauptteilung MM. Auf dem Schieber ist der Abstand von 0 bis 10 gleich 9 Teilen (Millimetern) auf MM; mithin beträgt die Entfernung von einem Vernierteilstrich bis zum nächsten Vernierstrich $\frac{9}{10}$ Millimeter. — Von jenen beiden zusammentreffenden Strichen ist bis zum Teilstrich 84 $\frac{10}{10}$ Millimeter, bis zum Vernierstrich Nummer 3 aber nur $\frac{9}{10}$ Millimeter. Daher beträgt der kleine Unterschied zwischen Teilstrich 84 und Vernierstrich Nr. 3 $\frac{1}{10}$ Millimeter. Darum ist ferner der Vernierstrich Nr. 2 gegen den vor 84 auf MM stehenden Teilstrich um $\frac{2}{10}$ Millimeter zurückgeblieben; die beiden folgenden sind um $\frac{3}{10}$ Milli-

*) Pierre Vernier beschrieb diese Vorrichtung in einer Schrift 1631. Ein anderes, in Anwendbarkeit weit nachstehendes Mittel, kleine Bogenteile zu messen, hatte der Portugiese Nuñez schon 1542 angegeben. Sein latinisierter Name, Nonius, wurde mit Unrecht auf jene übertragen.

meter aus einander getreten, und bei dem Anfangspunkte 0 des Verniers ist der Abstand $\frac{4}{10}$ Millimeter — und das ist jener Rest der Messung. — Wir sind zur Bestimmung dieser vier Zehntel dadurch gekommen, daß wir die Stellung der Vernierstriche Nr. 3, 2, 1, 0 berechneten. Da wir aber dieselbe Anzahl bekommen, wenn wir rückwärts 3, 2, 1, 0 zählen, oder wenn wir in der Richtung 1, 2, 3, 4 vorschreiten, so giebt die Nummer des mit der Hauptteilung zusammenstimmenden Vernierstriches die Anzahl der Zehntel im Reste an. — Man liest also schnell ab: 83^cm 7,4^mm oder besser 0,8374^m.

b. Die Vernierteilung kann noch auf eine zweite Weise gemacht werden. Bei der ersten waren 10 — 1 = 9 Teilchen des Maßstabes in 10 gleiche Teile geteilt; bei der zweiten nimmt man eine Strecke 10 + 1 = elf Teilchen, und teilt sie auf dem Schieber in 10 gleiche



Figur 14. Nachtragender Vernier.

Teile. Der Nullpunkt der Vernierteilung steht beim andern Ende des Schiebers NV (Figur 14). Auch hier entfernt sich, von den beiden zusammentreffenden Teilstrichen an, jeder folgende Vernierstrich um $\frac{1}{10}$ Millimeter mehr von dem entsprechenden des Maßstabes. Bei dem in Figur 14 gezeichneten Falle liest man also ab: 0,6157^m.

Anmerkung 1. Beim Aufsuchen des mit der Hauptteilung zusammentreffenden Vernierstriches mußte man im zuerst besprochenen Falle (bei welchem die Vernierteilchen kleiner sind als die des Maßstabes) mit dem Auge in derselben Richtung vorschreiten, wie die Ziffern auf dem Maßstabe laufen. Deshalb nennt man ihn den vortragenden Vernier (in der Figur VV); der andere (mit den größeren Teilen), bei welchem der Nullpunkt am oberen Ende steht und die Numerierung rückwärts geht, heißt der nachtragende Vernier (NV).

Anmerkung 2. Man kann jeden der beiden Verniers auch mit dem andern, mit 10 bezeichneten Ende auf den Endpunkt der zu messenden Strecke legen. Dann liest man auch mit dem nachtragenden Vernier vorschreitend ab.

c. Jenes Mittel, noch Bruchteile der kleinsten Unterabteilung des Maßstabes ablesen zu können, besteht allgemein darin, daß man, wenn man ntel der kleinsten Teile des Maßes erhalten will, ent-

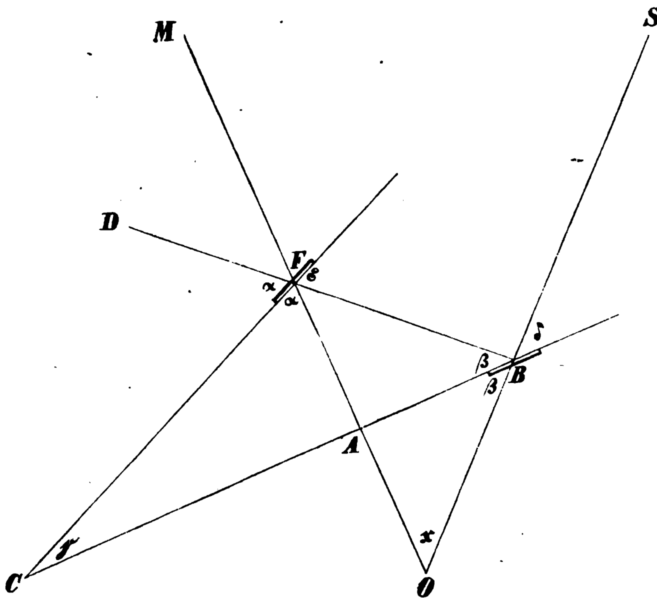
weder n — 1 oder n + 1 solcher Teilchen auf den Schieber übertragen und diese Strecke in n gleiche Teile zerlegen muß. Giebt eine Kreisteilung halbe Grade an, und sollen mit Hilfe des Verniers Minuten, also der dreißigste Teil der auf der Hauptteilung stehenden kleinsten Teile, abgelesen werden, so muß man entweder 29 oder 31 Halbgrade auf den mit der Kreisteilung konzentrischen Schieber übertragen und diese Strecke in 30 gleiche Teile zerlegen. Beim Abmessen eines Centriwinkels des geteilten Kreises bringt man den Nullpunkt der Kreisteilung in den einen Schenkel, den Nullpunkt des Verniers in den andern. Ist dabei der Nullpunkt des Verniers z. B. dicht hinter den Strich 28 Grad der Hauptteilung getreten, und sieht man mit der Lupe zur Bestimmung dieses Restes, daß der Vernierstrich Nummer 13 mit einem Strich der Hauptteilung zusammenfällt, so weicht der 12., 11., 10., ... 3., 2., 1. und 0. immer um 1 Sechzigstel-Grad mehr als der vorhergehende von dem benachbarten Strich der Hauptteilung ab, so daß also jener Überschuß 13mal eine Minute beträgt. — Bei dieser Einrichtung gewann man die Bogenminute oder einen Sechzigstelgrad, indem man setzte $\frac{1}{60} = \frac{1}{2}:30$. Will man mit Hilfe eines Verniers halbe Minuten ablesen, d. h. $\frac{1}{120}$ Grade erkennen, so zerlegt man am zweckmäßigsten $\frac{1}{120}$ in $\frac{1}{3}:40$, läßt demnach die Kreisteilung Drittelgrade angeben, nimmt, da durch vierzig dividiert werden soll, 39 Drittelgrade und teilt sie auf dem Schieber in 40 gleiche Teile. Kommt z. B. bei einer Winkelmessung der Nullpunkt dieses vortragenden Verniers so hinter $127\frac{2}{3}$ Grad zu stehen, daß sein 33. Strich mit einem Teilstrich des Kreises übereinstimmt, dann beträgt der Winkel $127^0\ 56\frac{1}{2}'$. — Wünscht man mittels eines Verniers Winkel-Angaben, die sogar nur von 10 zu 10 Sekunden fortschreiten, so wird man, ohne die Skala auf dem Schieber zu lang werden zu lassen, solche Bogengröße, $\frac{1}{360}$ Grad, nehmen als den sechzigsten Teil von $\frac{1}{6}$ Grad, also auf der Hauptteilung Striche von 10 zu 10 Minuten anbringen, und auf dem Schieber 59 (oder 61) solche Sechstelgrade in 60 gleiche Teile zerlegen; dann giebt der Vernier unmittelbar 10 Sekunden an. —

Während bei den beiden zuerst besprochenen Kreisverniers für den geteilten Kreis ein Radius von 6^{cm} genügt, muß man ihm im letzten Beispiele, wie es bei den astronomischen Instrumenten erforderlich ist, einen viel größeren Radius geben, weil die in den versilberten Kreisrand eingerissenen Teilstriche nicht zu fein werden dürfen, um beim Ablesen mit der Lupe deutlich genug zu sein, und weil bei zu gedrängt stehenden deutlichen Strichen wegen ihrer Dicke eine Unsicherheit eintritt bei der Entscheidung, welcher von ihnen mit einem Striche der Hauptteilung vollkommen zusammentrifft.*)

---

*) Zur Klärung der Vorstellung von Winkel-Sekunden die Frage: „Wie groß ist der Kreisradius zu nehmen, damit die Sekunden der Peripherie Zehntelmillimeter werden? — Antwort: Zwanzig Meter und $62,6^{cm}$. Das ist

22. Der Sextant (Spiegelsextant)*) ist das wichtigste Instrument zum genauen Messen des Winkels, welchen die von zwei fernen Punkten kommenden Strahlen am Auge des Beobachters ein-



Figur 15. Zur Erklärung des Sextanten.

schließen. Es sei SO der Strahl, welchen ein Stern S mitten in das bei O zu denkende Auge sendet, MO ein Strahl von der Stelle des Mondrandes, welche dem Sterne S zugewandt ist. Man will den Winkel MOS = x messen, d. h. die Distanz (den Winkelabstand) des Mondes vom Sterne S finden. Die zum Verständnis des

---

die Höhe des Brandenburger Thors in Berlin (ohne den Siegeswagen). Nach diesen Zehntelmillimetern gehen die Radien, welche Winkelsekunden einschließen.

Da große metallene Kreisbogen durch ihr eigenes Gewicht sich verbiegen würden, so muß der Radius viel kleiner genommen werden. Aber in demselben Maße verkleinern sich auch die Bogen; nicht eine Lupe, sondern schon ein Mikroskop muß dagegen helfen. Bei $33^1/_3$ facher-Vergrößerung erscheinen die Sekunden von $^1/_3$ Meter Radius als Zwölftelmillimeter. (Im Kopfe auszurechnen aus obigem Radius von 20^{m}.)

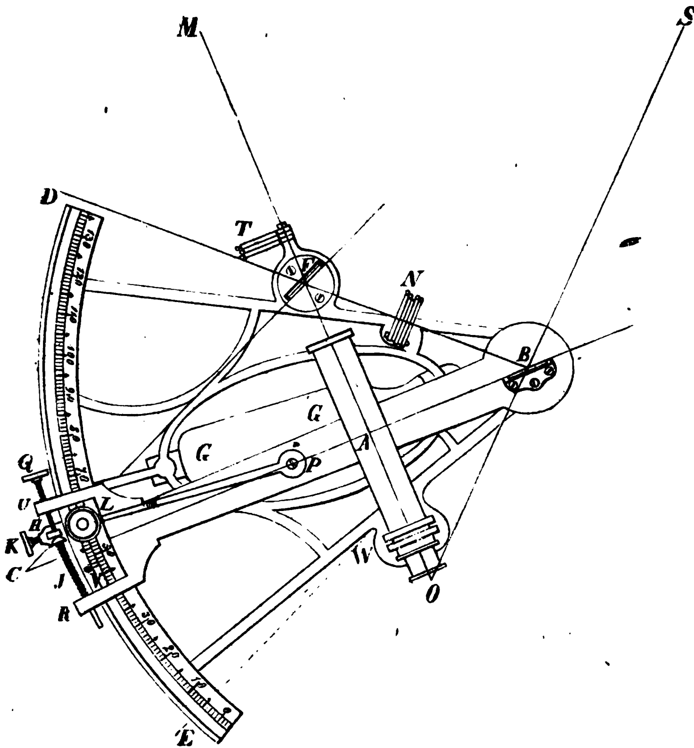
*) Erfunden 1700 von Newton (geb. 25. Dez. 1642, gest. 20. März 1727 in London). Der Mechaniker Hadley in London hat die Erfindung zuerst bekannt gemacht (im Jahre 1731). Am Todestage Newtons schrieb man 1726 März 20, da man damals noch in England das Jahr mit dem 25. März (dem Festtage „Mariä Verkündigung") begann (bis 1752). Nach der Zeitrechnung neuen Stils war Isaak Newton geboren 1643 Januar 5 und gestorben 1727 März 31. (Poggendorff, biographisch-litterarisches Handwörterbuch, Leipzig 1863, J. A. Barth.)

Sextanten nötige Figur (15) wird in folgender Weise entworfen. Von einem beliebigen Punkte B der einen Visierlinie SO fälle man auf die andere, MO, das Lot BA, mache FA = OA, ziehe von B durch F eine Gerade und halbiere den entstehenden Außenwinkel OFD. Seine Halbierungslinie FC schneidet das Lot BA in C; dann ist der von ihnen gebildete Winkel FCB, γ, die Hälfte von x, weil nach dem Satze vom Außenwinkel eines Dreiecks $\gamma = \alpha - \beta$ und $x = 2\alpha - 2\beta$ ist. Nun denke man sich in der Richtung der Halbierungslinien, bei B in BC und bei F in FC, senkrecht zur Ebene der Figur kleine Spiegel aufgestellt, die einander die spiegelnden Seiten zukehren. Nach dem Grundgesetze der Spiegelung — „der vom Spiegel zurückgeworfene Strahl bildet mit ihm einen ebenso großen Winkel, wie der auffallende Strahl" — läuft der vom Sterne kommende Strahl den Weg SBFO und tritt also in derselben Richtung ins Auge, wie der vom Mondrande kommende Strahl MO.

Man wird die eben besprochene Figur in der Zeichnung des Sextanten (Figur 16) leicht wiedererkennen. Der Fußpunkt der senkrechten Mittellinie des Spiegels B ist der Mittelpunkt eines Kreisausschnitts BDE, welcher ein Sechstel einer Kreisscheibe ist. (Daher der Name Sextant.) Damit dieser messingne Kreisausschnitt nicht zu großes Gewicht habe, läßt man von seiner Ebene nur so viel Verbindungsbogen stehen, als hinreichen, um das Instrument gegen das Verbiegen zu schützen. An ihnen ist auf der Hinterseite ein breiter hölzerner Griff GG befestigt, an welchem man den Sextanten mit der rechten Hand bequem vors Auge halten kann in der Lage, daß seine Ebene durch die beiden anvisierten Punkte (S und M) geht. Auf dem Bogen des Kreisausschnitts ist die Gradeinteilung in einen versilberten Streifen eingerissen. Diese Hauptteilung DE heißt Limbus. Auf der Ebene des Sextanten steht der Spiegel **F** fest; der Spiegel **B** ist beweglich, er steht senkrecht auf einem Metallstreifen BPV, der als Radius verschoben wird, indem man ihn bei K mit der linken Hand erfaßt. Sein Ende trägt an der Innenseite einer rechteckigen Öffnung den Vernier V. Der Spiegel F ist nur halb so hoch wie B. (Es ist nämlich nur die untere Hälfte der Glasplatte mit Amalgam belegt.) Um sicher zu sein, daß man bei der Beobachtung die Lage der über den festen Spiegel hingehenden Visierlinie OM nicht verändere, so wie auch zum deutlicheren Sehen, ist frei über der Ebene des Sextanten, ihr parallel, ein kleines Fernrohr OA in solcher Höhe bei W befestigt, daß seine Achse OA den oberen Rand des Spiegels F streift. Der Träger der beweglichen Visierlinie, also der radiale Metallstreifen BP, heißt Alidade.*) Sie kann sich ungehindert unter dem Fernrohr hin und her bewegen. Das dem ankommenden Lichte zugewandte Glas (Objektivglas) des

*) Alidade ist das arabische al-'idâda, das Lineal, Absehelineal. Spanier schrieben alhidada. Zeitschrift für Vermessungswesen, 12. Band, 1883.

Fernrohrs nimmt in seiner unteren Hälfte das zweimal gespiegelte, in seiner oberen Hälfte das gerade einfallende Licht auf, und der Beobachter sieht, wenn er den beweglichen Spiegel mittels der Alidade in die richtige Stellung gebracht hat, in dem hier gewählten Beispiele den Stern als einen glänzenden Punkt des Mondrandes, weil ja die Strahlen in derselben Richtung ins Auge kommen sollen. Liest man nun auf dem Limbus die Stellung des Nullpunktes 0 der



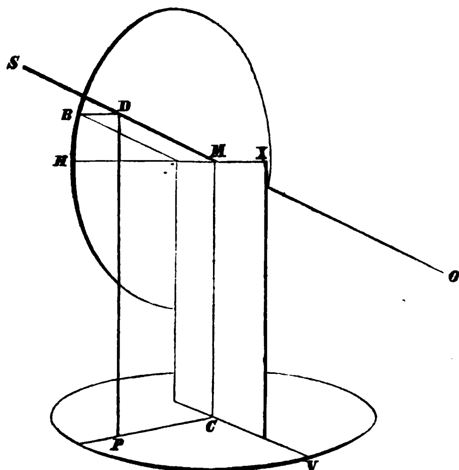
Figur 16. Der Sextant.
(Die Längen in $^1/_3$ der natürlichen Größe.)

Alidade (bei V) ab, so erfährt man die Größe des Winkel EBC$=\gamma$; denn der Anfangspunkt der Hauptteilung liegt ebenso weit vor dem Radius BE, welcher der Richtung des festen Spiegels, FC, parallel läuft, wie der Verniernullpunkt vor dem Schenkel BC. Der gesuchte Winkel MOS ist, wie bewiesen, das Doppelte von γ. Um diese steten Multiplikationen mit 2 zu sparen, ist auf dem Limbus bei dem Teilstrich, an welchem 60° stehen müßte, 120° geschrieben, bei 45° steht 90° u. s. f. stets das Doppelte der eigentlichen Zahl, so daß das Abgelesene die Größe des gesuchten Winkels x ist. Das Ablesen am Vernier geschieht mit der Lupe L, deren Arm sich um

Ankeruhr, d = 46^{mm}; Abstand x zwischen 4,86^{m} und 5,02^{m},
Damen-Cylinderuhr, d = 32^{mm}; „ „ 3,38^{m} „ 3,49^{m}.

Die Herren-Taschenuhr erhält erst in einer Entfernung von fünf Metern die scheinbare Größe der Sonne (wie wir sie an einem Sommerabende untergehen sehen) — und, $3^1/_8$ Meter weit vom Auge, kann die kleine Damenuhr die Sonne verdecken.

23. Der Theodolit.*) Mit einem Theodoliten bestimmt man die vom Standorte nach einem Punkte gehende Richtung in ihrer Lage gegen eine feste Grundebene. Diese Bestimmung wird in der



Figur 18. Hilfsfigur zum Theodoliten.

durch die Figur 18 veranschaulichten Weise zur Ausführung gebracht. OS ist die vom Auge O nach einem deutlich sichtbaren Punkte gehende Richtung; die feste Grundebene ist der horizontal liegende

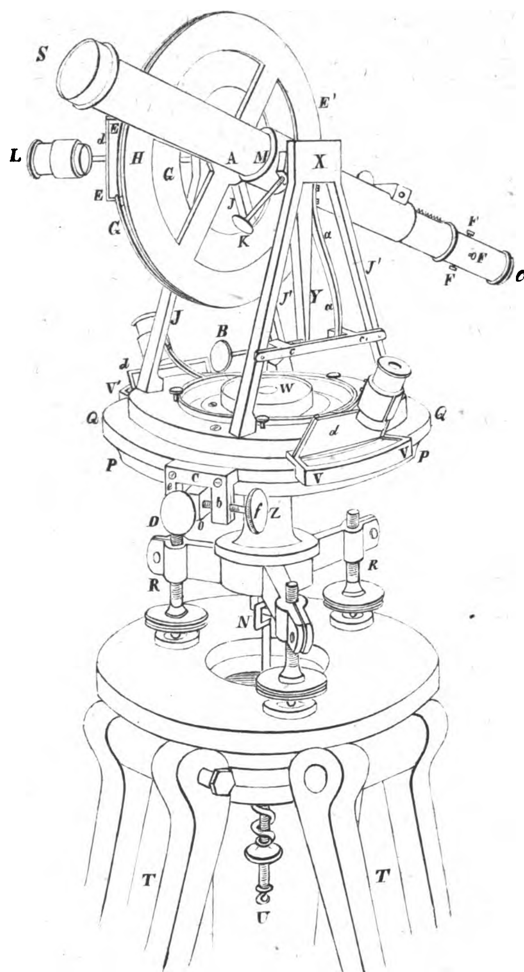
*) Instrument und Name kommen zuerst im 16. Jahrhundert vor und zwar in England, wo Leonard Digges in seinem Werke über angewandte Geometrie (London 1571) Kap. 27 von „the composition of the instrument called Theodelitus" handelt, und William Bourne in seinem Buche „treasure for travailers" (1578) dasselbe Instrument in einfachster Gestalt (nur die um den Mittelpunkt des eingeteilten Kreises drehbare Alidade mit Sehspalten — das Fernrohr wurde erst 1609 erfunden) anfangs alydeday, dann aber mit Versetzung der Buchstaben stets athelida nennt. Weigand spricht in seinem Deutschen Wörterbuche (2. Aufl. 1876) die glückliche Vermutung aus, daß das Wort theodelite durch Verschmelzung mit dem Artikel the entstanden sei. Dies ist, nach dem Urteile eines so kompetenten Kenners des Altenglischen, wie Prof. Hugo Bieling, „nach den Vorgängen in der älteren englischen Sprache bei der schwankenden englischen Orthographie des 16. Jahrhunderts, namentlich gegenüber einem so fremdartigen arabischen Worte sprachlich durchaus möglich." (Über die Verschmelzung des englischen Artikels und des als Artikel gebrauchten that, s. Mätzner, englische Grammatik I, S. 340 der 3. Aufl.) — Die Fran-

Kreis VCP, dessen Mittelpunkt C sich senkrecht unter einem Punkte M der Richtung OS befindet. Durch diesen Punkt M geht die horizontale Linie AX rechtwinklig gegen OS, und auf ihr steht in geringer Entfernung von OS mit seinem Mittelpunkte A der Kreis AHB senkrecht. Sein Radius AB, welchen man als Durchschnittslinie mittels der Ebene SMA erhält, läuft wegen der rechten Winkel BAM und SMX mit OS parallel; und darum wird die Neigung der Richtung OS gegen die Horizontalfläche angegeben durch den Winkel BAH, dessen Schenkel AH eine feste horizontale Lage hat. Nach welcher Himmelsgegend aber die Richtung OS sich wendet, erfährt man entweder durch die Projektion von MD auf den Grundkreis, CP, oder, was für die Handhabung des Instruments bequemer ist, durch die Projektion der Querachse AX, CV, welche mit CP einen rechten Winkel bildet; oder auch durch einen andern Radius, welcher mit CP einen stumpfen, aber unveränderlichen Winkel einschließt.

Durch diese in der Hilfsfigur zusammengestellten Hauptteile eines Theodoliten wird man sich in der Figur 19*) nun mit geringerer Mühe zurecht finden können. Die ihrer Lage nach zu bestimmende Richtung ist die optische Achse eines kleinen astronomischen Fernrohrs OS. Damit dieselbe bei der Beobachtung sich völlig scharf markiere, sind in seinem Okularstück bei FF (fast am Ende der Brennweite der Okularlinse) zwei sich rechtwinklig schneidende Spinnewebfäden angebracht. Der Ring, über welchen sie gespannt sind, wird durch 4 Stellschrauben (F) so gehalten, daß ihr Kreuzpunkt genau in der optischen Achse sich befindet. Diese feinen Fäden, von denen der eine wagerecht liegt, erscheinen, wenn man durch die kleine Öffnung bei O ins Fernrohr sieht, durch die Lupe (Okularglas) viel stärker. Auf der Querachse, deren Mittellinie AX genau durch den Punkt M der optischen Achse OS des Fernrohrs geht, sitzt das Fernrohr und der Höhenkreis AH fest. Der Nullpunkt seiner Kreisteilung, die nach unten und oben bis 90° geht, liegt auf dem in Figur 18 mit AB bezeichneten Radius; er befindet sich also, da der Höhenkreis den auf- und niedergehenden Bewegungen des Fernrohrs folgt, stets neben der Richtung OS; so daß beim Aufrichten des Fernrohrs die nach unten fortschreitenden Zahlen der Gradeinteilung an den in der Mitte (links von H) liegenden Nullpunkt des Verniers EE herantreten und die Größe des Höhenwinkels angeben. Derselbe wird durch die von einem Arme

zosen scheinen théodélite wohlklingender in théodolite umgeformt zu haben. — K. Zöppritz in der Zeitschrift für Vermessungswesen (Stuttgart, Konrad Wittwer) 12. Band, 1883, S. 321. — Ableitungen des Wortes (die sämtlich unzutreffend sind) wurden zusammengestellt in Poggendorffs Annalen der Physik. 133. Band, 1868, S. 192 und 349.

*) Die Zeichnung ist nach einem vom Mechanikus Aug. Örtling in Berlin gefertigten Theodoliten (einfacher Konstruktion) in ein Drittel der natürlichen Größe perspektivisch entworfen.



Figur 19. Theodolit.
(1/3 der natürlichen Größe.)

gehaltene Lupe L (in Graden und ganzen Minuten) abgelesen. Ein ebensolcher Vernier befindet sich auf der gerade gegenüber liegenden Seite des Höhenkreises (bei E'), damit durch die doppelte Ablesung Fehler, welche durch etwaige Excentricität des Verniers und der Höhenkreisteilung entstehen (auch kleine Fehler der Graduierung), herausgeschafft werden.*) Beide Vernierstreifen trägt ein Kreisring G G, der (des Schutzes wegen) doppelt so breit, wie der von 4 Speichen gehaltene Ring H des Höhenkreises ist. Er sitzt an den Füßen JJ des Achsenträgers unverrückbar fest und hat neben jedem Vernier einen schmalen rechteckigen Ausschnitt, der ein Stück der Höhenkreisteilung sehen läßt. Mit den 4 Füßen J, J und J', J' steht das Fernrohr auf einem starken Messingringe. Derselbe ist angeschraubt an die Kreisscheibe QQ, welche mit einem übergreifenden Randstreifen wie ein Deckel auf dem Grundkreise PP ruht. Diese Kreisscheibe Q ist also, als Träger der beweglichen Visierlinie OS, die Alidade. An ihr haftet in dem Ansatzstück VV (und ebenso gerade gegenüber bei V') der Vernier an einer Stelle, wo ein rechteckiger Streifen aus der Kreisscheibe herausgenommen ist. Hier sieht man mittels der Lupe durch eine zum Schutze eingesetzte Glasplatte den (halbe Minuten angebenden) Vernier und eine entsprechend große Strecke des (in Drittelgrade geteilten) Limbus auf dem Grundkreise PP, bei dem die Gradzahlen von 0 bis 360° in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers eingraviert sind. Auf die feinen Teilstriche werfen die schräg gestellten Blendrahmen dd aus Milchglas das Tageslicht, so daß die zarten schwarzen Linien auf dem versilberten Randstreifen klar erkannt werden können. Der Limbuskreis PP wird durch den auf einem Dreifuße RR ruhenden Hohlcylinder Z getragen. In ihm steckt der Centralzapfen, der unter dem Mittelpunkte am Alidadenkreise QQ festsitzt, so daß die nach oben gerichtete Verlängerung seiner Mittellinie durch den Punkt M geht. Der Centralzapfen ist die Vertikalachse des Theodoliten. Der Punkt M liegt also in drei Achsen, in der optischen Achse OS des Fernrohrs und in beiden Achsen des Theodoliten, in der Vertikalachse MZ und in der Querachse AX. Demnach ist M, der Mittelpunkt des

*) Ist das Zifferblatt einer Uhr nicht vollkommen konzentrisch mit dem Kreise, welchen der große Zeiger beschreibt, so sind derartige Fehler da. Liegt der Zeigerdrehpunkt z. B. auf dem von 12 nach 6 gehenden Durchmesser sehr wenig unterhalb des Mittelpunktes der Minutenteilung, so wird man, wenn der große Zeiger genau rechtwinklig auf jenem Durchmesser steht, etwa $15^1/_4$ Minuten und drüben $44^3/_4$ Minuten ablesen, deren Differenz nicht 30 Minuten beträgt. Solche Abweichungen verbreiten sich dann aber über das ganze Zifferblatt; sie werden nur auf jener Centrale der beiden excentrischen Kreise zu Null. Man erkennt die bei den meisten Uhren vorkommende Excentricität an dem scheinbar unregelmäßigen Laufe des Sekundenzeigers. — Könnte man nun durch den rückwärts verlängerten großen Zeiger auch am Zifferblatte, wie beim Theodoliten durch die gegenüberstehenden Verniers, auf beiden Seiten zugleich ablesen, so würde man in jenem Beispiele durch das arithmetische Mittel zwischen $15^1/_4$ Minuten und $44^3/_4 - 30 = 14^3/_4$ Minuten die wahre Größe, 15 Minuten, erhalten.

Theodoliten, derjenige Punkt, für welchen die mit dem Instrumente gemachten Beobachtungen gelten.

Man stellt den Theodoliten auf ein Stativ TT und läßt ihn von einer mitten durch eine Zwischenplatte hindurchgehenden Schraubenstange UN mit dem Haken N an einer Öse festhalten, indem man durch Anziehen einer Schraubenmutter die den unteren Teil der Stange umgebende Sprungfeder zusammendrückt, bis sie eine genügende Spannkraft ausübt. An das Häkchen U wird mit einer Schnur ein unten zugespitzter Messingcylinder als Lot gehängt, wenn man den Punkt des Erdbodens bestimmen will, über welchem die Beobachtung angestellt wird. Um den Grundkreis PP in vollkommen horizontale Lage zu bringen, beobachtet man die auf dem Alidadenkreise QQ stehende Dosenlibelle W. Jedes der drei Beine des Stativs ist mit der aus mehreren Holzlagen bestehenden Deckplatte durch ein Charnier (wie ein Zirkelkopf) verbunden. Dadurch kann man das Ausspreizen der Beine so lange verändern, bis die zuerst am Rande der Dose stehende Blase sich zu bewegen anfängt. Durch Umdrehen der auf kleinen Messingscheiben stehenden Stellschrauben R verbessert man dann die Lage des Grundkreises so lange, bis die Blase genau in der Mitte der Libelle ruhig stehen bleibt.

Mitten zwischen den vorderen Stützen J′J′ des Fernrohrträgers hängt ein Arm Y herab, welcher nach unten dünner wird; sein oberes Ende besteht aus einem Ringe, welcher lose auf der Querachse AX des Fernrohrs sitzt. Dieser Ring wird links unten von der Klemmschraube K durchbohrt. Dreht man diese, während man das Fernrohr auf den zu beobachtenden Gegenstand gerichtet hält, mit der linken Hand hinein, so erreicht ihr Ende die Querachse und es wird die der Schraube gegenüberstehende Seite des Ringes an die Querachse gepreßt. Dadurch bleibt das Fernrohr in dieser Höhe stehen. Denn die an dem oberen Ende des Armes Y befestigte Feder a drückt das untere Ende desselben gegen die Schraube B, welche von dem Querstück cc_1 getragen wird. Da Feder und Schraube den Arm Y halten, so steht auch die durch die Klemmschraube K mit ihm verbundene Querachse AX, also auch das Fernrohr, in dieser Höhe still. Aber es kann sich noch nach rechts und links wenden, weil der Alidadenkreis QQ noch freie Bewegung um den Centralzapfen hat. An den über den Grundkreis PP übergreifenden Rand des Alidadenkreises QQ ist ein zweimal rechtwinklig umgebogenes Messingstück C angeschraubt. Zwischen seinen abwärts gehenden Teilen b und e sieht man das Ende o eines starken Armes, der unter dem Grundkreise hin einem seiner Radien parallel geht, und am andern Ende mit einem Ringe den Cylinder Z umspannt, gerade wie der Arm Y die Querachse AX. Der Arm o ist seiner ganzen Länge nach durchbohrt, und die Wand dieser Höhlung hat am Ende o ein Schraubengewinde; durch dasselbe geht die Druckschraube D mit ihrer langen Spindel, welche nahe beim Cylinder Z

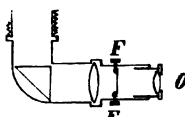
endigt. Erfaßt man, während man durch das Fernrohr nach dem zu beobachtenden Punkte sieht, mit der Linken die Schraube D, und dreht sie hinein, so stößt ihr Fuß gegen den Cylinder Z und zieht den Ring des Armes o fest an die entgegengesetzte Seite des Cylinders Z heran. Da infolgedessen der Arm o sich nicht mehr bewegen kann, so steht nun auch das Messingstück C fest; denn ebenso wie die Feder a den Arm Y gegen die Schraube B drückt, preßt eine am Ring-Ende des Armes o befestigte und den Schenkel e erreichende Feder (in der Figur nicht sichtbar) die durch den Schenkel b gehende Schraube f gegen den festgestellten Arm o. Mit dem Messingstück C steht nun auch der Alidadenkreis Q, also der Träger der Querachse, still.

Durch das Anziehen der Druckschrauben D und K ist aber erst die rohe Einstellung des Fernrohrs vollzogen. Seine Lage muß nun noch so verbessert werden, daß der anvisierte Punkt dem Beobachter genau durch den Schnittpunkt der Spinnwebfäden FF gedeckt wird. Ist das Fernrohr ein wenig zu hoch gerichtet, so erfaßt man mit der Linken die Korrektionsschraube B und dreht sie hinein in die hinter c sitzende Schraubenmutter. Dadurch drängt man das untere Ende des Armes Y nach rechts und hebt folglich das Okular O des Fernrohrs sehr langsam, bis das Bild des Visierpunktes den Querfaden des Fadenkreuzes erreicht hat. Geht aber bei der vorläufigen Einstellung die Achse des Fernrohrs dicht unter dem Beobachtungspunkt fort, so dreht man B nach außen; der Arm Y folgt dem zurückweichenden Ende der Schraube B, getrieben durch die hinter c_1 anstemmende Feder a, und so steigt das Objektiv-Ende S des Fernrohres sehr langsam in die Höhe. Ist die feine Einstellung am Querfaden sorgfältig gemacht, so greift man nach der Korrektionsschraube f. Dreht man den Kopf f in der Richtung herum, daß die Schraube in b eindringen müßte, so erteilt man dadurch der Schraubenmutter b die fortschreitende Bewegung, weil der Fuß der Schraubenspindel sich gegen den festen Arm o stützt; der Alidadenkreis dreht sich sehr langsam auf dem Grundkreise in dem der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne, und das Objektiv des Fernrohrs geht ein wenig nach der linken Hand des Beobachters. Dabei sieht dieser das Bild des Visierpunktes am Querfaden hingehen. Sobald dasselbe beim Schnittpunkte der Fäden angelangt ist, läßt man die Mikrometerschraube f los. Zeigte nach der Feststellung das Fernrohr beim Beobachtungspunkte links vorbei, so dreht man die Korrektionsschraube f links herum; dann erweitert die Spannkraft der Feder den Raum zwischen dem Schenkel e und dem festgeklemmten Arme o, und bewegt dadurch den Alidadenkreis so wie der Uhrzeiger läuft; das Objektiv S des Fernrohres geht nach rechts. Befindet sich das Bild des Visierpunktes haarscharf hinter dem Schnittpunkt der Fäden, so hat die optische Achse OS des Fernrohrs genau die Lage der ihrer Richtung nach zu bestimmenden Linie

angenommen, und nun liest man am Höhenkreise und am Grundkreise an beiden Verniers die Angaben ab.

Die wichtigste Anwendung findet der Theodolit bei Lösung der Aufgabe: die vom Standorte nach 2 fernen festen Punkten gehenden Richtungen auf die Ebene des Horizontes zu projizieren und den Winkel zu bestimmen, welchen diese Projektionen am Standorte einschließen. Man visiert zuerst nach dem rechts erblickten Punkte und liest auf dem Horizontalkreise ab α_1 (Grade, Minuten und Sekunden); dann stellt man das Fernrohr auf den links liegenden Punkt ein; die nun erhaltene Zahl α_2 ist kleiner als α_1, weil die Gradzahlen auf dem Limbus in der Richtung wie die Uhrzeiger laufen. $\alpha_1 - \alpha_2 = x$ ist dann der gesuchte Winkel zwischen den Horizontprojektionen der beiden Visierlinien.

Will man Sterne in der Umgebung des Zenits beobachten, so ersetzt man das Zugrohr des Fernrohrs durch ein anderes, welches rechtwinklig umgebogen ist. Dasselbe ist in Figur 20 im Längsdurchschnitt gezeichnet. In dem Knie befindet sich ein kurzes Glasprisma, dessen Grundfläche ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist, so angebracht, daß die Hypotenusenfläche der äußeren Rundung zunächst ist. Die von der Objektivlinse kommenden Lichtstrahlen treten in die erste Kathetenfläche des Prismas ein, werden an der Hypotenusenfläche total reflektiert und gehen aus der andern Kathetenfläche hinaus durch die Sammellinse zur Okularlupe. Bei dieser rechtwinkligen Spiegelung kann man sehr hoch stehende Sterne in gewöhnlicher Haltung des Kopfes bequem beobachten. Mit solchem Okularstück versehen, heißt das Fernrohr ein gebrochenes.



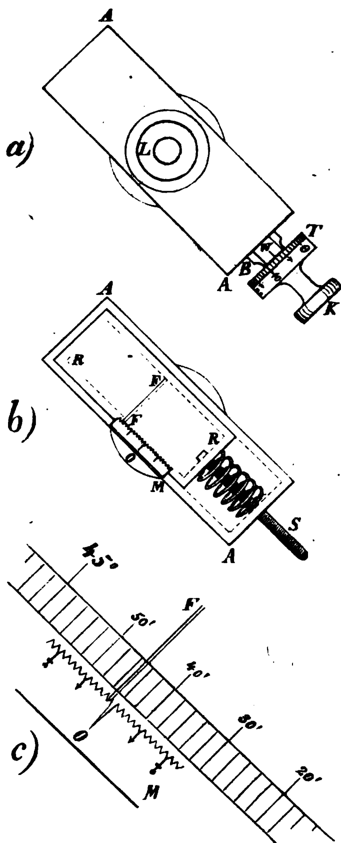
Figur 20.
Gebrochenes Okularstück eines Fernrohrs zur Beobachtung der Zenitsterne.

24. Die Mikrometer-Ablesung. Bei großen Theodoliten wendet man jetzt statt der Verniers die Ablesung der Bogensekunden durch Mikrometer an.

In einem Mikroskope befindet sich rechtwinklig zur optischen Achse an der Stelle, wo das Objektivglas das Bild entstehen läßt, ein längliches messingenes Kästchen A. (Figur 21a zeigt das Mikroskop, in Richtung seiner Achse gesehen.) In dem Kästchen läßt sich ein rechteckiger Rahmen R (Figur b) sehr langsam hin und her bewegen mittels einer Schraube S von so feinem Gewinde, daß auf eine Strecke von 1^{mm} 4 Windungen kommen. Beim Halbierungspunkte der längeren Rechteckseiten sind dicht bei einander zwei parallele Fäden FF hinübergespannt. Der Rahmen gleitet hin unmittelbar unter einem geschwärzten Streifen M, der wie eine feine Säge aussieht. In seiner Mitte ist ein tiefer Einschnitt O der feste Nullpunkt. (Er entspricht dem Nullpunkte des Verniers.) Eine

Sprungfeder windet sich um die Schraubenspindel und drängt den Rahmen fortwährend nach der dem Schraubenkopfe abgewandten Seite hin. Das Kopfstück KB (Figur a) ist die Schraubenmutter, welche, wenn man sie auf die Spindel aufdreht, diese heraustreten, und damit den Rahmen herankommen läßt.

Vier solche Mikroskope, wagerecht von starken Armen, die an den Pfeilern festsitzen, unverrückbar gehalten, befinden sich neben jedem der beiden Höhenkreise eines Meridianfernrohrs. Außerdem ist angebracht ein Hilfsmikroskop mit schwächerer Vergrößerung, welches zur rohen Einstellung dient. Bei dem größeren Meridianfernrohre der Berliner Sternwarte hat die Kreisteilung einen Durchmesser von 96,5^{cm}, von Strich zu Strich sind 2 Bogenminuten. An jedem Ende der Querachse, welche eine mit dem Fernrohre inwendig in freier Verbindung stehende starke Röhre ist, brennt eine außen zu verhüllende Gasflamme. Ihr Licht gelangt durch innen passend angebrachte Spiegel sowohl zu den Fäden des Okulars, als auch zu jedem Mikroskope. Sieht man in eines derselben hinein (seine Lupe L erscheint in Figur a projiziert auf die Deckplatte des Kästchens A), so erblickt man in 33facher Vergrößerung ein Stück der Kreisteilung, wie es Figur c (in $^1/_5$ der Größe) darstellt.*) Das Kästchen A steht so, daß seine Längsseiten derjenigen Tangente des Höhenkreises parallel laufen, auf deren Berührungspunkt das Mikroskop weist. Darum erscheint das Fadenpaar F den Minutenstrichen der Kreisteilung parallel.



Figur 21. Die Mikrometer-Ablesung.

Um nun zu erfahren, welche Stelle des Höhenkreises bei der gegenwärtigen Richtung des Fernrohrs an den festen Nullpunkt O der Zählmarke M herangetreten ist, liest man zunächst ab 44° 44′. Dann dreht man den Schraubenkopf K rechts herum. Dadurch kommt das Fadenpaar F heran. Befindet es sich beim Nullpunkte O

*) Siehe die Note am Ende von Nr. 21.

(Figur b und c), so steht der mit Null bezeichnete Strich der mit dem Kopfe KB herumgehenden Trommel T (Figur a) genau an einer festen Marke. Dieselbe ist ein Strich auf der Deckfläche eines Messingwürfels W, der an der Seitenwand des Kastens A angelötet sitzt und mit der gegenüberliegenden oberen Kante den Rand der Trommel T berührt. Sie ist ein Cylinder von 3,3 cm Durchmesser; ihr 5 mm hoher versilberter Mantel ist in 60 gleiche Teile geteilt. Hat man den Rahmen R so weit geführt, daß man einen Minutenstrich in der Mitte zwischen den Parallelfäden F erblickt, und dreht man nun die Trommel mittels des Knopfes K zweimal herum, so kommt dadurch das Fadenpaar in dem Bilde der Kreisteilung, welches durch das Objektivglas entsteht, hinüber zum nächsten Minutenstrich. Da nun der Abstand der Teilstriche 2 Minuten beträgt, so führt 1 Rundgang der Trommel das Fadenpaar eine Bogenminute weit;*) die 60 Striche auf der Trommel geben also Sekunden an. Endlich läßt die Marke auf dem Würfel W durch den Abstand, welchen die ihr nächsten Trommelstriche bei irgend einer Stellung eingenommen haben, die Zehntelsekunden nach dem Augenmaße schätzen. Um demnach den Überschuß über jene 44° 44′ zu erfahren, braucht man nur des Fadenpaar auf den Teilstrich 44′ einzustellen; dann liest man auf der Trommel die zu jenem Höhenwinkel des Fernrohrs noch gehörige Zahl der Bogensekunden (7,0) ab.

25. Der Chronograph. In dem wichtigsten Fernrohre der Astronomen, dem Passageninstrument (Meridianrohr), sind im Okularstücke rechtwinklig zum Horizontalfaden 7 oder mehr Fäden ausgespannt. Damit dieselben beim Beobachten sich vom Nachthimmel deutlich abheben, werden sie dadurch erleuchtet, daß das Licht der in jeder Verlängerung der Querachse des Fernrohrs (an der Wand) befindlichen, übrigens verhüllten, Flamme durch die hohle Querachse in das Innere des Fernrohrs fällt und durch Spiegelung zu ihnen gelangt. Ein Stern wird bei seiner Bewegung vom Auf- zum Untergange durch das Gesichtsfeld des Fernrohrs hinziehen, wenn das Rohr vorher mittels der Klemmschraube unter einem Neigungswinkel festgestellt ist, welcher der Höhe des gewählten Sternes für die Zeit der Beobachtung entspricht. Es kommt dem Astronomen darauf an, die Augenblicke zu notieren, in welchen der Stern die 7 Fäden passiert. Eigentlich liegt ihm nur an dem Durchgangsmoment beim Mittelfaden; er beobachtet aber alle 7 zur Kontrolle für die Hauptbeobachtung. Dies ist besonders deshalb notwendig, weil dem Fernrohrbilde des Sternes eine zitternde und springende Bewegung erteilt wird durch die atmosphärische Luft, indem sich

*) Bei jeder Umdrehung des Schraubenkopfes K überschreitet das Fadenpaar einen Zahn der Säge (Figur c); man kann also an ihren Zacken die ganze Zahl der ausgeführten Umdrehungen ablesen.

draußen warme und kalte Luftmassen mischen, welche die vom Sterne kommenden Lichtstrahlen von ihrer Richtung verschieden ablenken.

Um nun diese Durchgangsaugenblicke mit möglichster Schärfe zu erhalten, notiert man sie (seit 1858*) mittels eines elektrischen Registrierapparates.**)

Der Chronograph ist ein doppelter Morsescher Telegraph; den einen Schreibstift führt das Sekundenpendel der Uhr, den andern, welcher gegen denselben Papierstreifen stößt, der Astronom.

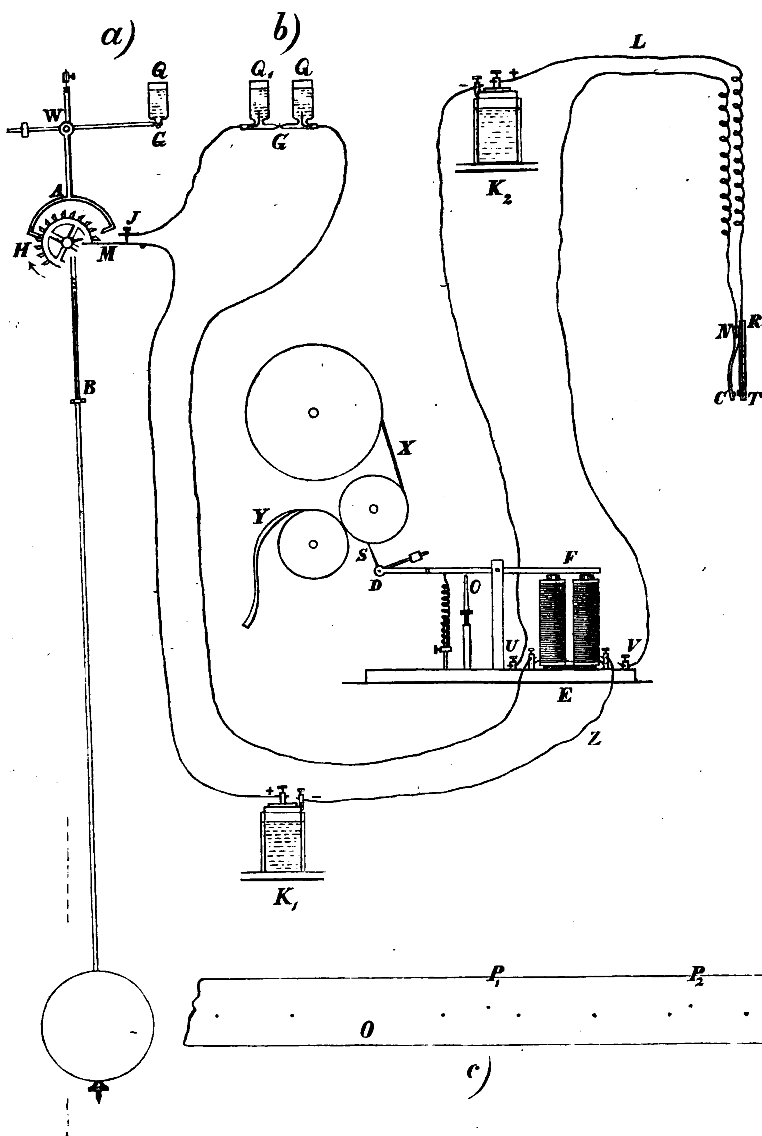
In dem Gehäuse einer (wegen Gleichmäßigkeit der Temperatur im Keller aufgestellten) Hauptuhr der Sternwarte***) sind zwei kleine, gleich hoch mit Quecksilber gefüllte Glasbehälter (Q_1 und Q in Figur 22b) mit zugespitzten Querröhren angebracht, aus denen das Quecksilber seitwärts in zwei feinen Strahlen ausfließen würde, wenn nicht die Mündungen der Ausflußröhrchen in unmittelbarer Nähe einander gerade entgegengewandt wären, so daß mit gleichem Druck jeder Strahl den andern am Herausfallen hindert. Auf diese Weise wird hier eine elektrisch leitende Verbindung zwischen beiden Gefäßen durch das zur Berührung kommende Quecksilber hergestellt. Der Quecksilberfaden ist in gleicher Höhe und parallel mit der Ankerwelle der Uhr. Die Figur 22a zeigt oben neben dem großen Pendel das eine der beiden Quecksilbergefäße, Q, noch einmal; das andere, Q_1, ist hier fortgelassen, weil Q von ihm verdeckt werden würde. Die Ankerwelle erscheint, da unser Standpunkt gerade vor dem Zifferblatte der Uhr ist, verkürzt zu dem kleinen (inneren) Kreise W. Die hinter dem Ankerstiel WA befindliche Stange WB bedeutet die unten das Sekundenpendel erfassende Gabel. Auf der Ankerwelle W ist ein 8^{cm} langer metallener, mit Gegengewicht versehener Querarm befestigt, der bis dicht an die Mündungen der Quecksilber-Glasröhrchen hinüberragt und hier ein äußerst dünnes, 1^{mm} breites Glimmerblättchen G trägt. Dasselbe durchschneidet beim Auf- und Niederschaukeln den Quecksilberfaden (Figur b) jedesmal, wenn das Sekundenpendel die Lotlinie passiert, also sich am schnellsten bewegt.†) Sofort fließt das

*) Der erste zweckmäßige Chronograph ist um 1848 von den amerikanischen Astronomen Bond und Walker hergestellt worden.

**) Die Beobachtung nach der „Auge- und Hand-Methode" ist sicherer und bequemer, als die frühere „Auge und Ohr-Methode." Bei dieser mußte man für die Durchgangsaugenblicke nach den gehörten Pendelschlägen die Zehntelsekunden schätzen und aufschreiben, dabei weiterzählen, schließlich zum Sekundenzeiger der Pendeluhr sehen, um zu prüfen, ob man im Verlaufe des ganzen Sterndurchganges sich auch nicht verzählt habe. Bei der Auge- und Hand-Methode kann der Beobachter seine Aufmerksamkeit ungeteilt auf die Erscheinung selbst verwenden und in viel rascherer Folge Notierungen vornehmen.

***) Die Normaluhr verwendet man nicht dazu, weil das Schließen eines elektrischen Stromes nicht ohne Einfluß auf den Gang ist.

†) Beim Trennen des Fadens darf durch den galvanischen Strom nicht Quecksilber verbrennen, weil die Dämpfe dem Werke der Uhr höchst nachteilig sein würden. Deshalb ist ein kleines, mit sehr verdünnter Schwefelsäure gefülltes Fläschchen, in welches zwei haarfeine Platindrähte tauchen, in den Strom eingeschaltet.



Figur 22. Der Chronograph.

Quecksilber wieder zusammen und schließt von neuem den elektischen Strom. Von einer konstanten Kette K_1 geht derselbe durch den Stahlstreifen M in die Schraube J, gegen welche dieser schwach federt, dann in das Quecksilbergefäß Q_1, durch den nicht unterbrochenen Quecksilberfaden in das andere Gefäß Q, aus ihm durch den Leitungsdraht in das Zimmer, in welchem der Morsesche Apparat ES steht, umkreist dessen weiches Eisen und kehrt durch die Leitung Z zum andern Pole der Kette K_1 zurück. Der entstehende Magnetismus zieht den eisernen Hebelarm F nieder, und es stößt der Schreibstift S gegen den auf der Walze dort über einer Furche hohl liegenden Papierstreifen XY. Damit aber bei dem Fortrücken des Streifens der spitze Stahlstift nicht einen Strich, sondern einen scharfen Punkt mache, sitzt er am Ende einer Achse, die quer durch das gabelförmige Ende des Ankerhebels FD geht, und mit einem vom Halbierungspunkte abgehenden Arme einen kleinen Messingcylinder als hinabziehendes Gewicht trägt. Derselbe wird gehoben, wenn die Nadel bei noch geschlossenem Strome am Papier haftend, mitläuft. Nun durchschneidet das Glimmerblättchen den Quecksilberfaden; der Magnetismus in E erlischt, die Sprungfeder reißt das Hebelende D hinab bis zur Gegenstütze O und das Gewichtchen läßt die Nadel in die fast senkrechte Ruhelage zurückfallen. Gleich darauf erfolgt der nächste Stich. So wird durch das Pendel auf dem Papierstreifen in jeder Sekunde ein Punkt markiert (Figur 22c). Damit man aber in der langen Punktreihe sehen könne, wo eine Minute anfängt, bleibt immer der 60. Stich aus. Dazu ist (Figur a) auf die Achse des Hemmungsrades H, von dessen 30 Zähnen einer nach dem andern gegen ein Ende des an der Welle W sitzenden Ankers A stößt, ein kleiner Messingarm gesteckt. Derselbe ist nach 59 Sekunden dem Stahlstreifen M sehr nahe und biegt beim Fortgehen ihn von der Schraube J ab, so daß wegen dieser nun vorhandenen Lücke der Strom ungeschlossen bleibt. Der Arm läßt den Stahlstreifen erst los, während der Quecksilberfaden zum 61. Male durchschnitten ist, so daß die Berührung bei J wieder stattfindet, wenn das 61. Zusammenfließen erfolgt.

Statt der Quecksilberbehälter QQ_1 wendet man auch zwei 15^{cm} lange, leicht federnde Messingstreifen an, die zu beiden Seiten des Pendels senkrecht herabhängen. Gegen den einen oder den andern stößt ein an der Pendelstange 14^{cm} unter dem Aufhängepunkte sitzender, nach rechts und links zeigender metallener Querstab, wenn das Pendel die größte Ausschlagsweite von $1{,}6^0$ fast erreicht hat, und stellt dadurch den Schluß der Kette her, deren Strom beim Aufhängepunkte in die stählerne Pendelstange eintritt und durch den berührten Messingstreifen zum Schreibapparate läuft. Um den 60. Stich zur Bezeichnung des Minutenanfangs auszulassen, bleibt die Kette von der 59. bis nach der 60. Berührung der Messingfedern auf einem Nebenwege dadurch geschlossen, daß der Stift auf der

Achse des Hemmungsrades H einen Stahlstreifen wie M so lange erfaßt und den beim Pendelaufhängepunkte in das messingene Uhrwerk geleiteten Strom durch diese Abzweigung fließend erhält.

Von einer zweiten Kette K_2 geht der eine Poldraht L in das Beobachtungszimmer und hängt, in Schraubenwindungen gebogen, von der Decke herab zur Seite des am Fernrohre stehenden Astronomen, so daß dieser die am Ende T befestigte Taste RT bequem ergreifen kann. Von N an läuft die Drahtleitung gewunden hinauf zur Decke, dann in das Zimmer des Morseschen Apparates zu dem unmittelbar hinter E stehenden zweiten Elektromagneten und von U zur Kette K_2 zurück. Jene Taste RT (in Seitenansicht gezeichnet) ist ein 10^{cm} langes und 2^{cm} breites Stück Elfenbein, für den Leitungsdraht der Länge nach durchbohrt; daran NC ein federnder Messingstreifen mit einem Stahlknopfe unter C, welcher der stählernen Befestigungsschraube T gegenübersteht. Die Taste nimmt der Beobachter in die Hand und drückt sie jedesmal, wenn der Stern einen der Vertikalfäden passiert, zusammen. Durch die Berührung der Knöpfe C und T ist die Leitung der Batterie K_2 geschlossen, und der zweite Schreibstift, in 1^{mm} Entfernung dem ersten genau zur Seite, drückt dann seinen Stich neben die entstehende Sekunden-Punktreihe.

Das durch ein großes Gewicht bewirkte Ablaufen des Papierstreifens XY wird durch einen Windfang gleichförmig gemacht. Je weniger man die Flügel desselben quer stellt, desto schneller wird der Streifen fortgezogen, und so kann man es dahin bringen, daß der Abstand je zweier Sekundenpunkte genau 1^{cm} wird. Durch Auflegen eines dünnen Glasplättchens, auf welchem eine Millimeterteilung mit dem Diamanten gezeichnet ist, kann dann der Astronom (später zu gelegener Zeit) nach der Stellung des durch ihn entstandenen Punktes die Zehntel-Sekunden ablesen und sogar Hundertstel-Sekunden schätzen. So fügt er, nach Figur 22c, für seinen Punkt P_1 zu den nach der Uhr des Beobachtungszimmers sogleich notierten Stunden und Minuten noch $1{,}60^s$ hinzu, für P_2 $4{,}27^s$ u. s. f. Für die gewöhnlichen Beobachtungen begnügt sich der Astronom mit Zehntel-Sekunden, und da können die Punkte der Sekundenreihe etwas näher zusammen stehen.

§ 4. Meridian und Pol an der Himmelskugel.

26. Die Himmelskugel. Die Beobachtung, daß man die Sterne beim Anblick des Himmelsgewölbes stets genau in derselben Gruppierung bei einander sieht, ruft die Vorstellung hervor, daß sie an dem Himmelsgewölbe haften (stellae fixae, Fixsterne) und durch langsame Umdrehung desselben die gemeinsame Bewegung vom Aufgange bis zum Untergange erhalten. Da man aber in derselben Nacht andere Sterne im Osten am Horizonte auftauchen sieht, so kann der gestirnte Himmel nicht eine Halbkugel sein; er muß sich

unter dem Horizonte fortsetzen und zu einer ganzen Kugel abrunden; denn wir sehen (wie in § 1 und 2 hervorgehoben wurde) nach einigen Monaten andere Gegenden des Sternhimmels, welche damals die ganze Nacht nicht über den Horizont heraufkamen.

Verlängern wir die in unserm Standpunkte auf der Ebene des Horizontes errichtete Vertikallinie (vergl. Nr. 2) nach unten, so trifft sie die Himmelskugel in einem zweiten Punkte, dem Nadir.

27. Die Höhe eines Sternes. Jede Ebene, welche die Vertikallinie in sich enthält, schneidet die Himmelskugel, da sie durch ihren Mittelpunkt geht, in einem größten Kreise. Jeder dieser Kreise steht auf dem Horizonte senkrecht, denn seine Ebene ist ja durch ein auf der Ebene des Horizontes stehendes Lot, die Vertikallinie, gelegt. Deswegen werden sie Vertikalkreise oder Höhenkreise genannt. Der Bogen eines solchen Kreises zwischen einem Punkte der Himmelskugel und dem Horizonte heißt die Höhe dieses Punktes.

28. Ermittelung der Mittagslinie. Man beschreibe auf einem starken Blatt Papier, welches über eine ebene Holzplatte PQ (Figur 23) gespannt ist, mit wenig (um 2 bis 4^{mm}) von einander verschiedenen Radien viele konzentrische Kreise. An einem sonnenhellen Sommertage lege man an einer freien Stelle des Gartens die Platte auf einen Tisch und bringe sie mittels einer Libelle in eine horizontale feste Lage. Dann stelle man in den gemeinsamen Mittelpunkt genau senkrecht auf dieser Ebene einen nicht feinen, aber scharf zugespitzten (5 bis 6 Centimeter langen) Stift, Z, z. B. den Messingfuß, welcher zum Tragen einer Magnetnadel bestimmt ist. Durch einen Nadelstich markiere man die Punkte (A, B, C), in welchen der Schatten der Spitze Z am Vormittage auf oder zwischen die Peripherien der Kreise fällt, und die (D, E, F), in welchen er sie in der entsprechenden Nachmittagsstunde durchstreicht.*) Dann ergiebt sich, daß die Halbierungspunkte (G, G′, H, H′ und J, J′) der von jedem Kreise abgegrenzten Bogen in der Verlängerung des durch den Punkt K gehenden Radius liegen; und das ist derjenige, auf welchen der Schatten des Stiftes fiel, als die Sonne mittags am höchsten stand.

*) In der angegebenen Weise wurde am 26. Juli (1870 in Berlin) die Schattenkurve aufgenommen; sie ist in dem dritten Teile ihrer Größe in Figur 23 perspektivisch abgezeichnet. Hier sind aber nur die drei Kreise dargestellt, welche der Schatten der $5{,}37^{cm}$ hohen Spitze um 8 Uhr, um 9 Uhr und um 10 Uhr traf. Das Original enthält viel mehr Kreisperipherien in absichtlich ungleichen Abständen. Als die beste Beobachtungszeit erwiesen sich die zusammengehörigen Stunden 9 bis 10 Uhr und 2 bis 3 Uhr, etwas weniger gut 8 bis 9 und 3 bis 4 Uhr, weil bei dem nun längeren Schatten der Schatten der Spitze nicht mehr sehr scharf war, jedoch noch so genau, daß die Reihe der Stiche die Kurve als eine völlig glatte gab. Wegen dieser Unsicherheit des Schattens darf man nicht einen zu hohen Stift nehmen. Jener $5{,}37^{cm}$ hohe Magnetnadelträger lieferte den Durchmesser des 8- und 4-Uhr-Kreises JJ′ = $16{,}3^{cm}$, den des 9- und 3-Uhr-Kreises HH′ = $11{,}9^{cm}$ (wohl gemerkt: am 26. Juli;

Der durch die Halbierungspunkte gehende Durchmesser, nach beiden Seiten verlängert, bestimmt in der Ebene des Horizontes eine Linie SN, welche Mittagslinie heißt.*)

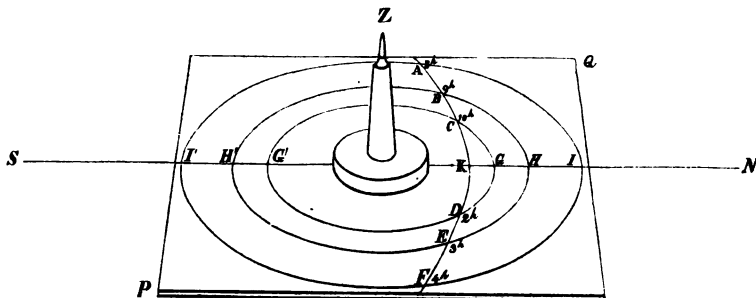
29. Der Meridian und der erste Vertikal. Die Mittagslinie trifft den Horizont im Nordpunkte (N) und im Südpunkte (S). (Nr. 3.)

---

denn jener wurde schon um 1mm, dieser um 3/4mm größer, als der am vorhergehenden Tage); sie sind also so lang, daß die Richtung der Mittagslinie ganz sicher zu erkennen ist. Viel kürzer muß wegen der Schattenlänge der Stift gewählt werden, wenn die Kurve an einem Herbst- oder Wintertage aufgenommen werden soll. — Ganz zu verwerfen ist die Mittagszeit; denn den Teil der Kurve, welcher von 10 1/2 bis 1 1/2 Uhr beschrieben wird, schneiden die konzentrischen Kreise unter sehr spitzen Winkeln, so daß die Lage der Durchschnittspunkte unsicher angegeben wird. — Ein einzelner Kreis genügt aber nicht; nicht allein wegen der durch den Halbschatten leicht entstehenden Markierungsfehler — die sich um so besser ausgleichen, je mehr Bogen halbiert werden — sondern auch darum, weil man befürchten muß, daß nachmittags durch vorüberziehende Wolken die einer einzelnen Vormittagsbeobachtung entsprechende ausfallen kann. Das ganze Verfahren zur Bestimmung des Punktes K ist darum anzustellen, weil niemand annehmen darf, daß die Sonne gerade in dem Augenblicke am höchsten steht, wenn beide Zeiger seiner Uhr auf 12 weisen. Hat man bei jedem Stiche die Beobachtungszeit notiert, so tritt aus je zwei gleich weit um 12 Uhr liegenden Zeitpunkten durch ihre stets übereinstimmende Abweichung von der zugehörigen Kreisperipherie die Abweichung der benutzten Uhr von wahrer Sonnenzeit deutlich hervor. — Über die Gestalt der Schattenkurve wird in Nr. 76 (Frage 2) gehandelt.

*) Man fixiert die gefundene Mittagslinie, wenn man die Aufnahme über einer festliegenden Steinplatte angestellt hat, durch Einreißen auf dieser, und in jedem andern Falle durch Marken an festen Gegenständen, indem man in den Endpunkten J und J' des erhaltenen Durchmessers Nadeln senkrecht steckt, dann von J nach J' horizontal visiert und einem Gehilfen die Stelle der anzubringenden Marke durch den Zuruf „mehr rechts" oder „mehr links" bezeichnet; ebenso durch Visieren von J' nach J.

Auf diese Weise hat man sich das älteste astronomische Instrument, einen Gnomon, angefertigt. So wurde im Altertume eine auf wagerechtem Boden senkrecht stehende Säule genannt, deren Schatten an der auf der Grundfläche scharf markierten Mittagslinie die Zeit des wahren Mittags angab.



Figur 23. Schattenkurve für den 26. Juli zur Bestimmung der Mittagslinie.

Derjenige Höhenkreis, welcher in der Mittagslinie auf der Ebene des Horizontes senkrecht steht, wird der Meridian genannt.

Nach Bestimmung des Nordpunktes und des Südpunktes kennt man nun im Horizonte auch den um 90° von ihnen entfernten Ostpunkt und Westpunkt; man hat, wenn man nach N sieht, O rechts, W links. Die Verbindungslinie OW, die Ost-West-Linie, liegt rechtwinklig zur Mittagslinie. Derjenige Höhenkreis, welcher in der Ost-West-Linie auf der Ebene des Horizontes senkrecht steht, heißt der erste Vertikal.

30. Die Strichrose (Windrose). Zu den 4 Hauptpunkten des Horizontes, N, S, O, W, kommen durch Halbierung der Quadranten die 4 Nebenpunkte NO und NW, SO und SW. Als Abweichungen von diesen 4 Nebenpunkten bezeichnet man die durch abermalige Halbierung der Bogen entstehenden 8 Punkte: Nord-Nordost und Ost-Nordost, Ost-Südost und Süd-Südost, u. s. w. — Auf dem Meere ist es nötig, eine Gegend des Horizontes dem Steuermann noch genauer anzugeben. Die Richtungen nach den noch hinzukommenden 16 Halbierungspunkten werden als Abweichungen von den Richtungen nach den 8 ersten Punkten aufgefaßt; man giebt an, ob diese Abweichung gen N oder gen O, gen S oder gen W sich wende. — Man schreibe zur Herstellung eines Kompaß-Blattes die Namen der 32 Striche des Horizontes neben die Peripherie eines großen Kreises in folgender Weise: N, N gen O; NNO; NO gen N, **NO**, NO gen O; ONO; O gen N, **O**, und so fort.

31. Wir sehen die Sterne Parallelkreise beschreiben. Hat man einen Theodoliten so aufgestellt, daß sein Grundkreis (P in Figur 19 unter Nr. 23) wagerecht, der Centralzapfen (in der Büchse Z) also senkrecht ist, so muß man, wenn man einen Stern von seinem Aufgange bis zu seinem Untergange mit dem Fernrohre verfolgen will, den Höhenwinkel des Fernrohrs fortwährend verändern. Stellt man aber durch sehr ungleiches Ausspreizen der Beine des Stativs den Theodoliten so auf, daß die Richtung des Centralzapfens in der Ebene des Meridians liegt und mit der nördlichen Hälfte der Mittagslinie einen Winkel von $52^1/_2$ Grad*) bildet**), so kann man

*) Der Neigungswinkel $52^1/_2{}^0$ gilt für Berlin. In nördlicher gelegenen Städten muß man ihn etwas größer (z. B. in Königsberg i. Pr. $54^3/_4{}^0$, in südlicher liegenden Orten ein wenig kleiner nehmen (in Breslau 51°, in Wien $48^1/_4{}^0$). Dieser Neigungswinkel kommt im folgenden bei sehr vielen Figuren vor; und da empfiehlt sich der für Berlin geltende Wert als für das Zeichnen sehr bequem, weil $52^1/_2{}^0$ die Mitte ist zwischen 45° und 60°.

**) Diese Lage erhält das Instrument in folgender Weise: Das Stativ wird so aufgestellt, daß die Fußspitzen auf dem Erdboden die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks sind, dessen Grundlinie die Richtung der Ost-West-Linie hat und dessen Spitze nach Norden zeigt. Nachdem die Füße in den Erdboden so eingedrückt sind, daß die Blase der Dosenlibelle auf dem Horizontalkreise in der Mitte steht, hebt man das Okular-Ende des nach Süden gerichteten Fernrohrs

das Fernrohr, sobald man den gewählten Stern am Fadenkreuz erblickt, mit der Klemmschraube K feststellen; dann läßt sich das Fernrohr nur noch mit dem Alidadenkreise Q um den Centralzapfen drehen, und man kann, ohne den Winkel am Höhenkreise H zu ändern, den Stern in seinem Laufe verfolgen. Denkt man von dem Punkte der Himmelskugel, an welchem man den Stern erblickt, das Lot auf die unter $52^1/_2{}^0$ schräg gestellte Achse ZM gefällt, so ändert dieses, weil ja der Winkel SMZ (Figur 19) bei der Umdrehung derselbe bleibt, seine Länge nicht. Der Stern beschreibt folglich einen Kreis, dessen Radius dieses Lot ist, und dessen Ebene auf der Umdrehungsachse senkrecht steht. Dieses gilt von allen Sternen. Da nun die Kreise aller Sterne auf derselben, unter $52^1/_2{}^0$ schräg gestellten Umdrehungsachse rechtwinklig stehen, so sind die Kreisebenen unter einander parallel, d. h.

> Wir sehen sämtliche Sterne an der Himmelskugel Parallelkreise beschreiben, deren Pole die Punkte sind, in welchen die nach beiden Richtungen verlängerte Umdrehungsachse die Himmelskugel trifft.

Bei dem Fortrücken in ihren Parallelkreisen haben alle Sterne stets dieselbe Winkelgeschwindigkeit. Denn beobachtet man irgend einen Stern wiederholt mit einer sorgfältig gearbeiteten Pendeluhr immer nach Verlauf derselben Anzahl von Minuten, so sieht man an dem Grundkreise des schräg gestellten Theodoliten, daß der Stern zwischen je zwei Beobachtungen stets um dieselbe Anzahl von Graden und Minuten herumgerückt ist.

32. Pole, Äquator und Meridiane an der Himmelskugel. Den Pol, welcher über dem Horizonte liegt, nennen wir den Nordpol, den andern den Südpol der Himmelskugel. Der Parallelkreis, welcher den Mittelpunkt der Himmelskugel zum Mittelpunkte hat, heißt der Himmelsäquator. Da man um die von Pol zu Pol gehende gerade Linie den Sternhimmel sich drehen sieht, so hat man ihr den Namen Weltachse gegeben.*) Alle Ebenen, welche

---

und stellt es am Höhenkreise auf $90^0 - 52^1/_2{}^0 = 37^1/_2{}^0$ fest. Darauf zieht man den in der Spitze des gleichschenkligen Grunddreiecks stehenden Stativfuß so weit nach Norden zurück, bis die auf dem Fernrohre befindliche, ihm parallele Röhrenlibelle (sie ist in der Figur 19 absichtlich nicht gezeichnet) angiebt, daß das Fernrohr nun wieder horizontal liegt. Dann ist der aus dem Okular heraustretende Teil der Fernrohrachse der horizontale Schenkel des Winkels, unter welchem sich die aufwärts gehende Richtung des Centralzapfens gegen die Ebene des Horizontes neigt. Dieser Neigungswinkel ist also in der That $52^1/_2{}^0$.

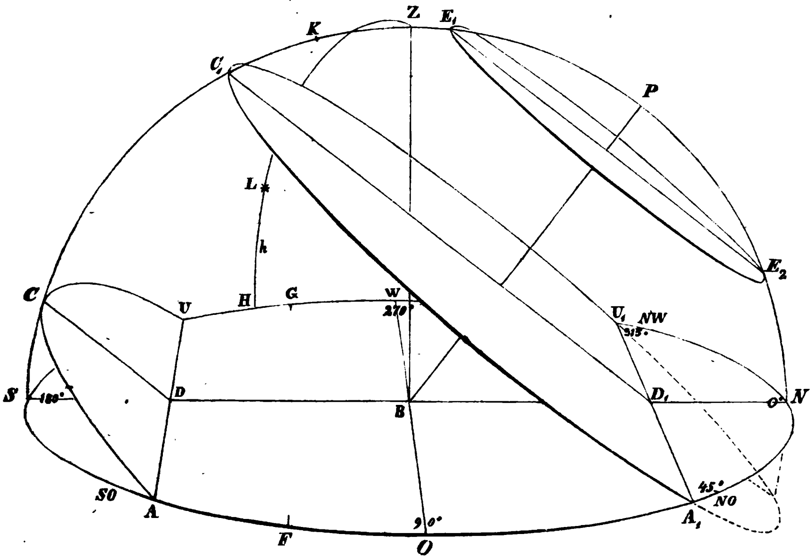
*) Jede Sternwarte besitzt ein großes Fernrohr, dessen Umdrehungsachse die Richtung der Weltachse hat, dessen eingeteilter Grundkreis also dem Äquator parallel ist. Dieses Instrument heißt Äquatoreal. (Von einem so aufgestellten Fernrohre sagt man, es sei „parallaktisch montiert". [Nr. 197.]) Es ist mit einem Uhrwerke versehen, so daß das Fernrohr der täglichen Bewegung der Gestirne folgen kann.

diese Achse zur gemeinsamen Durchschnittslinie haben, schneiden die Himmelskugel in größten Kreisen, welche man (im weiteren Sinne) als *Meridiane an der Himmelskugel* bezeichnet. Der Bogen eines solchen Kreises von einem Punkte der Himmelskugel (einem Sterne) bis zum Nordpole ist die *Poldistanz* dieses Punktes (dieses Sternes).

Alle Punkte eines Parallelkreises haben gleiche Poldistanzen, denn sie sind in kongruenten Kreisen Bogen zu Centriwinkeln, welche der Nebenwinkel des Winkels SMZ (Figur 19) beim Verfolgen des umlaufenden Sternes deckte.

Der Äquator ist derjenige Parallelkreis, dessen Poldistanz 90° beträgt.

33. Lage des Poles am Himmel. Die in Figur 24 gezeichnete Halbkugel stelle das Himmelsgewölbe dar. Ihr Mittelpunkt B ist der Beobachtungsort, die Grundebene NASU die Ebene des Horizontes, BZ die Vertikallinie, SN die Mittagslinie, N der Nordpunkt des Horizontes, folglich (nach Nr. 29) der Halbkreis SZN der Meridian. In seiner Ebene ist BP so gezogen, daß ∠ PBN $52\frac{1}{2}^0$ beträgt; mithin ist BP die über dem Horizonte liegende Hälfte der Weltachse, und P der Nordpol der Himmelskugel. Da ∠ PBN



Figur 24. Lage des Nordpols und der Parallelkreise an der Himmelskugel. Azimut und Höhe eines Sternes.

Centriwinkel zum Bogen PN ist, so beträgt auch die Polhöhe PN $52\frac{1}{2}^0$. (Vergl. Nr. 27.)*)

Der Nordpol befindet sich im Gebiete des Sternbildes des kleinen Bären, neben dem Schwanze desselben, sehr nahe beim Polarstern, (er ist in der Figur 2 in Nr. 7 als der Punkt P markiert) und zwar liegt er vom Polarstern aus in der Richtung, die mitten durch den Schwanz des großen Bären (durch ζ) geht. [Dazu Nr. 40 am Ende.]

34. Cirkumpolarsterne. Diejenigen Parallelkreise, deren Poldistanz, wie PE_2, kleiner als die Polhöhe PN ist, liegen ganz über dem Horizonte. Sterne, die solche Parallelkreise beschreiben, gehen also nie unter. Man nennt sie Cirkumpolarsterne.

Wenn man das Fernrohr des Theodoliten (der noch die in Nr. 31 angegebene Stellung hat) so richtet, daß der Vernier am Höhenkreise H $37\frac{1}{2}^0$ (nämlich $90^0-52\frac{1}{2}^0$) angiebt, und es dann durch Anziehen der Schraube K festklemmt, so umschreibt die Verlängerung seiner optischen Achse, bei Umdrehung des Alidadenkreises um den Centralzapfen, am Himmelsgewölbe das Gebiet der Cirkumpolarsterne. Es ist dies ein Kreis, welcher den Abstand der Wega vom Polarsterne zum Radius hat (Nr. 10); seine Peripherie geht mitten durch das Sternbild des Schwans und des Fuhrmanns, und umschließt den kleinen Bären, den Drachen, den großen Bären, die Cassiopeja und fast ganz den Perseus. Dieser Grenzkreis greift noch 15^0 über das Zenit (in der Figur 24 ist PK=PN gemacht); also sind die beim Zenit erblickten Sterne auch Cirkumpolarsterne.

§ 5. Azimut und Höhe.

35. Parallelkreise, geschnitten vom Horizont und Meridian. Diejenigen Parallelkreise, deren Poldistanz größer als PN (oder PK) ist (Figur 24 in Nr. 33), schneiden den Horizont; und zwar liegt ein um so größeres Stück des Parallelkreises unter dem Horizonte, je größer die Poldistanz desselben ist. Den Bogen, welchen ein Stern über dem Horizonte durchläuft, nennt man den Tagbogen des Sternes, den andern seinen Nachtbogen. A ist der Aufgangspunkt, U der Untergangspunkt des Sternes.

Mit der Poldistanz $PS = 127\frac{1}{2}^0$ hört der große Teil der Himmelskugel auf, den wir**) sehen können. Dieser sichtbare Teil beträgt schon volle vier Fünftel der ganzen Himmelskugel.***)

---

*) Der Nordpol ist also nicht in der Nähe des Nordpunktes am Horizonte zu suchen; er liegt hoch am Himmel, und zwar in ganz bedeutender Höhe.

**) in Berlin.

***) $\cos^2 26^1/_4{}^0 = 0{,}80438$.

Der nie über den Horizont tretende ist eine den Südpol des Himmels umgebende Kugelkappe, kongruent dem Gebiete der Cirkumpolarsterne.

Die Meridianebene SZN steht senkrecht auf dem Horizonte, weil sie durch BZ geht; die Meridianebene steht senkrecht auf jedem Parallelkreise, weil sie durch BP geht; oder, umgekehrt gesprochen, der Horizont und jeder Parallelkreis stehen senkrecht auf der Ebene des Meridians; folglich stehen auch ihre Durchschnittslinien (wie AU, A_1U_1) auf der Ebene des Meridians senkrecht. Daraus folgt, daß die Mittagslinie NS alle diese Sehnen (in D, D_1) halbiert; mithin halbiert der Meridian bei jedem Sterne die Bogen des Horizontes zwischen seinem Auf- und Untergangspunkte, ASU und ANU, sowie auch seinen Tagbogen, ACU, (und Nachtbogen).

Der Himmelsäquator schneidet die Ebene des Horizontes in einem Durchmesser WO, der auf der Mittagslinie SN senkrecht steht, dessen Endpunkte folglich der Ostpunkt O und der Westpunkt W des Horizontes sind. [Vergl. Figur 24 in Nr. 33 und Figur 26 in Nr. 43.]

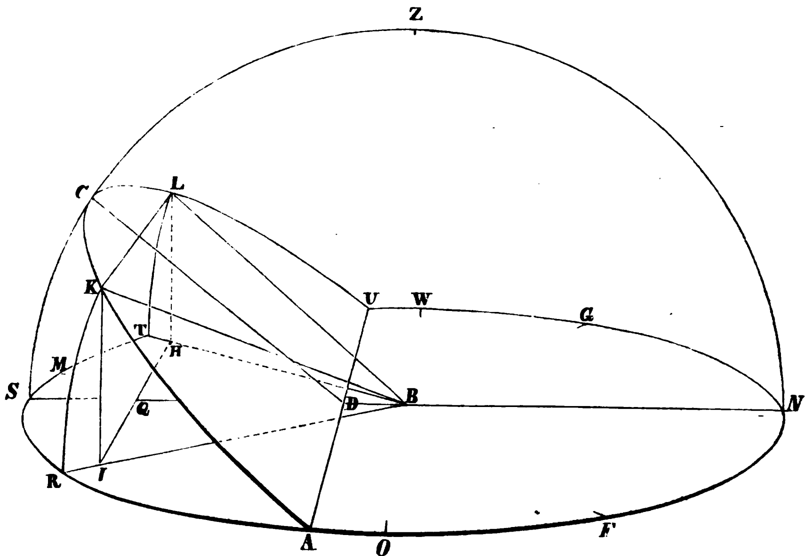
36. Ein Stern kulminiert. Wenn ein Stern durch den Meridian geht (im Punkte C), so sagt man: er kulminiert. — Die Zeit zwischen dem Auf- und Untergange eines Sternes wird durch die Kulmination halbiert. (Vergl. den Schluß von Nr. 31.) — Da jeder Stern bei einem Umlaufe den Meridian zweimal passieren muß, so ist zu unterscheiden seine obere Kulmination, d. i. der Durchgang durch den vom Pole abgegrenzten Teil des Meridians (SP), in welchem das Zenit liegt, und seine untere Kulmination, auf dem Bogen PN und seiner Verlängerung zum Südpole hin. Bei den Cirkumpolarsternen können wir beide Kulminationen beobachten.

37. Genauere Bestimmung der Mittagslinie. Man beobachtet einen Stern in gleichen Höhen. In dem Parallelkreise ACU (Figur 25) denke man irgendwo die Sehne KL parallel AU; damit läuft KL auch der Ebene des Horizontes parallel, also ist $KJ = LH$. Nun ergiebt die Kongruenz der Dreiecke KJB und LHB, daß $\angle KBR = \angle LBT$, also Bogen $KR = LT$, d. h. daß der Stern, wenn er bei seinem Aufsteigen in K und beim Abwärtsgehen in L sich befindet, in gleichen Höhen beobachtet wird. Da aber $JH \parallel AU$ (beide sind KL parallel), so steht BS auch auf JH senkrecht, halbiert also den Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks JBH, und somit ist $RS = ST$.

Demnach beobachtet man den Stern in irgend einem Punkte K seines Parallelkreises, notiert den am Horizontalkreise des Theodoliten abgelesenen Bogen $FR = \alpha_1$ (der Nullpunkt des Limbus möge sich

auf der beliebigen Richtung BF befinden), läßt das Fernrohr am Höhenkreise an dieser Stelle festgeklemmt, und dreht es nur mittels des Alidadenkreises herum, wenn der Stern nach seiner Kulmination abwärts geht. Sieht man nun den Stern im Gesichtsfelde des Fernrohrs erscheinen, so stellt man den Alidadenkreis mittels der Druckschraube D (Figur 19 in Nr. 23) fest und verbessert diese Lage mit der Mikrometerschraube f so, daß der Stern gerade durch den Schnittpunkt der Spinnewebfäden wandert. Dann liest man den Bogen $FRT = \alpha_2$ am Grundkreise ab, und findet $FS = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, was man sofort (ohne Rechnung) einsieht, wenn man $TG = FR$ abgetragen denkt.

Um die auf diese Weise ganz scharf gefundene Richtung der Mittagslinie BS — und damit ist ja die Lage des Meridians aufs genaueste bestimmt — leicht immer wieder zu finden, visiert man noch bei unveränderter Stellung des Horizontalkreises am nächsten Tage auf einen fernstehenden, festen, schmalen Gegenstand, z. B. nach der Spitze eines Kirchturmes. Erblickt man diesen in der Richtung BM, so kennt man $MS = FM - FS$. Diese Größe von MS schreibt man sich auf und weiß dann stets, um wieviel Grade, Minuten und Sekunden die Mittagslinie östlich von der Meridianmarke M abweicht. Ja man kann nun sogar das ganze Instrument für immer in diejenige Stellung bringen, welche für spätere Beobachtungen am geeignetsten ist. Das auf die Spitze des Kirchturmes M gerichtete Fernrohr macht man durch die Druckschraube am Höhenkreise fest,



Figur 25. Bestimmung der Mittagslinie durch Beobachtung eines Sternes in gleichen Höhen.

stellt den Alidadenkreis so weit zurück, daß der Nullpunkt seines Verniers so viel Grade, Minuten und Sekunden über 180° angiebt, als man für MS gefunden hat. Darauf dreht man den ganzen Theodoliten, indem man ihn an dem Dreifuße RR erfaßt (Figur 19 in Nr. 23), auf dem Stative so weit herum, bis man, durch das (unangerührte) Fernrohr sehend, die Spitze des Turmes genau am Fadenkreuz erblickt. In dieser Stellung macht man den Dreifuß des Theodoliten auf dem Stative, sowie dieses selbst vollkommen fest. Damit hat man dem Instrumente die für die Sternbeobachtungen geschickteste Aufstellung gegeben. Denn dreht man nun den Alidadenkreis um jene für MS erhaltenen Grade, Minuten und Sekunden zurück, so liegt die optische Achse des Fernrohrs in der Ebene des Meridians, und der zweite Vernier am Horizontalkreise steht auf 180°, der erste auf Null.

Will man z. B. einen Stern im Augenblicke seiner Kulmination beobachten, so hat man sofort die Lage der Mittagslinie und des Meridians wiedergefunden, wenn man den Verniernullpunkt des Alidadenkreises auf den Nullpunkt des Grundkreises bringt.

38. Azimut und Höhe. Beobachtet man mit dem so aufgestellten Theodoliten*) zu irgend einer Zeit einen Stern L (Figur 24 in Nr. 33), so giebt der Höhenkreis die Höhe des Sternes LH = h an und der Horizontalkreis die Größe des Horizontbogens vom Nordpunkte N aus über Osten herum bis zum Fußpunkte der Höhe des Sternes NOSH = a. Dieser Horizontbogen wird das Azimut des Sternes für die Zeit der Beobachtung genannt.**) Wir zählen die Azimute vom Nordpunkte auf dem Horizonte so herum, wie der Uhrzeiger läuft, von 0 bis 360°.***) Durch Azimut und Höhe ist der Ort eines Punktes am Himmelsgewölbe bestimmt. Es ist dies das erste Koordinatensystem an der Himmelskugel, nämlich das für den Horizont.

§ 6. Poldistanz und Stundenwinkel.

39. Sternzeit. Von großer Wichtigkeit ist es, die Sterne, die Sonne und den Mond zu beobachten im Augenblicke ihrer

---

*) Auf den Sternwarten heißt ein solches Instrument, welches wegen seiner Größe nicht auf Reisen mitgenommen werden kann, ein Altazimut, weil es Höhe und Azimut mißt.

**) Azimut ist das arabische as-samt, die Gegend. — Zenit ist dasselbe Wort ohne den Artikel. Vergl. die Note zu Nr. 2 (S. 1).

***) Von den Astronomen wird jetzt der Südpunkt als Anfang genommen. Die Geodäten (und die Seemänner) gehen, wie auch Bessel, vom Nordpunkte aus. Für die Berechnung des sphärischen Dreiecks Pol-Zenit-Stern ist dies etwas zweckmäßiger.

Kulmination. (Nr. 36.) Zu diesem Zwecke ist auf jeder Sternwarte ein Fernrohr aufgestellt, welches sich nur in der Ebene des Meridians bewegen läßt; seine Querachse ruht wagerecht — genau von Ost nach West — mit ihren Zapfen in Stahlplatten, die in zwei vom Fundament aus aufgeführte Granitpfeiler fest eingelegt sind. Ein solches Fernrohr, rechts und links auf der Achse mit einem Höhenkreise von 65^{cm} Durchmesser versehen, heißt Passageninstrument oder Meridianfernrohr.*) (S. die Angaben in Nr. 24.)

Beobachtet man an einer aufs genaueste gearbeiteten Pendeluhr**), die mit beliebiger Geschwindigkeit gleichförmig geht, die Zeit, welche zwischen je zwei aufeinander folgenden Kulminationen eines Sternes vergeht, so findet man stets genau dieselbe Zwischenzeit. Wir sehen also die Himmelskugel vollkommen gleichförmig sich umdrehen, und haben folglich in der Umdrehung der Himmelskugel ein völlig bestimmtes Maß für die Zeit. Somit können wir jener Pendeluhr, von der wir zunächst nur forderten, daß sie mit willkürlicher Geschwindigkeit gleichförmig gehe, nun eine bestimmte Geschwindigkeit vorschreiben.

Nach der Umdrehungszeit der Himmelskugel haben die Astronomen die Hauptuhr der Sternwarte, die Passagenuhr, durch Verlängern oder Verkürzen des Pendels so lange reguliert, bis sie bei jeder Umdrehung der Himmelskugel genau 24 Stunden 0 Minuten 0 Sekunden angiebt. Diese Uhr hält mit allen Sternen gleichen Schritt. Denn hat man einmal beobachtet, daß ein Stern [die Astronomen zählen die Stunden über nachts 12 weiter bis 24] um 13 Stunden 53 Minuten und 19 Sekunden kulminiert, so passiert er stets wieder den Meridian, wenn diese Uhr $13^h 53^m 19^s$ zeigt.

40. Genauere Bestimmung der Polhöhe. Man beobachtet in einer langen Winternacht die Höhe eines Cirkumpolarsternes

*) Dieses Hauptinstrument der Sternwarten, Meridiankreis nebst Passagenuhr, ist zwar schon von Olof Römer in den letzten Jahren vor 1700 mit Erfolg gebraucht worden; aber erst nach 1800 hat es statt des Mauerquadranten allgemeine Anwendung gefunden.

**) Die Pendeluhr ist 1641 von Galilei erfunden, als er schon erblindet war [seit Dezember 1637]. (Galileo Galilei, Professor der Mathematik zu Pisa, geb. 18. Febr. 1564 zu Pisa, gest. 8. Jan. 1642 in einer Villa bei Arcetri in Toscana, ruiniert durch den Neid seiner Nebenbuhler, als Gefangener der Inquisition unter Papst Urban VIII., welche ihn wegen der kopernikanischen Lehre verurteilt hatte am 22. Juni 1633.) Ohne von Galileis Erfindung zu wissen, hat Huygens im Jahre 1656 der Uhr an Stelle der Unruhe das Pendel zugefügt. (Huygens, geb. 14. April 1629 im Haag, gest. 8. Juni 1695 daselbst.) Es ist die Pendeluhr zweimal erfunden. Aber während Galileis Apparat lange unbekannt blieb und nie verwendet ist, fand der von Huygens sehr bald allgemein Anklang und Verwendung. (E. Gerland, Zur Geschichte der Erfindung der Pendeluhr. Abhandlung in den Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge. Bd. 4 [1878]. Seite 585 bis 613.)

bei seiner oberen und 12 Stunden Sternzeit darauf bei seiner unteren Kulmination.*) Hat man dabei am Höhenkreise des Meridianfernrohrs abgelesen (Figur 24 in Nr. 33) $E_1N = h_1$ und dann $E_2N = h_2$, so ist die Polhöhe φ**)

$$PN = \tfrac{1}{2}(h_1 + h_2).$$

Beispiel. Wenn Mitte Januar (1872) abends halb 6 Uhr und morgens halb 6 Uhr am Meridianfernrohr der Berliner Sternwarte angestellte Beobachtungen lieferten für den Polarstern, α Ursae minoris,

bei der oberen Kulmination $h_1 = 53^0\,52'\,24{,}8''$
und bei der unteren Kulmination $h_2 = 51^0\;\;8'\;\;8{,}6''$

so ergiebt sich für die Sternwarte von Berlin

Polhöhe $\varphi = 52^0\,30'\,16{,}7''$.

(Die hierbei gefundene Poldistanz des Polarsternes ist $1^0 22' 8{,}1''$, d. h. $2\frac{2}{3}$ Vollmondsbreiten.)

41. Äquatorhöhe. Unter Äquatorhöhe versteht man die Höhe des Punktes A (Figur 26), in welchem der Meridian den Himmelsäquator AOQW über dem Horizonte schneidet. Dieser Bogen SA mißt den Neigungswinkel ABS der Ebene des Äquators gegen die Ebene des Horizontes.

Polhöhe und Äquatorhöhe ergänzen sich zu 90°.

42. Deklination und Poldistanz. Nachdem so die Polhöhe und die Äquatorhöhe scharf ermittelt sind, denke man den Theodoliten wieder in die unter Nr. 31 besprochene schiefe Stellung, so genau wie möglich, gebracht; dann hat die Ebene des Grundkreises die Lage der Ebene des Himmelsäquators; und wenn man den oberen Teil des Instruments um den Centralzapfen dreht, so beschreiben die Nullpunkte der Höhenkreisverniers einen Kreis, der mit seinem Mittelpunkte — dem Mittelpunkte des Theodoliten — auf der Weltachse senkrecht steht, und die Ebene dieses Kreises ist die Ebene des Himmelsäquators OAWQ, da der Mittelpunkt des Theodoliten der Mittelpunkt der Himmelskugel, der Beobachtungspunkt B (Figur 26) ist. Richtet man nun das Fernrohr auf einen Stern L_2, so liegt die optische Achse des Fernrohrs in der Ebene PL_2P' eines Meridians

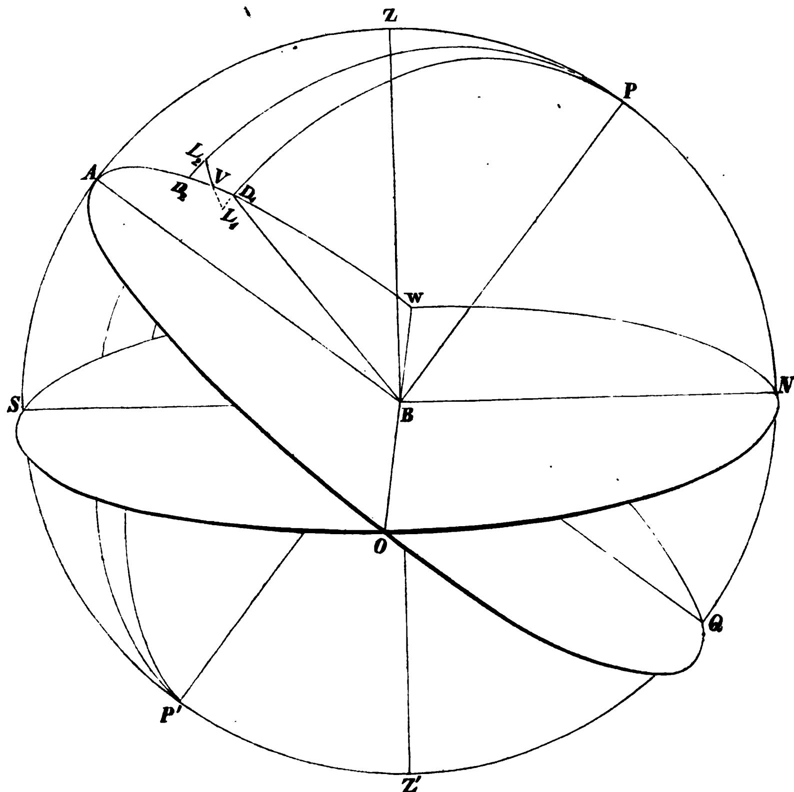
*) Diese Bestimmungsweise (welche schon den Arabern vor dem 13. Jahrhunderte bekannt gewesen war) wurde [statt Messung der Schattenlänge am Gnomon (Nr. 28, vergl. Nr. 73 Anm.)] eingeführt von Tycho Brahe, geboren 1546 Dez. 14 zu Knudstrup bei Helsingborg, gestorben 1601 Okt. 24 in Prag.

**) Die Astronomen bezeichnen die Polhöhe stets mit dem Buchstaben φ.

(Nr. 32), und man liest am Höhenkreise des Theodoliten ab, wieviel Grade, Minuten und Sekunden der Meridianbogen L_2D_2 beträgt. Dieser Meridianbogen (L_2D_2 oder L_1D_1) zwischen dem Äquator und dem Sterne heißt die Abweichung oder Deklination des Sternes. Befindet sich der Stern, wie L_2, auf der nördlichen Halbkugel, so schreibt man vor den Zahlenwert seiner Deklination das Zeichen +; die südlichen Deklinationen werden mit — bezeichnet.

Deklination und Poldistanz eines Sternes (Nr. 32) ergänzen sich zu 90°.

43. Stundenwinkel. Man möge, ehe man den Theodoliten in die schiefe Stellung gebracht hat, sich die Mühe gegeben haben, das Instrument auf dem Stative so lange nach rechts und links zu drehen, bis der Nullpunkt des Limbus, wenn das Fernrohr nach dem Südpunkte des Horizontes gerichtet ist, gerade bei dem Null=



Figur 26. Poldistanz (nebst Deklination) und Stundenwinkel eines Sternes.

punkte des Verniers steht. (Nr. 37, Meridianmarke.) Das so festgeklemmte Fernrohr bleibt dann mit seiner optischen Achse in der Ebene des Meridians, während man, wie in der zweiten Note unter Nr. 31 angegeben wurde, den Stativfuß auf der Mittagslinie hin nach Norden zurückzieht. Stellt man nun das Fernrohr auf einen kulminierenden Stern ein, so liest man am Grundkreise 0^0 ab. Verfolgt man diesen Stern, wie er bei der gleichförmigen Umdrehung der Himmelskugel mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf seinem Parallelkreise hinwandert, so dreht sich der Theodolit um den Centralzapfen, und die auf dem Grundkreise abgelesenen Gradzahlen wachsen ganz regelmäßig; sie geben mit der Größe des Bogens AD_1 oder AD_2 (Figur 26) zugleich die der Centriwinkel ABD_1 oder ABD_2, und auch die Gradzahlen der von den Quadranten D_1P oder D_2P mit dem Meridiane AP auf der Kugelfläche gebildeten Winkel an, da zu jedem der 360 Grade des Äquators am Pole ein sphärischer Winkelgrad gehört. Diese sphärischen Winkel APD_1, APD_2 nennt man Stundenwinkel. Denn teilt man die Zeit von einer Kulmination bis zur folgenden in 24 Stunden, so sind, wenn der Stundenwinkel auf 15^0, 30^0, 45^0, ... angewachsen ist, 1, 2, 3, ... Stunden seit der Kulmination verflossen. Giebt die Grundkreisteilung α^0 an, so ist die Beobachtungszeit $t = \frac{\alpha}{15}$ Stunden, Minuten, und Sekunden für den Umlauf dieses Sternes. Z. B. $\alpha = 317^0\,41'\,25''$ sagt $2^h\,49^m\,14{,}3^s$ vor der nächsten Kulmination; und will man den Stern 6 Stunden nach seiner Kulmination wieder beobachten, so dreht man den Grundkreis auf 90^0 und bringt das Fernrohr mittels der Höhenkreisteilung in die der Poldistanz des Sternes zukommende Richtung.

Zur bequemen Verwandlung der Zeit in Grade kann man sich die Regel bilden: 15 mal die Zahl der Stunden + den vierten Teil der Minuten giebt die Zahl der Grade; der 15 fache Minutenrest $+ \frac{1}{4}$ der ganzen Sekunden ist die Zahl der Winkelminuten; was von den Sekunden blieb, wird mit 15 multipliziert. Z. B. $2^h\,17^m\,33{,}1^s$ geben $34^0\,23'\,16{,}5''$. Entsprechend muß man beim Übertragen der Grade in Zeit mit 15 dividieren und die Reste mit 4 multiplizieren.

Stundenwinkel und Poldistanz bestimmen den Ort eines Punktes am Himmelsgewölbe. Sie sind Polarkoordinaten an der Himmelskugel; der Stundenwinkel ist die Anomalie, die Poldistanz der Radius vektor. Es ist das zweite Koordinatensystem der Himmelskugel, nämlich das für den Pol.

44. Bestimmung der Deklination. Zur scharfen Bestimmung ihrer Deklination beobachtet man die Sterne im Augenblicke der

Kulmination. (Nr. 39.) Steht an dem Meridianinstrument der Nullpunkt des Höhenkreises am Endpunkte seines horizontalen Durchmessers, so giebt die Ablesung die Summe der gesuchten Deklination und der bekannten Äquatorhöhe an.. (Figur 26.) Ist aber der höchste Punkt des Meridiankreises mit Null bezeichnet, so liest man die Zenitdistanz des Sternes ab. Durch Subtraktion hat man die Deklination. (Ferner Nr. 55 1. Note.)

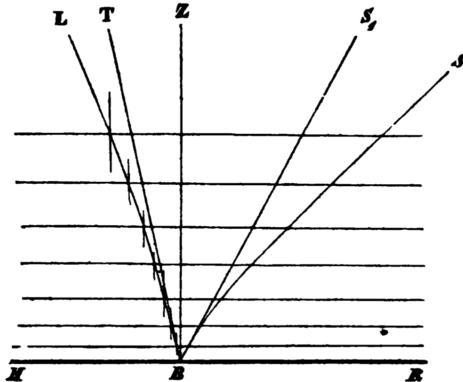
Auf diese Weise wurden auf den Sternwarten die Deklinationen der Sterne vieler Größenklassen beobachtet. Diese Ergebnisse vieljähriger Arbeit sind neben die Bezeichnung des Sternes in Kataloge eingetragen und durch den Druck veröffentlicht. Solche Sternverzeichnisse sind jedem Astronomen als notwendigstes Hilfsmittel für seine Arbeiten stets zur Hand.

§ 7. Astronomische Strahlenbrechung.

45. Krümmung der Lichtstrahlen durch die Luft. Da die Luft sehr leicht zusammendrückbar ist, so wird die in irgend einer Höhe befindliche Luftschicht unter der Last der ganzen auf ihr ruhenden Luftmenge verdichtet, und zwar um so stärker, je mehr Luft an der gedachten Stelle zu tragen ist.*) Also nimmt die Dichtigkeit der Luft, wie ja das Barometer beweist, von oben nach unten sehr beträchtlich zu.

Ein rechtwinklig auftreffender Lichtstrahl geht geradeaus weiter; ein schief ankommender aber läuft nur dann geradlinig, wenn er in einem Körper von unveränderter Dichtigkeit sich bewegt. Es deuten die immer enger zusammengedrängten Parallelen der Figur 27 die zunehmende Dichtigkeit der Luftschichten an. Ein Strahl LB, welcher von außen in schräger Richtung über der Ebene des Horizontes von B eintrifft, wird, in je dichtere Luft er kommt, desto mehr dem Einfallslote der betreffenden Stelle zu gebrochen; er krümmt sich, nach dem Snelliusschen Brechungsgesetze, immer in derselben Vertikalebene bleibend, schwach nach unten. Die Biegung ist in der Figur viel zu stark gezeichnet, damit deutlich hervortrete, daß der durch die Luft gekrümmte Teil des Strahles die hohle Seite dem Erdboden zukehrt. Die Tangente BT am Endpunkte giebt die Richtung an, in welcher der Beobachter B den Lichtstrahl empfängt. Er sieht also die Sterne, mit Ausnahme der beim Zenit, etwas höher, als sie wirklich über der Ebene des Horizontes sind, und

*) Der Druck der Luft auf eine 1^{qm} große Fläche ist gleich dem Gewicht eines Quecksilber-Prismas auf dieser Grundfläche und von der Höhe der Quecksilbersäule im Barometer. Da 1^{ccm} Quecksilber $13{,}6^{g}$ wiegt, so beträgt der Druck auf 1^{qm} in nur 275^{m} Höhe über dem Erdboden, in welcher der Barometerstand $735{,}3^{mm}$ ist, 10000^{kg}, hier unten bei mittlerem Barometerstande (760^{mm}) schon 10336^{kg}.



Figur 27. Zur astronomischen Strahlenbrechung.

zwar diejenigen mehr, welche größeren Zenitabstand haben. Die äußeren Buchstaben der Figur sind an der Himmelskugel zu denken. Dort ist

$$\text{Bogen } S_1R - SR > \text{Bogen } TH - LH.$$

Eine seitliche Verschiebung erfährt ein Stern nicht, da der Strahl in derselben Vertikalebene fortläuft. Die Strahlenbrechung bewirkt also nur bei der Höhe der Sterne eine kleine Vergrößerung, die Azimute bleiben unverändert.

Die Anzahl der Minuten und Sekunden, um welche die Höhe eines Sternes durch Krummwerden des Strahles vermehrt wird, heißt die astronomische Strahlenbrechung.*)

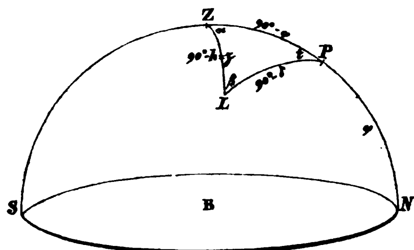
Zu ihrer Ermittelung führen zwei Wege. Aus dem Snelliusschen Brechungsgesetze und aus dem Mariotteschen Gesetze über die Luftdichtigkeit kann man Formeln herleiten, welche die Strahlenbrechung für die scheinbaren Höhen angeben. Diejenige, welche durch elementare Hilfsmittel gewonnen wird, geht aus recht umständlichen Umformungen hervor und stimmt mit der Erfahrung wenig überein. Die strenge Formel-Entwickelung erfordert Kenntnisse aus der höheren Mathematik. Aus diesen Gründen verfolgen wir den andern Weg, den durch Beobachtung.

46. Strahlenbrechung für mittlere Höhen. Auf der Sternwarte in Berlin (Polhöhe $\varphi = 52^0\,30'\,16{,}7''$) beobachtet man den

*) Die strahlenkrümmende Wirkung der Luft äußert sich auch, aber viel schwächer, in der scheinbaren Höhe entfernter hoher irdischer Gegenstände. Der Gipfel eines Berges, die Spitze eines fernen großen Turmes erscheint uns in etwas größerer Höhe, als die gerade Linie zu uns es angeben würde. Den Unterschied dieser beiden Höhenwinkel nennt man die irdische Strahlenbrechung.

Stern β Draconis bei seiner oberen Kulmination in einer Höhe von $89^0\,53'\,32{,}6''$. Von diesem Sterne kommen zu solcher Zeit die Strahlen fast genau senkrecht durch die Luft, erfahren mithin keine nachweisbare Richtungsänderung, und man hat nach Nr. 44 die Deklination von β Draconis $\delta = +\,52^0\,23'\,49{,}3''$.

Durch das Dreieck Pol-Zenit-Stern, PZL in Figur 28, kann man aus zwei Seiten, $90^0 - \delta$ und $90^0 - \varphi$, und dem eingeschlossenen Stundenwinkel t die wahre Höhe des Sternes berechnen. Man stellt sich daher die Aufgabe, die Zeit zu ermitteln von der Kulmination bis zu dem Augenblicke, in welchem der niedergehende Stern eine gewählte Höhe erreicht. Nachdem man das Fernrohr des Theodoliten am Höhenkreise in die gewünschte Neigung gebracht und durch die Klemmschraube K (Figur 19 in Nr. 23) am Arme Y fest gemacht hat, bewirkt man die scharfe Einstellung durch die Mikrometerschraube B. Von nun an verändert man die Stellung des Fernrohrs nur auf dem Grundkreise und sucht den Stern, wenn seine Höhe bis zur gewählten Größe sich vermindern will, in das Gesichtsfeld des Fernrohrs zu bekommen. Ist er eingetreten, so ergreift man die zu seiner Rechten von der Decke herabhängende Taste RT des Chronographen (Figur 22 in Nr. 25) und schließt die Enden C und T durch kurzen Druck zusammen in dem Augenblicke, in welchem der Stern den Querfaden passiert. Auf dem Papierstreifen des Schreibapparates liest man dann zu der vor Beginn der Beobachtung notierten Stunde und Minute, durch die Stellung des entstandenen Stiches neben der Sekunden-Punktreihe, für den Durchgangsaugenblick die Sekunde nebst Bruchteil genau ab. Den Überschuß dieser Zeitangabe über die zuvor beobachtete Kulminationszeit des Sternes hat man schließlich in Grade zu verwandeln, um den gewünschten Stundenwinkel t zu besitzen.



Figur 28. Das Dreieck Pol-Zenit-Stern.

47. Aufgabe. Bei seinem Niedergange erreicht der Stern β Draconis die scheinbare Höhe von 54^0 $4^h\,3^m\,49{,}38^s$ und die scheinbare Höhe von 51^0 $4^h\,25^m\,47{,}04^s$ nach seiner Kulmination. Man berechne die wahren Höhen in diesen Augenblicken und die Strahlenbrechung für die scheinbaren Höhen.

Auflösung. Es kommt darauf an, die Sekunden der wahren Höhe scharf zu erhalten. Die Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen

zeigt, daß zur Bestimmung der dritten Dreiecksseite die Benutzung des Kosinus-Satzes mit dem Hilfswinkel ungenaue Ergebnisse liefert; denn die Strahlenbrechung für 54°, welche die kleinere sein muß, kommt etwas größer heraus, als die für 51°. Man muß also nach der besseren Auflösung dieser Aufgabe, mit den Neperschen Analogien rechnen.

Da die Deklination von β Draconis nur wenig kleiner ist, als die Polhöhe der Berliner Sternwarte, so ist durch die Seiten $90^0 - \delta$ und $90^0 - \varphi$ das Dreieck PZL fast gleichschenklig, der Winkel α am Zenit also nur wenig größer, als der Winkel β am Sterne. Deswegen muß man in der vierten Neperschen Analogie statt der Tangente und des Sinus der halben Differenzen die Bogen, ausgedrückt in Sekunden, nehmen.

$$1)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}t \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}$$

$$2)\quad \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}t \cdot \frac{\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)}.$$

Nachdem so α gefunden (man wähle hier nicht β), hat man durch den Sinussatz

$$3)\quad \cos h = \frac{\cos\delta}{\sin\alpha}\sin t.$$

Rechnungsvorschrift. (Zu beachten!) Damit die logarithmische Rechnung möglichst genaue Ergebnisse liefere, runden wir bei dem Interpolieren die Verbesserung der in den Tafeln stehenden Mantisse nicht auf Ganze ab, sondern nehmen stets noch die Zehntel mit (und wenn eine 5 an der Stelle der Hundertstel steht, auch diese noch). Wir rechnen also bei siebenstelligen Logarithmen mit acht, bei fünfstelligen mit sechs Decimalen.*) Zu aufzuschlagenden Winkeln bestimmen wir die Sekunden bei siebenstelligen Logarithmen auf zwei Decimalen (und wenn der Winkel zu verdoppeln ist, auf drei), bei fünfstelligen Logarithmen auf eine Decimale (und für die Verdoppelung auf zwei). — Die Ergebnisse werden in vorliegendem Buche zuerst nach der Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen angegeben; die dahinter in runden Klammern stehende Zahl ist das Ergebnis der Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen.

Bei so angestellter Rechnung nach obigen Formeln (die für beide Höhen gleichzeitig, tabellarisch nebeneinander, ausgeführt wird) erhält man

für $h_1 = 54^0$	für $h_2 = 51^0$
$\alpha = 65^0\,8'\,10{,}37''\,(9{,}2'')$	$\alpha = 62^0\,41'\,36{,}08''\,(34{,}9'')$
Strahlenbrechung $h_1 - h = 0'\,41{,}855''\,(41'')$	$h_2 - h = 0'\,46{,}70''\,(46{,}1'')$.

*) Vergleiche die Tabelle am Ende dieses Buches.

48. Erste Hälfte der Refraktionstafel. Bei 90^0 der Höhe ist die Strahlenbrechung null, bei 54^0 erst $41{,}9''$. Sie ist also bei großen und mittleren Höhen sehr klein und nimmt langsam zu. Deshalb darf man für die wenigen Grade zwischen 54^0 und 51^0, ohne in den Zehnteln der Sekunden von der Wahrheit abzuweichen, gleichmäßig einschalten, so daß als ein Teil einer Refraktionstafel entsteht:

Scheinbare Höhe	Strahlenbrechung	Differenz
54^0	$41{,}9''$	
		$1{,}6''$
53^0	$43{,}5''$	
		$1{,}6''$
52^0	$45{,}1''$	
		$1{,}6''$
51^0	$46{,}7''$	

Beispiele. Für die Sternwarte in Berlin ist die scheinbare Höhe des Polarsternes bei seiner oberen Kulmination $53^0\,53'\,6{,}9''$. Zur Bestimmung der zugehörigen Strahlenbrechung braucht man nur mit den Minuten zu rechnen. Aus vorstehendem Täfelchen folgt die Strahlenbrechung $42{,}1''$. Mithin ist die wahre Höhe $h_1 = 53^0\,52'\,24{,}8''$.

Bei der unteren Kulmination ist seine scheinbare Höhe $51^0\,8'\,55{,}1''$; davon kommen auf die Strahlenbrechung $46{,}5''$; also ist die wahre Höhe $h_2 = 51^0\,8'\,8{,}6''$.

In solcher Weise verwandeln die Astronomen die Beobachtungen sobald als möglich in die wahren Größen. Die in vorliegendem Buche angegebenen Messungen sind stets von der Strahlenbrechung bereits befreit. (Nr. 40.)

Führt man wie oben Beobachtung und Rechnung für die Höhen 46^0 und 44^0 aus, so ergeben sich für die Strahlenbrechung $55{,}7''$ und $59{,}7''$, und man hat als weitere Fortsetzung der Tafel

46^0	$55{,}7''$	
		$2{,}0''$
45^0	$57{,}7''$	
		$2{,}0''$
44^0	$59{,}7''$	

Der Stern erster Größe α Orionis hat für die Berliner Sternwarte die scheinbare Kulminationshöhe $44^0\,53'\,31{,}2''$. Nach der Tafel ist die Strahlenbrechung $57{,}9''$, also die wahre Kulminationshöhe $44^0\,52'\,33{,}3''$ und nun folgt (nach Nr. 44) die Deklination von α Orionis $\delta = +\,7^0\,22'\,50{,}0''$.

Man merke: Bei Höhen über 45^0 beträgt die Strahlenbrechung weniger als eine Bogenminute. Ihr Wert ist nahe $\operatorname{cotg} h \cdot 57{,}7''$.

49. Strahlenbrechung für kleine scheinbare Höhen: 10°, 5° und 0°. Nähert sich der Stern erster Größe α Orionis, dessen Deklination $\delta = +7^{\circ}\,22'\,50{,}0''$ ist, seinem Untergangspunkte, so sieht man ihn von der Berliner Sternwarte aus in der scheinbaren Höhe von 10° $5^h\,33^m\,16{,}82^s$, von 5° $6^h\,6^m\,40{,}91^s$ und von 0° $6^h\,42^m\,47{,}85^s$ nach seiner Kulmination. Man berechne für eine dieser scheinbaren Höhen den wahren Zenitabstand und die Strahlenbrechung.

Hier ist zu rechnen nach den Formeln

$$1)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}t \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi+\delta)},$$

$$2)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}t \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta)},$$

$$3)\quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}z = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\varphi+\delta) \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}.$$

Bei der Gestalt des dieser Rechnung zu Grunde liegenden Dreiecks können wir in Formel 3) bei den Neperschen Analogien bleiben. Sie führt schneller zum Ziele, da man, ohne die Winkel $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ und $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ aufzuschreiben, von der Tangente sofort zum Kosinus übergehen wird.

Es ergiebt sich

für $h_1 = 10^{\circ}$	für $h_2 = 5^{\circ}$
Strahlenbrechung 5′ 16,22″ (5′ 16,8″)	9′ 46,54″ (9′ 46,1″)

für $h_3 = 0^{\circ}$
Strahlenbrechung 34′ 54,09″ (34′ 52,3″).

50. Veranschaulichung der Größe der Horizontal-Refraktion. Bei kleinen scheinbaren Höhen nimmt also die Strahlenbrechung stark zu. Sie wird am Horizonte (34′ 54″) so bedeutend, daß, wenn wir beim Untergehen der Sonne ihren tiefsten Punkt den Horizont berühren sehen, die Sonne in Wirklichkeit schon ganz unter der Ebene des Horizontes ist, weil ihr scheinbarer Durchmesser höchstens 32′ 34″ beträgt. (Nr. 22, am Ende.) Die Strahlenbrechung verlängert die Tageshelle; sie läßt die Sonne früher auf- und später untergehen.

51. Zweite Hälfte der Refraktionstafel. Aus dem schnelleren Wachsen der Strahlenbrechung bei kleinen Höhen leuchtet ein, daß man bei Höhen unter 45° für viele Werte die Bestimmung ausführen muß. Dann findet man die noch gewünschten dazwischenliegenden

durch ein Interpolationsverfahren. Eine vollständige Tafel der Strahlenbrechung steht Seite 565 in Vegas siebenstelligen Logarithmentafeln, bearbeitet von Bremiker. Ihr Anfang lautet:

Scheinbare Höhe	Refraktion	Differenz
0° 0′	34′ 54,1″	
		124,9″
10	32 49,2	
		116,9
20	30 52,3	
		108,8
30	29 3,5	
		100,8
40	27 22,7	
		92,9
50	25 49,8	
		85,2
1° 0′	24 24,6	

Anmerkung. Auf dem Wege der Beobachtung ergiebt sich die Größe der Strahlenbrechung in den verschiedenen Höhen übereinstimmend mit der durch Berechnung aus Formeln, welche man auf Grund der physikalischen Eigenschaften der Luft entwickelt hat. Daraus folgt, daß, wenn bei dem stündlichen Fortschreiten die scheinbaren Höhen eines Sternes befreit werden von der Strahlenbrechung, sich Höhen ergeben, wie sie einem Sterne zukommen, der einen Parallelkreis beschreibt. Es entspricht also die tägliche Bewegung der Gestirne vollkommen der Vorstellung von der gleichförmigen Umdrehung einer Himmelskugel, an welcher man sich die Sterne angeheftet denkt.

52. Gestalt der Sonnenscheibe am Horizonte. Die Wirkung der zunehmenden Strahlenbrechung tritt uns deutlich vor Augen, wenn wir bei nicht ungünstigem Abendhimmel den oberen und noch mehr den unteren Rand der untergehenden Sonne elliptisch abgeflacht sehen. Hat ihr oberster Punkt 26′ 45″ scheinbare Höhe, so beträgt die Strahlenbrechung nach der Tabelle in Nr. 51 29′ 39″, er ist also in Wirklichkeit schon 2′ 54″ unter dem Horizonte, ihr unterster Punkt, da ihr scheinbarer Durchmesser 32′ beträgt, 34′ 54″. Die Strahlenbrechung in der Höhe 0 bringt den Strahl des tiefsten Punktes bis an den Horizont, hebt also den tiefsten Punkt über 5′ mehr, als den höchsten. Es erscheint demnach der senkrechte Durchmesser verkürzt auf jene 26′ 45″, während der Querdurchmesser 32′ bleibt. (Nr. 45.) Die kreisrunde Sonnenscheibe sieht dann also länglich rund aus im Verhältnis von 6 : 5.

Dasselbe gilt von der Mondscheibe beim Auf- oder Untergange.

53. Veränderlichkeit der Strahlenbrechung. Schließlich ist noch zu erwähnen, daß die Größe der Strahlenbrechung kleinen

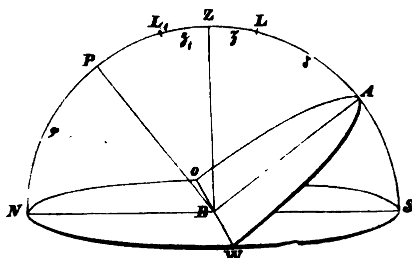
Veränderungen unterworfen ist mit dem wechselnden Zustande der Luft, den wir aus dem Gange des Thermometers und Barometers ersehen. Die oben erhaltenen Werte sind die der mittleren Refraktion. Sie gelten für 7° Reaumur und 750^{mm} Barometerstand (333 Pariser Linien). Bei zunehmender Temperatur lockert sich die Luft auf, daher wird die Strahlenbrechung etwas kleiner; mit wachsendem Barometerstande wird sie ein wenig größer.

§ 8. Bestimmung der Polhöhe und eines Azimuts auf einer Beobachtungsstation

54. 1) durch **Meridian-Zenitdistanzen.** Verfolgt man einen Stern (auf dem Festlande mit dem Theodoliten, auf einem Seeschiffe mit dem Sextanten) bis seine Höhe aufhört zu wachsen, so hat man durch die größte Höhe seine Meridianzenitdistanz z. (Stern L in Figur 29.) Die Deklination δ des gewählten Sternes ist aus dem Sternverzeichnis bekannt; mithin erhält man durch $AZ = \varphi$

$$\varphi = \delta + z.$$

Die Lage der Mittagslinie stellt sich bei dieser Beobachtung, weil der Stern vor und nach der Kulmination fast horizontal hinstreicht, unsicher heraus. Die hierdurch in z zu befürchtende Ungenauigkeit kann nur gering sein, wenn der Stern nahe beim Zenit kulminiert. Der Fehler wird unschädlich gemacht, wenn man zwei Sterne beobachtet, von denen der eine südlich, der andere nördlich vom Zenit in nahezu gleichem Abstande kulminiert. Für diesen zweiten Stern L_1 hat man



Figur 29. Meridian-Zenitdistanz.

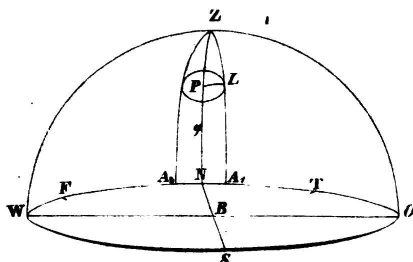
$$\varphi = \delta_1 - z_1$$

mithin nach Addition beider Gleichungen

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(\delta + \delta_1) + \tfrac{1}{2}(z - z_1).$$

Da man den zweiten Summanden schreiben kann $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{z_1}{z}\right) \cdot z$, so sieht man, daß von z und seinem Fehler nur ein kleiner Bruchteil zur Bestimmung von φ verwandt wird, so daß der Fehleranteil bei hinlänglich gleichen z_1 und z selbst die Sekunden in φ nicht erreicht.

55. 2) durch **die größten Digressionen eines Cirkumpolarsternes.***) Verfolgt man den Polarstern (oder einen Stern in seiner Nähe) mit dem Fernrohre des Theodoliten, und sieht man, daß er ostwärts und aufsteigend sich bewegt, so muß man bald das Fernrohr immer mehr aufrichten und immer weniger nach Osten verstellen, so daß letztere Veränderung nur noch durch die Mikrometerschraube (f in Figur 19 zu Nr. 23) zu bewirken ist. Dreht man diese vorsichtig so, daß der Stern am Vertikalfaden hingleitet, so hat nun das Fernrohr die Stellung erreicht, welche die größte östliche Digression des Sternes angiebt. In Figur 30 ist L diese Stelle der kleinen Kreisbahn um P, welche den Parallelkreis des Sternes bedeutet. Am Grundkreise des Theodoliten, dessen Nullpunkt auf der Richtung BF liegen möge, liest man dann die größte Zahl der Grade ab, welche der Stern bei seinem Rundlaufe erreichen kann.



Figur 30. Digression eines Cirkumpolarsternes.

Man notiert $FA_1 = a_1$. Gegen 12 Stunden später (während welcher Zeit der Grundkreis seine Stellung unverändert behalten muß) verfolgt man den Stern wieder.**) Er bewegt sich dann abwärts und kann bald nicht weiter nach Westen kommen. Die ebenso ausgeführte Beobachtung giebt dann für FA_2 die kleinste Zahl a_2. Nun weiß man, durch welchen Teilstrich des Grundkreises die Mittagslinie des Beobachtungsortes geht; denn es ist $FN = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Ihre Lage zu fixieren, visiert man am folgenden Tage nach einem festen Punkte, z. B. nach einem aufgemauerten Signal auf einem fernen Berge. Erblickt man dies in der Richtung BT, so hat man $TF - NF = TN$ als das Azimut des trigonometrischen Punktes T. Da dieser Punkt, wie der Beobachtungsort B, dauernd markiert ist, so findet man nach Jahren durch ihn das Azimut jedes andern Ortes, welchen man für die Beobachtung in B nachtragen will.

---

*) Diese Beobachtungsweise wandte schon Rotmann in Kassel um das Jahr 1600 an; auch Böhm, Direktor der Sternwarte in Prag, Methode, geographische Breite und Azimute zugleich zu finden. Prag, 1855. Sie giebt den Astronomen, da ihnen die Polhöhe ihrer Sternwarte genau bekannt ist, ein Mittel, den Polabstand solches Sternes, und damit seine Deklination, unabhängig von der Strahlenbrechung zu bestimmen.

**) Man kann die hellen Sterne mit einem stark vergrößernden Fernrohre auch bei Tage sehen, wenn man ihren derzeitigen Standort kennt. Durch die Okularlupe wird nämlich die nur kleine Stelle des Himmels, welche im Fernrohre zu übersehen ist, im Bilde sehr ausgebreitet, also in ihrer Helligkeit abgeschwächt, während das Bild des Sternes, als eines Lichtpunktes, es nicht werden kann. Der Stern sieht dann weißlich aus, wie der Mond bei Tage.

Durch das Azimut a des Punktes A_1, nämlich $NA_1 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = a$, kennt man nun auch den Winkel $NZA_1 = a$ und hat daher aus dem rechtwinkligen sphärischen Dreieck PZL die Polhöhe des Ortes P

$$\cos\varphi = \frac{\cos\delta}{\sin a}.$$

Beispiele. I. Wie groß ist an dem trigonometrischen Punkte auf der Schneekoppe das Azimut des Gröditzberges und die Polhöhe? Von α Ursae minoris (Polarstern) ist die Deklination $\delta = 88^0 37' 21{,}68''$. Die Richtung zum Fußpunkte der Höhe ging bei der größten Digression auf der Ostseite über den Teilstrich des Theodoliten-Grundkreises

$126^0 29' 22''$

bei der auf der Westseite über

$122^0\ 8' 10''$

und die Richtung zum Signal auf dem Gröditzberge über

$125^0 53' 35''$.

Antwort. Auf der Schneekoppe ist das Azimut des Gröditzberges $1^0 34' 49''$ und die Polhöhe $\varphi = 50^0 44' 20{,}7''$ (23″).

II. Breslau, Stationspunkt auf der Sternwarte. Die Richtung zum Höhenfußpunkte bei der größten östlichen Digression des Sternes δ Ursae minoris, dessen Deklination $\delta = 86^0 36' 28{,}7''$ ist, lief über Teilstrich

$34^0 21' 12''$

und bei der größten westlichen über

$23^0 32' 12''$,

ferner die Richtung zum Signal auf dem trigonometrischen Punkte Goy (südlich bei Ohlau) über $174^0 42' 51''$. Man berechne für den Stationspunkt die Polhöhe, sowie das Azimut des Punktes Goy.

Es ergiebt sich $\varphi = 51^0 6' 56{,}2''$ (55,8″ oder 57,8″) und Azimut Goy $145^0 46' 9''$.

56. 3) durch **die Höhen eines Cirkumpolarsternes in demselben Azimut.** Hat man das Fernrohr des Theodoliten auf den Stern L_1 (Figur 31) eingestellt und die Höhe $L_1H = h_1$ abgelesen, so läßt man das Instrument auf dem Grundkreise fest (durch die Druckschraube D in Figur 19 zu Nr. 23), und ändert nur die Höhenrichtung des Fernrohrs, wenn man nach der erforderlichen Zeit sieht, daß der Stern wieder in das Gesichtsfeld des nur aufwärts beweglichen Fernrohrs kommen kann. Ist er eingetreten, so verbessert man die aufsteigende Richtung des Fernrohrs durch die Höhen-Mikrometerschraube (B in Figur 19) so, daß der langsam ziehende

Stern genau durch den Mittelpunkt des Fadenkreuzes wandert. Dann liest man $L_2H = h_2$ ab. Durch die Deklination des Sternes hat man mittels der Höhe $PJ = w$ des gleichschenkligen Dreiecks PL_1L_2

$$\cos w = \frac{\sin \delta}{\cos \frac{1}{2}(h_2 - h_1)}$$

die Polhöhe aus

$$\sin \varphi = \sin \frac{1}{2}(h_2 + h_1) \cos w$$

und das Azimut der Beobachtung aus

$$\operatorname{cotg} a = \cos \frac{1}{2}(h_2 + h_1) \operatorname{cotg} w,$$

wodurch die Lage des Meridians für die Station B bestimmt ist.

Beispiele. I. Brocken T. P. (d. h. trigonometrischer Punkt.) Für α Ursae majoris mit $\delta = 62^0\,26'\,28''$ ist gegeben

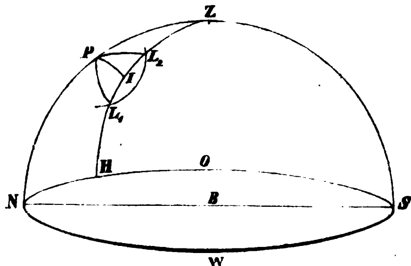
$$h_2 = 70^0\,47'\,14''$$
$$h_1 = 50^0\,51'\;\;9''.$$

Es ergiebt sich die Polhöhe $\varphi = 51^0\,48'\,10{,}5''$ (13″) und das Azimut der Beobachtung $a = 44^0\,47'\,19{,}85''$ (22″).

II. Memel, T. P. neben dem Leuchtturme. Für β Cephei, $\delta = 69^0\,59'\,55''$, ist

$$h_2 = 69^0\,35'\,58''$$
$$h_1 = 50^0\,44'\,57''$$

mit der Grundkreis-Ablesung $58^0\,0'\,56''$. Zur Richtung nach dem Signal in Nidden (auf der Kurischen Nehrung) gehörte dann $213^0\,6'\,35''$. Wie groß ist auf dem trigonometrischen Punkte Memel die Polhöhe, sowie das Azimut von Nidden?



Figur 31. Höhen eines Cirkumpolarsternes in demselben Azimut.

Antwort. Polhöhe $\varphi = 55^0\,43'\,40{,}2''$ (43,5″), und das Azimut von Nidden $187^0\,48'\,57''$ (59″).

57. 4) durch **Feststellen gleicher Höhen eines Sternes.***) Was in dem eben beschriebenen Verfahren am Höhenkreise des Theodoliten geschah, wird nun an seinem Grundkreise vorgenommen. Nach-

*) Dieses Mittel wurde zuerst von Regiomontan angewandt. Johannes Müller, geboren 1436 zu Königsberg in Unterfranken, nach seiner Vaterstadt Regiomontanus genannt, lebte seit 1471 in Nürnberg und starb 1476 in Rom.

dem man das Fernrohr auf den Stern L_1 eingestellt, die Höhe $L_1A_1 = h$ und am Grundkreise (wenn der Punkt F dessen Nullpunkte entspricht) $FWA_1 = a_1$ abgelesen hat, läßt man die festgezogene Preßschraube am Höhenkreise (K in Figur 19 zu Nr. 23) unberührt und dreht das Instrument auf dem Grundkreise herum, wenn nach der nötigen Zahl von Stunden der Stern, am Himmel absteigend, auf die gleiche Höhe kommen will. Hat man das Fernrohr genügend weit herumgedreht, so erscheint nun der Stern im Gesichtsfelde und man verbessert durch die Mikrometerschraube (f) das Azimut so, daß der Stern auf seinem Wege den Schnittpunkt der Spinnwebfäden trifft. Durch die Ablesung am Grundkreise, $FA_2 = a_2$, ist dann die zweite Stelle gefunden, an welcher die Höhe des Sternes der bei der ersten Beobachtung gleich ist. Durch $FN = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ ist die Lage der Mittagslinie, und durch $NA_1 = \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = a$ das Azimut der ersten Beobachtung gefunden. Die Polhöhe kann man auf zwei Weisen berechnen: 1) durch PL_1 und die Hilfsgröße tg v aus

$$\sin(\varphi + v) = \frac{\sin\delta \cos v}{\sin h}$$

oder 2) mittels des Winkels $ZPL_1 = t$ aus der ersten der Neperschen Analogien

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(90^0 - \varphi) = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta + h)\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a + t)}{\cos\frac{1}{2}(a - t)}.$$

Beispiele. I. Inselsberg, T. P. Bei α Aurigae, $\delta = +45^0\,51'\,56''$, gehören zur Höhe $h = 56^0\,25'\,37''$

$$a_1 = 198^0\,14'\,22''$$
$$\text{und } a_2 = 41^0\,53'\,32''.$$

Man bestimme die Nordrichtung der Mittagslinie nach der Stellung des Grundkreises, sowie die Polhöhe der Station.

Ergebnis. Der Teilstrich des Grundkreises $120^0\,3'\,57''$ und die Polhöhe aus Auflösung 1

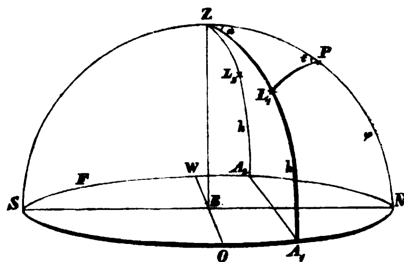
$\varphi = 50^0\,51'\,11{,}4''\ (11{,}4'')$

aus Auflösung 2

$\varphi = 50^0\,51'\,11{,}5''\ (11'')$.

II. Auf dem Seeberge bei Gotha hat man für β Tauri mit $\delta = +28^0 29' 48''$ zu $h = 56^0\,48'\,7''$

$$a_1 = 354^0\,28'\,8''$$
$$\text{und } a_2 = 114^0\,26'\,34''.$$



Figur 32. Gleiche Höhen eines Sternes.

Welcher Teilstrich bei dieser Stellung des Grundkreises bestimmt die Nordrichtung der Mittagslinie und wie groß ist die Polhöhe des Beobachtungsortes?

Antwort. Die Nordrichtung der Mittagslinie ist angegeben durch $234^0\,27'\,21''$ und es folgt die Polhöhe

aus Auflösung 1 $\varphi = 50^0\,56'\,5{,}9''\,(6{,}7'')$
aus Auflösung 2 $\varphi = 50^0\,56'\,6{,}0''\,(2{,}7'')$.

58. 5) **Zenitstern-Durchgänge durch den ersten Vertikal.***) Hat man auf eine dieser Weisen die Lage der Mittagslinie für den Beobachtungsort gefunden, so kann man die Polhöhe noch schärfer bestimmen, indem man die Durchgänge eines Sternes durch den ersten Vertikal beobachtet. (Nr. 29.) Eine noch vorhandene Ungenauigkeit in der Lage der Ost-West-Linie verliert ihren Einfluß, wenn man einen Stern wählt, der in der Nähe des Zenits durch den ersten Vertikal geht. Zu dieser Beobachtung muß man eine Uhr haben, deren Gang nach Sternzeit reguliert ist. (Nr. 39.) Wann das Chronometer 0^h zeigt, ist gleichgültig. Giebt es die Zeit t_1 an in dem Augenblicke, in welchem der Stern in L_1 die Osthälfte des ersten Vertikals OZW passiert, und die Zeit t_2 bei seinem Durchgange durch die Westhälfte (in L_2), so hat man, wenn man $\frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ in Graden, Minuten und Sekunden ausdrückt (Nr. 43), den Stundenwinkel t der zweiten Beobachtung und dadurch die Polhöhe aus

$$\cot g\,\varphi = \cos t \cot g\,\delta.$$

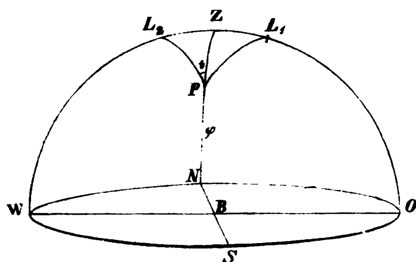
Beispiele. I. Am Herkules bei Kassel ergab die Beobachtung des Sternes 51 Cygni, dessen Deklination $\delta = +49^0\,53'\,41''$ ist,

$t_2 = 21^h\,50^m\,42{,}15^s$
und $t_1 = 19^h\,26^m\,5{,}65^s$.

Man berechne die Polhöhe beim Herkules.

Ergebnis.

$\varphi = 51^0\,19'\,0{,}75''\,(2{,}35'')$.



Figur 33. Durchgänge durch den ersten Vertikal.

*) Bessels Bestimmungsweise. Schumachers astronomische Nachrichten Nr. 49 (Bd. 3, 1825). Bessel hebt hervor, daß auf diese Weise bei bekannter Polhöhe die Deklinationen der oberhalb des Äquators stehenden Sterne gefunden werden können unabhängig von der Strahlenbrechung, und teilt mit, daß schon Olof Römer 1704 ein Passageninstrument von Ost nach West aufstellte zur Beobachtung der Deklinationen.

II. Auf dem Kyffhäuser, T. P., wurde ϑ Cygni, $\delta = +49^0 55' 57''$, beobachtet zur Zeit

$$t_2 = 20^h 46^m 56{,}3^s$$
$$\text{und } t_1 = 18^h 19^m 19{,}6^s.$$

Wie groß ist demnach die Polhöhe dieses Punktes?

Antwort. $\varphi = 51^0 24' 52{,}9'' (53{,}2'')$.

III. Zu Harzburg ging γ Draconis, dessen Deklination $\delta = +51^0 30' 20''$ ist, durch den ersten Vertikal zur Zeit

$$t_2 = 18^h 31^m 56{,}0^s$$
$$\text{und } t_1 = 17^h 15^m 33{,}4^s.$$

Welchen Wert erhält dadurch die Polhöhe dieses Ortes?

Antwort. $\varphi = 51^0 53' 39{,}24'' (37{,}7'')$.

59. 6) durch **Cirkummeridian-Zenitdistanzen.** Ist die Polhöhe des Ortes angenähert bekannt, so findet man sehr genau ihren wirklichen Wert durch Messen der Zenitdistanzen eines Sternes in der Nähe des Meridians. Dabei ist eine Uhr erforderlich, von der man, nach Beobachtungen auf einer Sternwarte, weiß, daß sie α Stunden zeigt, wenn der gewählte Stern kulminiert. Giebt sie bei der Messung schon die Zeit u an, so liefert $u - \alpha$, in Grade verwandelt, den Stundenwinkel t des Sternes für die Beobachtung. Führt man seine Hälfte ein in die Kosinusformel für z (Figur 34), so erhält man

$$2 \cos\varphi \cos\delta \sin^2 \tfrac{1}{2} t = 2 \sin \tfrac{1}{2} (z + \varphi - \delta) \sin \tfrac{1}{2} [z - (\varphi - \delta)].$$

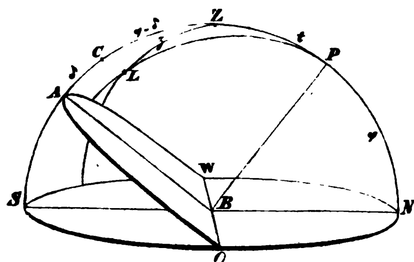
$\varphi - \delta$ ist aber die Meridianzenitdistanz CZ des Sternes, und diese ist um die geringe Größe x kleiner als die gemessene Zenitdistanz z. Deshalb ist für den letzten Sinus, $\sin \frac{1}{2} x$, der Bogen, $\frac{1}{2} x \sin 1''$, einzuführen, und man hat für x, in Sekunden, den Ausdruck

$$x = \frac{2 \cos\varphi \cos\delta}{\sin 1''} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2} t}{\sin \frac{1}{2} (z + \varphi - \delta)}$$

und nun die Polhöhe $\varphi = \delta + z - x$, wobei die Verbesserung um so genauer ausfällt, wenn man einen Stern mit kleiner Deklination wählt.

Beispiel. Die Marienkirche in Berlin befindet sich im Nordnordosten von der Sternwarte, deren Polhöhe $52^0 30' 16{,}7''$ ist. (Nr. 40.) Da nun, wie obige Beispiele zeigen, die Polhöhe eines nördlicheren Punktes größer wird, so ist als vorläufiger Wert von φ $52^0 31'$ zu nehmen. Der Punkt, dessen Polhöhe bestimmt werden soll, ist die Mitte des nicht gleichseitigen Achtecks, über

welchem, von 12 hohen Säulen getragen, der Helm des Turmes sich wölbt. Von dieser Stelle gesehen, hat der Stern α Orionis, dessen Deklination $\delta = +7^0\,22'\,50{,}0''$ ist, und welcher zur Zeit $\alpha = 5^h\,48^m\,14{,}9^s$ kulminiert, die Zenitdistanz $z_1 = 45^0\,11'\,2''$ um $u_1 = 5^h\,57^m\,48{,}9^s$, und bei der Distanz $z_2 = 45^0\,11'\,55''$ tritt er hinter den Querfaden des Fernrohrs um $u_2 = 5^h\,59^m\,21{,}1^s$. Man berechne aus beiden Angaben die Polhöhe für diesen Punkt.



Figur 34. Eine Cirkummeridian-Zenitdistanz.

Die beiden Berechnungen ergeben

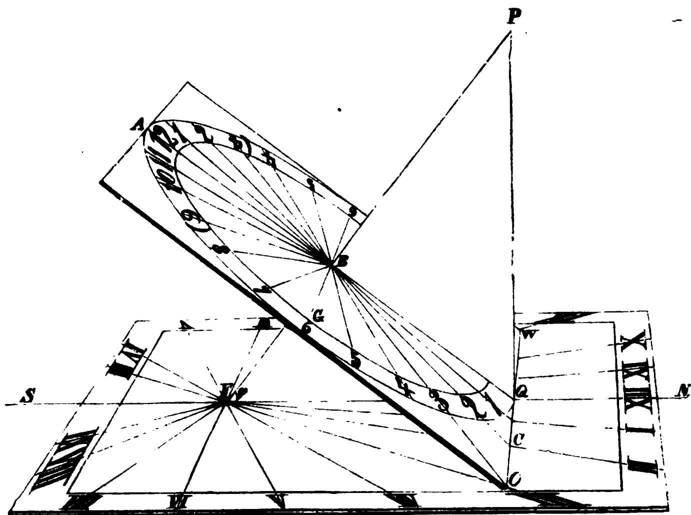
$$\varphi_1 = 52^0\,31'\,19{,}080''\,(19{,}084'')$$
$$\varphi_2 = 52^0\,31'\,19{,}046''\,(19{,}050'')$$

daher das arithmetische Mittel

$$\varphi = 52^0\,31'\,19{,}06''\,(19{,}067'').$$

§ 9. Rektascension und Deklination.

60. Wahre Sonnenzeit. Sonnenuhr. War das Gestirn, welches wir bei der Erklärung der Stundenwinkel betrachteten, die

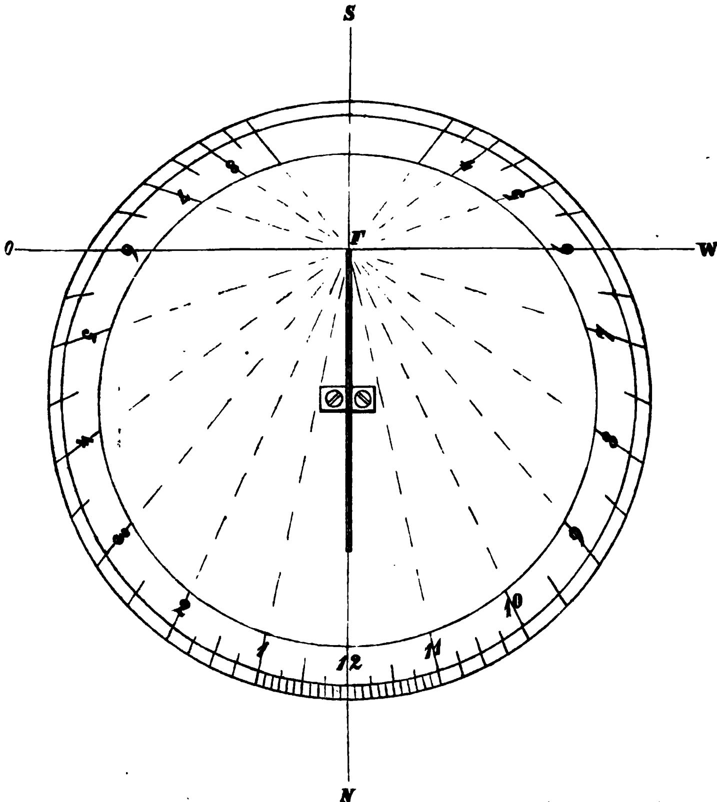


Figur 35. Eine Äquatorial- und eine Horizontal-Sonnenuhr.

Sonne, so bietet der Schlagschatten, welchen ein geradkantiger Körper auf eine Ebene wirft, ein bequemes Mittel, die Größe der Stundenwinkel abzulesen, vorausgesetzt, daß die schattenwerfende Kante die Richtung der Weltachse hat. Der Theodolit in der in Nr. 43 besprochenen schiefen Stellung läßt sich dann ersetzen durch ein einfaches Instrument, welches wahre Sonnenzeit angiebt. Bei den am leichtesten zu fertigenden Sonnenuhren ist die Ebene, auf welche der Schatten fällt, entweder die Ebene des Himmelsäquators, oder die des Horizontes.

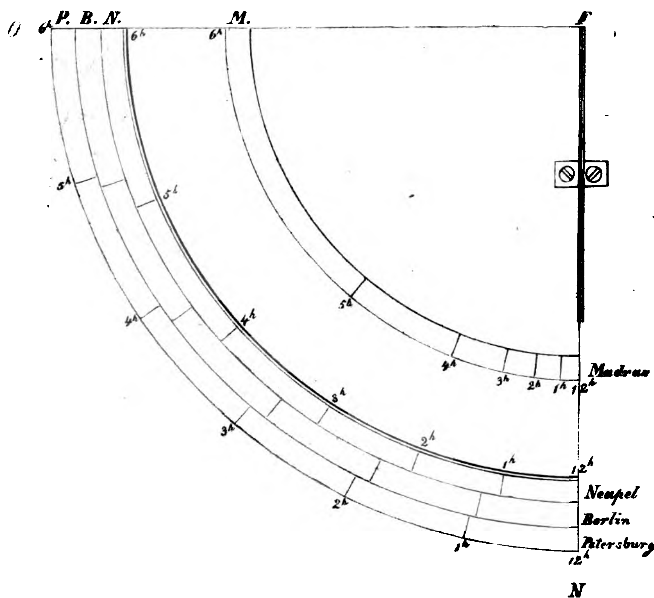
Wie der Leser sich eine Äquatorial- und eine Horizontal-Sonnenuhr genau anfertigen kann und sie richtig aufstellen muß*), zeigt die Figur 35 deutlich. — Man betrachte zunächst die

*) Dabei kann man sich einer Magnetnadel bedienen mit Berücksichtigung ihrer magnetischen Deklination (im Jahre 1880 11° 30′ westlich, jährliche Abnahme 8′), oder besser nach Nr. 28.



Figur 36. Zifferblatt einer Horizontal-Sonnenuhr für Berlin.

Äquatorialuhr AGQPF, die auf der unteren Seite des Brettes AOW ein ebensolches Zifferblatt nebst Sonnenweiser BF haben muß. — Aus ihr entsteht die Horizontaluhr, indem man die von den Schattenlinien B1, B2, B3 . . . getroffenen Punkte des Horizontalbrettes NOSW mit dem Fußpunkte F des Sonnenweisers PFQ verbindet. — Aber auch ohne die Äquatorialuhr so aufzubauen, läßt sich die Zeichnung des Zifferblattes der Horizontaluhr ausführen. Die Figur 35 vom Standpunkte N aus ansehend, denke man das Dreieck BFQ, es drehend um FQ, seitwärts und die Kreisebene AGQ, sie um OW drehend, nach vorn in die horizontale Zeichenebene niedergeklappt. Man trägt also zuerst an eine auf dem Zifferblatte von oben (S) nach unten gezogene Gerade SN einen Winkel B_1FN gleich der Polhöhe φ an; (die Buchstaben sind mit Rücksicht auf die Bezeichnung in Figur 35 gewählt) fällt von irgend einem Punkte der Linie SN ein Lot, QB_1, trägt es von Q aus auf QN ab, beschreibt damit um den erhaltenen Punkt B_2 einen Kreisquadranten, wie QG (denn der ganze Äquatorkreis ist nicht nötig), und teilt ihn, wenn man die Schattenstriche nur für die ganzen Stunden haben will, in 6 gleiche Teile, verlängert die durch die Theilpunkte gehenden Radien bis zur Tangente in Q und zieht nach den Treffpunkten von F aus die Schattenlinien. — Bei dem entstehenden Zifferblatte müssen die Schattenlinien sowohl um die Mittagslinie, als auch um die Ost-



Figur 37. Quadranten der Zifferblätter horizontaler Sonnenuhren für Orte von verschiedener Polhöhe.

West-Linie, symmetrisch liegen. — Die Abgrenzung des Zifferblattes ist beliebig, am besten excentrisch, so daß das Centrum der Schattenlinien, F, die Mitte des nach Süden gehenden Radius des Zifferblattes ist (Figur 36), oder in gleicher Weise außerhalb des Mittelpunktes eines Quadrates, wie Figur 35, weil sonst bei beschränkter Größe des Zifferblattes die Teilstriche gerade an der besten Stelle am dichtesten gedrängt stehen, nämlich um die Stundenzahl 12 herum, wo der Schlagschatten am schärfsten begrenzt ist.

Auf der Horizontal-Sonnenuhr ändern die Teilstriche ihre Lage für Orte von verschiedener Polhöhe, da bei demselben BQ die Kathete QO andere Entfernung vom gegenüberliegenden Eckpunkte F erhält, während die Teilpunkt-Abstände, wie QC, dieselbe Größe behalten. In welcher Weise und wie stark sie zusammenrücken bei südlicher liegenden Orten (deren Polhöhe, nach den Beispielen in Nr. 54 bis 59, kleiner ist), zeigt Figur 37. In derselben ist der Fußpunkt F des Sonnenweisers als Mittelpunkt des Quadranten genommen; ihm sind die andern Quadranten symmetrisch. Es ist die Polhöhe von Petersburg $59^0 56'$, von Berlin $52^0 30'$, von Neapel $40^0 51'$ und von Madras (in Vorder-Indien) $13^0 4'$.

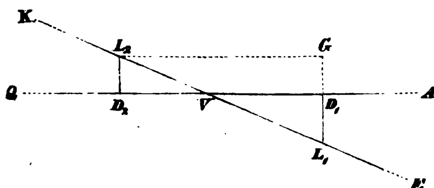
Anmerkung. Wie die Äquatorialuhr auf die Horizontalebene SOW übertragen wurde, so kann man aus ihr oder aus der Horizontaluhr das Zifferblatt einer Sonnenuhr auf einer irgendwie gerichteten Wand oder auf einer schiefen Ebene hervorgehen lassen. Man bringt z. B. die Horizontaluhr nahe jener Wandfläche genau in ihre richtige Stellung, verlängert einen beim Fußpunkte F befestigten Faden in der Richtung FP bis zur Wand; dann giebt der Faden die Lage des neuen Sonnenweisers an; die getroffene Stelle der Wand wird sein Fußpunkt F_1. Darauf führt man den Faden auf jeder Stundenlinie hin bis zur Wand, und markiert dort. Verbindet man endlich die Marken mit dem Fußpunkte F_1, so hat man die Schattenlinien der gewünschten Sonnenuhr; denn sie bilden mit dem Faden und der Kante des Sonnenweisers Dreiecke, deren Ebenen den Schattenkörper von Stunde zu Stunde begrenzen.*)

61. Äquinoktialpunkte. Beobachtet man mit dem Fernrohr des wie in Nr. 43 aufgestellten Theodoliten täglich die Sonne, so zeigt sich, daß sie im Winter unter, im Sommer über dem Himmelsäquator sich befindet. Deshalb sehen wir sie im Winter einen Tagbogen, wie ACU (Figur 24 in Nr. 33), und im Sommer einen weit größeren, $A_1C_1U_1$, beschreiben. Aus der Figur 24 ist also deutlich, warum im Winter die Nächte lang, im Sommer kurz sind. —

*) Am einfachsten wird es, wenn man, nachdem der Zeiger in die Richtung der Weltachse gebracht ist, nach einer Uhr stündlich die derzeitige Lage des Schattens nachzieht. (Dabei ist Nr. 83 zu beachten.)

Der Mittelpunkt der Sonne tritt am 21. März von der südlichen auf die nördliche Himmelshalbkugel, und am 23. September von der nördlichen wieder auf die südliche. An diesen beiden Tagen durchschneidet der Äquator die Sonne, und Nacht und Tag sind einander gleich. (Figur 26 in Nr. 43.) Deshalb heißen die beiden Punkte des Äquators, welche der Sonnenmittelpunkt passiert, die Nachtgleichepunkte (Äquinoktialpunkte), und zwar der, bei welchem die Sonne am 21. März, dem Anfange des Frühlings, von der südlichen zur nördlichen Halbkugel aufsteigt, der Frühlingsnachtgleichepunkt, Frühlingspunkt oder **Widderpunkt**, der andere der Herbstnachtgleichepunkt.

62. Ermittelung des Widderpunktes. Um die Lage des Widderpunktes zu ermitteln, sucht man die Deklination des Sonnenmittelpunktes am 20. und 21. März. Zu dem Zweck beobachtet man die Höhe des obersten oder des untersten Punktes des Sonnenrandes bei der Kulmination, mißt im Laufe dieser Tage den scheinbaren Sonnendurchmesser (Anmerkung zu Nr. 22), und findet dadurch nach Abzug der Äquatorhöhe sehr genau die Deklination des Sonnenmittelpunktes. Sie betrug am 20. März 1871 $-0^{0}\,13'\,55''$ und am 21. März $+0^{0}\,9'\,45''$. Ferner notiert man mit dem Chronographen (Nr. 25) den Augenblick, in welchem der letzte Punkt des Sonnenrandes den Vertikalfaden des Meridianfernrohrs verläßt. Da nun der scheinbare Sonnenradius ϱ Bogenminuten ($16'\,5''$) beträgt, jede Bogenminute des Äquators aber bei der Umdrehung der Himmelskugel in 4 Sekunden hinter dem Vertikalfaden vorbeizieht, so war der Moment der Kulmination des Sonnenmittelpunktes $\varrho \cdot 4$ Sekunden früher, als der notierte Augenblick. Dieser Moment, der sich mit großer Schärfe bestimmen läßt, möge am 20. März nach jener Pendeluhr zur Zeit t (in Stunden, Minuten und Sekunden ausgedrückt) stattgefunden haben. Dieselbe Uhr zeigte am 21. März bei Kulmination des Sonnenmittelpunktes $t + 3^{m}\,38^{s}$. — Da aber der Punkt der Himmelskugel, welchen der Sonnenmittelpunkt am 20. März verdeckte, stets genau wieder zur Zeit t kulminiert, so lehrt diese Zeitangabe, daß die Sonne beim Durchlaufen des Tag- und Nachtbogens hinter den Sternen zurückbleibt. Aus diesen überschüssigen $3^{m}\,38^{s}$ erfährt man die Größe des Äquatorbogens zwischen den Fußpunkten der beiden Deklinationen (Figur 26 in Nr. 43), nämlich $54\frac{1}{2}$ Bogenminuten; und nun kann man die Stelle des Himmelsgewölbes, an



Figur 38. Zur Ortsbestimmung des Widderpunktes.

welcher der Sonnenmittelpunkt am 20. und 21. März gesehen wurde, durch eine Zeichnung darstellen. In Figur 38 ist für jede Bogenminute $\frac{1}{2}$ Millimeter genommen. Es sei AQ jenes Stück des Äquators, D_1D_2 der Abstand der Deklinationsfußpunkte, D_1L_1 die Deklination des Sonnenmittelpunktes L_1 für den 20., D_2L_2 die für den 21. März; und diese Bogen werden, da sie ja nur Minuten betragen, in der Figur als gerade Linien erscheinen. Der Sonnenmittelpunkt ist in der Zeit vom Mittag des 20. zum Mittag des 21. März von L_1 nach L_2 gekommen, und V ist der zu bestimmende Widderpunkt, für dessen Lage die in der Figur gezogene Hilfslinie L_2G leicht erkennen läßt

$$D_1V = \frac{D_1L_1}{D_1L_1 + D_2L_2} \cdot D_1D_2.$$

Die Ausrechnung ergiebt $D_1V = 32$ Bogenminuten. Die Kulmination des Punktes V erfolgte mithin $2^m 8^s$ später als die der Punkte D_1 und L_1, also zu der Zeit, als die Pendeluhr $t + 2^m 8^s$ zeigte. (Vergl. Figur 26 in Nr. 43.)

63. 0^h Sternzeit. Um nun bei der täglichen Umdrehung der Himmelskugel in jedem Augenblicke den Stand des Widderpunktes ablesen zu können, stellt man die Hauptuhr einer Sternwarte so, daß sie 0^h zeigt, wenn der Widderpunkt kulminiert. Dies würde man nach vorstehendem Beispiele dadurch erreichen, daß man die Hauptuhr, nachdem sie am 21. März angehalten ist, als sie auf $0^h 0^m 0^s$ stand, anstößt, wenn jene Pendeluhr am 22. März wieder $t^h + 2^m 8^s$ zeigt; denn in diesem Augenblicke kulminiert der Widderpunkt.

Den Bogenabstand des Widderpunktes von demjenigen Äquatorpunkte, welcher in irgend einem Momente kulminiert, giebt die Uhr aufs genaueste an. Denn zeigt sie z. B. $4^h 12^m 46{,}5^s$, so hat der Bogen $63^0 11' 37{,}5''$. (Nr. 43.)

64. Rektascension. Der Äquatorbogen, vom Widderpunkte in der der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Richtung, bis zum Fußpunkte der Deklination eines Sternes, heißt seine gerade Aufsteigung oder Rektascension (ascensio recta, abgekürzt geschrieben AR).*) Für jeden Stern haben die Astronomen 1) die Rektascension, durch Beobachtung seiner Kulminationszeit, und 2) die Deklination — seine Kulminationshöhe, vermindert um die

*) Hipparch (Nr. 96) hat den Frühlingspunkt als Anfangspunkt eingeführt. Schiefe Aufsteigung, ascensio obliqua, hieß in der älteren Astronomie der Äquatorbogen vom Widderpunkte bis zu demjenigen Punkte des Äquators, welcher mit dem Sterne zugleich aufgeht. (S. Figur 26 in Nr. 43.)

Äquatorhöhe, (Nr. 44) — genau gemessen und in Sternkataloge eingetragen. So z. B.

1872	AR	Decl.
β Orionis	5h 8m 23s	— 8° 21′ 6″
γ Ursae majoris	11 47 5	+ 54 24 23
α Lyrae	18 32 36	+ 38 39 58

65. Ein Himmelsglobus. Nach diesen Verzeichnissen wird ein Himmelsglobus angefertigt, indem man auf einer um eine Achse drehbaren Kugel den Äquator zeichnet, einen seiner Punkte als Widderpunkt wählt, und von hier aus, wenn man den Äquator vom Nordpole aus ansieht, in der dem Uhrzeigerlaufe entgegengesetzten Richtung die Rektascension aufträgt, und von dem durch den erhaltenen Endpunkt gehenden Meridiane die Deklination abschneidet. Dort ist der betreffende Stern zu zeichnen.

Rektascension und Deklination sind also Koordinaten, durch welche der Ort eines Punktes an der Himmelskugel genau bestimmt ist; die Rektascension ist seine Abscisse, die Deklination seine Ordinate. Es ist das dritte Koordinatensystem, das für den Äquator.

§ 10. Zeitbestimmung

zur Kontrolle einer nach Sternzeit gehenden Uhr

66. 1) durch **Meridiandurchgänge.** Ist die Lage des Meridians schon genau bestimmt, so beobachtet man bei bekannten Sternen die Zeit ihres Durchgangs durch den Meridian. Die bekannte Rektascension des Sternes sagt, wie viel Stunden, Minuten und Sekunden eine richtig gehende Uhr bei seiner Kulmination zeigen muß. Die Beobachtung giebt also unmittelbar den gegenwärtigen Fehler in der Zeitangabe der zu kontrollierenden Uhr.

Beispiel. In der folgenden Tabelle ist Spalte 4 aus 3 hervorgegangen (mit der Polhöhe 51° 48′) für die zur Beobachtung nötige Höhenstellung des Fernrohrs. (Figur 34 in Nr. 59, Nr. 44.) Spalte 6 sagt, was die Uhr zeigte im Augenblicke der Kulmination des Sternes. Der in Spalte 7 aus 5 und 6 berechnete Uhrstand giebt die Zahl der Sekunden an, welche man zur Angabe der Uhr hinzufügen muß, um die wahre Zeit zu erhalten.

Beobachtung auf dem Brocken, 1874, Juni 17, mit einem Chronographen.*)

*) Publikation des Königl. preußischen geodätischen Instituts. Astronomisch-geodätische Arbeiten in den Jahren 1873 und 1874. Berlin, 1875, P. Stankiewicz. Seite 32 und 34, sowie S. 10.

1. Stern	2. Größe	3. Deklin.	4. Kulm.-Höhe	5. Rektascension	6. im Meridian	7. Uhrstand
B. A. C.*) 5456	5,0	+ 1°20′	39°32′	$16^h 15^m 43,74^s$	$16^h 15^m 30,96^s$	$+12,78^s$
„ 5490	5,2	+14 20	52 32	19 38,26	19 25,46	+12,80
„ 5520	4,0	+ 2 16	40 28	24 35,76	24 22,85	+12,91
„ 5532	5,2	+11 46	49 58	26 44,67	26 31,81	+12,86
Mitte der 1. Beobachtungsreihe $16^h 21^m$,					Mittel	$+12,84^s$
Lalande 34226	6,5	+17°54′	56° 6′	$18^h 23^m 49,93^s$	$18^h 23^m 36,92^s$	$+13,01^s$
„ 34350	6,2	+ 8 11	46 23	27 22,33	27 9,31	+13,02
„ 34725	6,3	+15 5	53 17	36 56,80	36 43,83	+12,97
B. A. C. 6387	4,0	+20 26	58 38	40 16,52	40 3,52	+13,00
Mitte der 2. Beobachtungsreihe $18^h 32^m$,					Mittel	$+13,00^s$.

Die zweite Verbesserung der Uhrangabe ist größer, als die erste. Die Uhr hatte also in der Zwischenzeit einen zu langsamen Gang. Sie war in $2^h 11^m$ um $0,16^s$ weiter zurückgeblieben. Hieraus hatte man den stündlichen Gang der Uhr $+ 0,073^s$ und berechnete daraus die Zeitverbesserung für die einzelnen Beobachtungen, welche in den dazwischen liegenden 2 Stunden angestellt wurden.

Anmerkung. Bei nicht hinreichend sicherer Kenntnis der Meridianlage wählt man zur Kulminationsbeobachtung Sterne, welche nahe durch das Zenit des Beobachtungsortes gehen. Denn dort übt der Azimutfehler der genommenen Mittagslinie keinen Einfluß aus auf die Zeitbestimmung.

67. 2) durch **gleiche Höhen** eines Sternes. Man beobachtet einen Stern vor und nach seiner Kulmination in gleichen Höhen. (Nr. 57) Ist u_1 die Uhrzeit bei der ersten Höhe und u_2 die bei der zweiten, so war $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ die Uhrangabe im Augenblicke der Kulmination des Sternes. Diese müßte gleich der bekannten Rektascension α dieses Sternes sein. Mithin hat man den Stand der Uhr $= \alpha - \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.

Diese Methode ist die sicherste, um die Zeit durch Höhenbeobachtungen zu bestimmen. Man braucht dazu weder die Lage des Meridians genau zu kennen (man findet sie hierbei zugleich mit, Nr. 57), noch die Polhöhe des Ortes, auch nicht die Deklination des Gestirns; auch ist man unabhängig von den kleinen Teilungsfehlern an den Kreisen des Theodoliten (kann also mit einem minder kostbaren Instrumente beobachten); nur muß man eine gute Uhr haben,

*) The catalogue of stars of the British Association for the advancement of science. London, 1845. (Ein Verzeichnis von 8377 Fixsternen nach Rektascension und Poldistanz.)

von der man hinreichend sicher ist, daß sie in der Zwischenzeit ihren gleichförmigen Gang ruhig beibehält.

68. 3) durch **Zenitdistanzen.** Wenn ein Stern von bekannter Deklination in dem Gesichtsfelde des Fernrohrs erscheint, verändert man durch die Mikrometerschrauben die Richtung des Fernrohrs so, daß der Stern durch den Schnittpunkt der Spinnwebfäden wandert. Die Uhrzeit des Durchgangsaugenblicks notiert man und liest darauf die Zenitdistanz z am Höhenkreise ab.*)

In dem Dreiecke Pol-Zenit-Stern (Figur 34 in Nr. 59) hat man nämlich durch den Kosinussatz für die Seite z den ihr gegenüberliegenden Stundenwinkel aus

$$\cos t = \frac{\cos z - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}.$$

Zur bequemeren logarithmischen Rechnung subtrahiert man diese Gleichung von $1 = 1$, führt nach bekannten Zusammenziehungen $m = \frac{1}{2}(\varphi + \delta + z)$ ein, verfährt dann ebenso, indem man jene Gleichung zu $1 = 1$ addiert, und hat durch Division der Ergebnisse

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} t = \sqrt{\frac{\sin(m - \delta)\sin(m - \varphi)}{\cos m \cos(m - z)}}.$$

Das Minuszeichen setzt man vor die Quadratwurzel, wenn die Beobachtung des Sternes auf der Ostseite des Meridians stattgefunden hatte.

Der hieraus berechnete Stundenwinkel t, in Zeit verwandelt, kommt zu dem Zeitausdrucke der Rektascension α des Sternes hinzu und giebt dann die Sternzeit ϑ des Beobachtungsaugenblicks an, (vergl. Stern L_2 in Figur 26 zu Nr. 43) also

$$\vartheta = \alpha + t.$$

Die Uhrangabe dieses Moments war aber u; mithin ist der gesuchte Uhrstand $\vartheta - u$, und zwar in dieser Ordnung der Glieder der Differenz mit demjenigen Vorzeichen, welches der Größe zukommt als Verbesserung, die zur Zeitangabe der Uhr hinzugefügt werden muß.

Beispiel. Am Herkules bei Kassel, wo die Polhöhe $\varphi = 51^0 19' 0''$ ist, (Nr. 58,I) wurde am 24. August um 8 Uhr abends der Stern α Bootis (Rektascension $\alpha = 14^h 9^m 49{,}8^s$ und Deklination

---

*) Hat man zur Beobachtung einen Sextanten (Nr. 22), so wählt man einen Stern erster Größe oder den (unteren) Sonnenrand, den man in einem mit Quecksilber gefüllten Kasten von etwa 15 cm Länge, 8 cm Breite und 6 mm Tiefe („Quecksilberhorizont") sich spiegeln läßt. Dadurch erhält man die doppelte Höhe. (Bei Sonnenbeobachtungen kann man statt des Quecksilbers auch Öl nehmen, dessen Oberfläche nicht so leicht in Wellenbewegung gerät.) Über dem Seehorizont beobachtet man in der Regel den Unterrand des Gestirns.

$\delta = 19^0\,51'\,4''$) beobachtet in der Zenitdistanz $z = 56^0\,22'\,9''$. Als der Stern den Querfaden des Fernrohrs passierte, zeigte die Uhr $u = 18^h\,12^m\,20{,}5^s$. Man bestimme den Uhrstand.

Man findet

$$t = 60^0\,34'\,51{,}09''\ (48{,}8'')$$
$$\text{in Zeit} = 4^h\,2^m\,19{,}4^s\ (19{,}3^s)$$

und den Uhrstand

$$\vartheta - u = -0^m\,11{,}3^s\ (-\,0^m\,11{,}4^s).$$

Die Uhr ging also 11,3 Sekunden vor. (Das Minuszeichen sagt, daß die Uhr zurückgestellt werden müßte.)

§ 11. Ekliptik. Länge und Breite.

69. Die Ekliptik. Beobachtet man täglich bei der Kulmination der Sonne Rektascension und Deklination ihres Mittelpunktes, und trägt mittels dieser Koordinaten den Ort der Sonne, den sie im Augenblicke der Beobachtung einnahm, auf dem Himmelsglobus ab, so sieht man, daß alle diese Punkte auf einem Kreise liegen, der den Äquator in einem Durchmesser schneidet, also selber ein größter Kreis der Himmelskugel ist, und daß der Sonnenmittelpunkt diesen Kreis, welcher die Ekliptik heißt,*) in der der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Richtung beschreibt. Bei diesem Einzeichnen der Sonnenstandorte kommt man, wenn man außer dem als Ausgangspunkt zu betrachtenden ersten Punkte noch 365 Stellen der täglichen Kulminationen auf dem Globus markiert hat, mit den folgenden wieder zwischen die zuerst gezeichneten Punkte; so daß also mit 365 Tagen der Ring sich geschlossen hat. Diese Umlaufszeit hat man als größere Einheit für die Zeiteinteilung gewählt und ein Jahr genannt.

70. Die Zeichen des Tierkreises. Man zerlegt die Ekliptik, vom Widderpunkte an, in 12 gleiche Teile. Die Teilpunkte, Zeichen genannt, führen die Namen der benachbarten Sternbilder, deren Folge man, seit den ältesten Zeiten, den Tierkreis (Zodiakus) nennt. Sie sind mit den beigesetzten astronomischen Zeichen, in der Richtung des Sonnenlaufs, also links herum:

*) Der Name Ekliptik, d. h. Bahn der (Sonnen- und Mond-) Finsternisse, ist erst seit dem Jahre 405 durch Makrobius in Gebrauch; früher bezeichnete man diese Bahn als den gegen den Äquator schiefen Kreis des Zodiakus.

Widder ♈, Stier ♉, Zwillinge ♊;
Krebs ♋, Löwe ♌, Jungfrau ♍;
Wage ♎, Skorpion ♏, Schütze ♐;
Steinbock ♑, Wassermann ♒, Fische ♓.

Sie sind leicht zu behalten durch die beiden Hexameter:

Sunt: Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libra*que,* Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

71. Ort des Widderpunktes. Die Stelle der Himmelskugel, an welcher der Widderpunkt sich befindet, markiert sich nicht durch irgend einen hellen Stern. Will man auf diese Gegend des Sternhimmels hinweisen, so verfolge man vom Polarstern aus den durch β Cassiopeiae gehenden Meridian. Dabei kommt man durch einen Stern erster Größe, α Andromedae. Vom Polarstern bis β Cassiopeiae, von da bis α Andromedae und von hier bis zum Widderpunkte sind drei gleiche Strecken des Quadranten.

72. Abweichung der wahren Sonnenzeit von der Sternzeit. Weil die Sonne bei der täglichen Umdrehung der Himmelskugel stets hinter den Sternen zurückbleibt, so ist ein Sonnentag — die Zeit von einer Sonnenkulmination bis zur folgenden — länger als ein Sterntag. Die Stunden einer nach Sternzeit gehenden Pendeluhr sind also kürzer als die Stunden, welche eine Sonnenuhr angiebt.

73. Schiefe der Ekliptik. Ist die Rektascension der Sonne auf 6^h angewachsen, was am 21. Juni eintritt, so sind die Endpunkte der zugehörigen Deklination (wie leicht zu beweisen) die Halbierungspunkte des Ekliptik- und des Äquatorhalbkreises, und der auf der Deklination stehende Centriwinkel ist der Neigunswinkel der Ebene der Ekliptik gegen die Ebene des Äquators. Dieser Winkel heißt die **Schiefe der Ekliptik** und wird mit ε bezeichnet.

Am 21. Juni 1872 war in Berlin die Kulminationshöhe des obersten Punktes des Sonnenrandes $61^0\,12'\,51''$, der scheinbare Sonnendurchmesser betrug $31'\,31''$. Daraus ergiebt sich (vergl. Nr. 44, 41 und 40) die Deklination des Sonnenmittelpunktes, die unter den im Sommerhalbjahre aus den Kulminationshöhen berechneten die größte ist,

$$D_1 = 23^0\,27'\,22{,}2''.$$

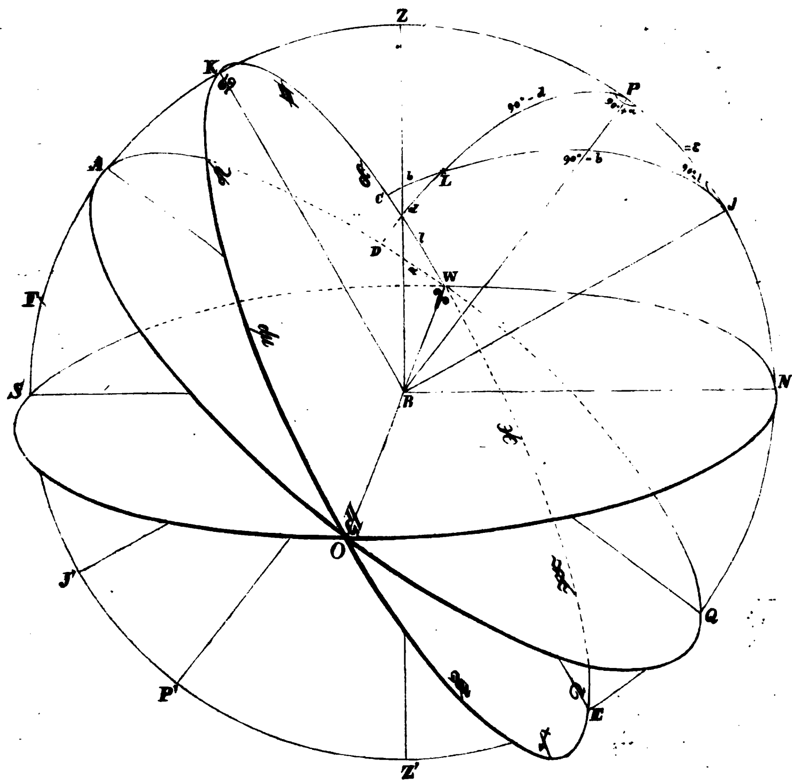
Im Augenblicke der Kulmination des Sonnenmittelpunktes war seine Rektascension $6^h\,1^m\,19^s$; er hatte also den Halbierungspunkt des Ekliptikhalbkreises am Vormittage schon überschritten (denn am 20. Juni war bei der Kulmination die Rektascension erst $5^h\,57^m\,10^s$). Des-

halb kann D_1 dem Werte von ε nicht vollkommen gleich sein, muß ihm aber sehr nahe kommen.

Hiernach ist in Figur 39 die Lage der Ekliptik EK für den Augenblick gezeichnet,*) in welchem der Widderpunkt ♈ untergeht. Das Zeichen des Krebses ♋ steht (bei K) in seiner oberen, das des Steinbocks ♑ (bei E) in seiner unteren Kulmination. Das Zeichen des Steinbocks ♑ vollzieht bei der Umdrehung der Himmelskugel seine obere Kulmination im Punkte F. Steht also die Sonne im Zeichen des Steinbocks, was am 21. Dezember stattfindet, so muß sich auch aus dieser Kulminationshöhe eine Deklination ergeben, die der Schiefe der Ekliptik ε sehr nahe gleich ist.

---

*) Für das Zeichnen ist zu merken, daß ε wenig größer ist, als der vierte Teil von 90°. In der dargestellten Lage ist die Figur am deutlichsten für die Entwicklung der Formeln. (Vergleiche Figur 26 in Nr. 43.)



Figur 39. Die Ekliptik.

Die Höhe des obersten Punktes des Sonnenrandes bei der Kulmination am 21. Dezember 1872 wurde gefunden $14^0\,18'\,36''$, der scheinbare Sonnendurchmesser $32'\,35''$. Daraus folgt

$$D_2 = 23^0 27' 24{,}8''.$$

Die Rektascension war am 21. Dezember $17^h\,59^m\,51^s$. Bei der Kulmination ging also der Sonnenmittelpunkt dem Halbierungspunkte des Ekliptikhalbkreises unmittelbar voran; er folgte ihm am 22. Dezember in viel größerer Entfernung; denn da war die Rektascension des Sonnenmittelpunktes $18^h\,4^m\,18^s$.

Anmerkung. Um zu sehen, wie weit D_1 und D_2 als Werte für die Schiefe der Ekliptik ε zuverlässig sind, kann man aus ihnen als Kontrolle die Polhöhe φ bestimmen. Denn sind h_1 und h_2 die Kulminationshöhen des Zeichens des Krebses und des Steinbocks, so ist

$$\tfrac{1}{2}(h_1 + h_2) = 90^0 - \varphi.$$

Setzt man nun hier die Kulminationshöhen des Sonnenmittelpunktes am 21. Juni und 21. Dezember statt h_1 und h_2 ein, so ergiebt sich $\varphi = 52^0\,30'\,18''$, was dem wahren Werte $52^0\,30'\,16{,}7''$ (Nr. 40) außerordentlich nahe kommt.

74. Länge und Breite eines Sternes. Denkt man an der Himmelskugel (Figur 39 in Nr. 73) einen Bogen eines größten Kreises von einem Sterne L rechtwinklig zur Ekliptik gelegt, so heißt der Bogen der Ekliptik, vom Widderpunkte in der Richtung des Fortschreitens der Sonne (links herum) bis zum Fußpunkte jenes Bogens, $♈C = 1$, die Länge des Sternes, der rechtwinklig darauf gezogene Bogen, $LC = b$, die Breite des Sternes.

Länge und Breite sind das vierte Koordinatensystem an der Himmelskugel, nämlich das für die Ekliptik.

75. Solstitialpunkte. Wendekreise. Nähert sich der Sonnenmittelpunkt dem Zeichen des Krebses und rückt er nach dem Überschreiten weiter vor, so ändern sich während dieser Zeit, um den 21. Juni, die Deklinationen sehr wenig; denn sie wollen vom Zunehmen ins Abnehmen übergehen. Es scheint die Sonne in ihrem Abweichen vom Äquator still zu stehen. Ebenso beim Zeichen des Steinbocks, um den 21. Dezember. Deshalb heißen diese beiden, 90^0 von den Äquinoktien entfernten Punkte die Sonnenstillstandspunkte, Solstitialpunkte; jener, dem Nordpol nächste Punkt der Ekliptik, bei welchem die Sonne den größten Tagbogen beschreibt, der Sommersolstitialpunkt; dieser, mit dem kürzesten Tagbogen, der Wintersolstitialpunkt. Die Parallelkreise, welche sie bei der

täglichen Umdrehung der Himmelskugel durchlaufen, — bei denen die Sonne sich wieder zum Äquator wendet, — heißen Wendekreise, und nach dem Zeichen, welches den Kreis beschreibt, der Wendekreis des Krebses und der des Steinbocks. Die Tagbogen der beiden Wendekreise sind in Figur 24 zu Nr. 33 gezeichnet. Es tritt in der Figur deutlich vor Augen nicht allein der bedeutende Unterschied zwischen dem kürzesten und dem längsten Tage, sondern auch, wie sehr im Laufe eines Halbjahrs die Auf- und Untergangspunkte der Sonne ihre Stelle am Horizonte (zwischen NO und SO, NW und SW) verändern. Ihren Abstand vom Ost- und Westpunkte nennt man die nördliche oder südliche Morgen- und Abendweite.

76. Form einer Sonnenspur an der Himmelskugel. Frage 1. Wenn der Sonnenmittelpunkt beim täglichen Durchlaufen des Tag- und Nachtbogens eine Spur an der Himmelskugel zurückließe, als was für eine Kurve würde diese in einem Jahre beschriebene Linie sich unsern Blicken darstellen?

Bei der Antwort ist der gegenseitige Abstand je zweier benachbarter Umgänge zu beachten; ferner die Art der Windung, ob rechts- oder links-gedreht (die Windungen eines Korkziehers heißen rechtsgedreht; denn sie gehen, in der Richtung vom Auge fort verfolgt, so, wie der Uhrzeiger läuft); woraus sich dann ergiebt, daß bei der absteigenden Bewegung des Sonnenmittelpunktes nicht dieselbe Bahn durchlaufen wird, wie bei der aufsteigenden.

Frage 2. Was für eine Linie ist die Schattenkurve, durch welche die Lage der Mittagslinie gefunden wird? (Figur 23 in Nr. 28.) —

Man stelle sich zunächst vor, die Sonne ändere an dem Tage ihre Deklination nicht; verfolge die vom Sonnenmittelpunkte nach der Spitze des Stiftes gehende gerade Linie, wie dieselbe, von der Sonne beim Durchlaufen des Parallelkreises herumgeführt, eine Fläche beschreibt; und beachte, daß diese gerade Linie für den Tagbogen erst in ihrer Verlängerung, für den Nachtbogen aber selber von der Ebene des Zeichenpapiers geschnitten wird. Der letztere Teil der Kurve kommt an diesem Tage nicht zur Darstellung, wohl aber an dem symmetrisch um die Äquinoktien liegenden Tage (dem 26. Juli entspricht der 21. November), für den dann jene erste Hälfte die dem Nachtbogen angehörige ist.

Die Schluß-Antwort lautet: Die Schattenkurve ist einer der beiden Zweige eines Hyperbelschnittes durch eine gerade Kegelfläche, deren Leitlinie eine Windung ist von einer Schraubenlinie, die auf einer Kugel mit ungleichförmiger Steigung läuft.

§ 12. Mittlere Zeit.

77. 366 Sterntage. Die in der Figur 39 zu Nr. 73 dargestellte Lage, bei welcher die Äquinoktiallinie gerade in die Ost-West-Linie kommt, hat die Ekliptik nach Sternzeit natürlich stets um 6^h; aber nach Sonnenzeit täglich im Laufe des Jahres in immer anderen Stunden: am 21. März auch abends 6^h; ist die Rektascension des Sonnenmittelpunktes 2^h ($= 30^0$) geworden (am 22. April), ist die Sonne also an das Zeichen des Stiers ♉ getreten, schon nachmittags 4 Uhr; hat die Sonne das Zeichen der Zwillinge ♓ erreicht und ihr Mittelpunkt die Rektascension 4^h ($= 60^0$) erlangt (am 23. Mai), bereits nachmittags 2 Uhr; am 21. Juni zur Mittagszeit, und so fort, wie es der Anblick der Figur lehrt. Bei dem völlig gleichförmigen Umdrehen der Himmelskugel hat also das Eintreffen in derselben Stellung

im Frühlinge vom 21. März bis 21. Juni
in 92 Tagen sich um 6^h Sternzeit verfrüht,
im Sommer vom 21. Juni bis 23. Sept.
in 94 Tagen abermals um 6^h,
im Herbste vom 23. Sept. bis 21. Dez.
in 89 Tagen nochmals um 6^h und
im Winter vom 21. Dez. bis 21. März
in 90 Tagen wieder um 6^h.

Das macht zusammen im ganzen Jahre in 365 Tagen 24^h Sternzeit mehr; d. h. während wir die Sonne in einem Jahre 365 mal ihren Tagbogen beschreiben sahen, haben die Sterne 366 mal ihre Parallelkreise durchlaufen.

78. Ungleichheit der Sonnentage. Die Sonne beschreibt also in den vier Jahreszeiten die durch die Äquinoktial- und Solstitialpunkte abgegrenzten Quadranten der Ekliptik in ungleichen Zeiten — sie verweilt auf der nördlich vom Äquator liegenden Hälfte der Ekliptik eine volle Woche länger, als auf der Südhälfte.*) — Aber nicht bloß deshalb sind die Sonnentage (d. h. Tageshelle und Nacht zusammen) von ungleicher Länge: weit mehr noch, weil die Ekliptik mit dem Äquator einen recht bedeutend großen Winkel bildet. Denkt man diesen Winkel noch größer (Figur 39 in Nr. 73), so tritt viel deutlicher hervor, daß die Meridiane, welche durch die in ziemlich gleichen Abständen auf der Ekliptik verteilten 365 Kulminationspunkte gehen, auf dem Äquator

*) Daß die Jahreszeiten ungleiche Länge haben, fand Hipparch etwa im Jahre 150 vor Chr.

in den Gegenden um 90° und 270° der Rektascension sichtlich weiter auseinandertreten, als um 0° und 180°; daß also dann die Himmelskugel — außer einmal herum — noch erheblich mehr sich drehen muß, als zur Zeit der Äquinoktien, um einen Sonnentag zu vollenden. —

79. Mittlere Sonnenzeit. Da die Sonnentage an Länge nicht übereinstimmen, so ist es keine Empfehlung, wenn ein Uhrmacher von seinem Werke rühmt, es geht genau wie die Sonne. Die höchste Aufgabe für einen Uhrmacher ist, Uhren herzustellen, die so gleichförmig wie möglich gehen. Ein gutes Uhrwerk würde man nur verderben, wenn man täglich bei der Kulmination der Sonne die Zeiger eine Zeit lang durch Vor-, später durch Zurückstellen auf 12 Uhr brächte.

Bei einer nach Sternzeit gehenden Uhr kommt, wie wir oben (Nr. 77) gesehen haben, der Anfang eines neuen Umlaufes, 0^h, während eines Jahres auf jede Tag- und Nachtstunde. Nach einer solchen, in ihrem Gange leicht durch die Stellung der Sterne kontrollierbaren Uhr (§ 10, Nr. 66 bis 68) können wir uns im bürgerlichen Leben, da das Tageslicht unsere Arbeiten leitet, nicht richten; wir sind genötigt, durch gleichförmig fortgehende Pendeluhren die Ungleichheit der Sonnentage so auszugleichen, daß die Zeitangabe nach Ablauf eines Jahres wieder ebenso mit dem Stande der Sonne zusammentrifft. Außer der (Sternzeit zeigenden) Hauptuhr haben die Astronomen auf den Sternwarten noch andere vorzügliche Pendeluhren, die so reguliert wurden, daß, wenn sie z. B. am 15. April bei Kulmination der Sonne 12 Uhr zeigten, sie im nächsten Jahre am 15. April bei Kulmination der Sonne wieder auf 12 Uhr weisen. Diese Uhren geben *mittlere Sonnenzeit* an (*mittlere Zeit*); nach ihnen richten wir uns im bürgerlichen Leben.*)

80. Dauer eines mittleren Sonnentages. Wie in Nr. 78 gezeigt wurde, sind die Sonnentage von ungleicher Größe 1) wegen der ungleichen Geschwindigkeit der an den Sternen im Laufe des Jahres vorbeischreitenden Sonne und 2) wegen der verschiedenen *Lage* der betreffenden 365 Ekliptikbogen in Bezug auf den Äquator. Das Ergebnis der Rechnung, welche diese Ungleichheiten der Sonnentage durch das arithmetische Mittel ausgleicht, wird *der mittlere Sonnentag* genannt. Seine Dauer ist zu berechnen, um unsere Uhren, welche *mittlere Zeit* angeben sollen, durch die nach Sternzeit gehende Hauptuhr einer Sternwarte auf richtigen Gang zu prüfen.

*) Erst seit etwa 1780.

Die Hauptuhr der Berliner Sternwarte zeigte*) bei der Kulmination des Sonnenmittelpunktes am 20. März im Jahre

1869 AR $23^h 59^m 39{,}1^s$
1870 $23^h 58^m 44{,}5^s$;

ferner am 20. März im Jahre

1871 AR $23^h 57^m 51{,}7^s$

und 365 Tage später

1872 $23^h 57^m 0{,}5^s$.

Es fehlten also den 365 Sonnentagen des Jahres 1869 bis 70 an 366 Umdrehungen der Himmelskugel (Nr. 77) $54{,}6^s$ Sternzeit, und denen des Jahres 1871 bis 72 nur $51{,}2^s$. Die Abweichungen bei anderen Jahren liegen dazwischen.

Die Dauer eines mittleren Sonnentages ist aus beiden Angaben zu berechnen; von den Ergebnissen sind soviel Ziffern als allgemein gültig hinzustellen, daß nur die letzte unter dem Einflusse der Abweichungen steht.

Aus der ersten Angabe: 365 Sonnentage = $365^d 23^h 59^m 5{,}4^s$ Sternzeit folgt

I. für das Jahr 1869 bis 70 ist der mittlere Sonnentag = $1{,}002\,737\,995^d = 1^d 0^h 3^m 56{,}563^s$ Sternzeit;

ebenso aus der andern

II. für das Jahr 1871 bis 72 ist der mittlere Sonnentag = $1{,}002\,738\,102^d = 1^d 0^h 3^m 56{,}572^s$ Sternzeit.

Demnach ist das Ergebnis

der mittlere Sonnentag =
$1{,}002\,738\,05^d = 24^h 3^m 56{,}57^s$ Sternzeit.

81. Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit. Den Koefficienten, mit welchem eine Angabe in Sternzeit zu multiplizieren ist, um sie in mittlerer Zeit auszudrücken, muß man nicht aus dem eben erlangten Schlußergebnis berechnen, sondern aus den beiden von einander abweichenden Werten, um zu ersehen, auf wieviel Decimalstellen die Angabe zuverlässig ist. Zur Erleichterung der abgekürzten Division setze man hier

$$\frac{1}{a} = 1 - \frac{a-1}{a}.$$

*) Die Unterschiede der Zeitangaben sind nicht etwa als Folge ungenauen Ganges der Uhr aufzufassen (§ 10, Nr. 66 bis 68), sie sind wirklich vorhanden.

Es geht hervor die Dauer eines Sterntages
aus I. $(1 - 0{,}002\,730\,519)^d = 24^h - 3^m\,55{,}917^s$ mittlerer Zeit,
aus II. $(1 - 0{,}002\,730\,626)^d = 24^h - 3^m\,55{,}926^s$.

Demnach ist

1 Sterntag =

$(1 - 0{,}002\,730\,57)^d = 23^h\,56^m\,4{,}08^s$ mittlerer Zeit.

Man behalte:

1 Sterntag $t = 86164$ **Sekunden** (mittlerer Zeit).

Anmerkung. Hierauf beruht die in Nr. 4 erfahrungsmäßig mitgeteilte Bemerkung über die Lage der Sternbilder gegen den Horizont.

82. Der größte und der **kleinste Sonnentag** sind die beiden Tage des Jahres, an welchen die bei der Kulmination des Sonnenmittelpunktes beobachteten Rektascensionen die größte und kleinste Differenz ergeben. Bildet man die Differenzen der an der Hauptuhr das Jahr hindurch abgelesenen Kulminationszeiten, so findet man die größten Unterschiede zu Anfang des Winters und die kleinsten in der Mitte des September.

Nach Angabe der Berliner Sternwarte war (im Jahre 1872)

Dez.	22	AR	$18^h\ 4^m\,17{,}68^s$
	23		$18^h\ 8^m\,44{,}33^s$,
und Sept.	16		$11^h\,37^m\,25{,}80^s$
	17		$11^h\,41^m\ 1{,}04^s$.

Demnach dauert der Sonnentag Dez. 22

$24^h\,4^m\,26{,}65^s$ Sternzeit,

während auf den mittleren Sonnentag kamen

$24^h\,3^m\,56{,}57^s$ Sternzeit;

also ein Unterschied von

$+\,30{,}08^s$ Sternzeit $= +\,30{,}00^s$ mittlerer Zeit.

Dagegen hat der Sonnentag Sept. 16 nur

$24^h\,3^m\,35{,}24^s$ Sternzeit,

und giebt eine Differenz von

$-\,21{,}33^s$ Sternzeit $= -\,21{,}27^s$ mittlerer Zeit.

Es dauert also

der größte Sonnentag (der 22. Dez.)
$24^h\ 0^m\,30^s$

und der kleinste Sonnentag (der 16. Sept.)
$23^h\,59^m\,39^s$ mittlerer Zeit.

Anmerkung. Diese Abweichungen vom mittleren Sonnentage erscheinen auf den ersten Blick gering. Allein es ist eine ganze Reihe Nachbartage in annähernd gleichem Maße zu groß oder zu klein. Wenn also eine Sonnenuhr um die Mitte des September täglich $\frac{1}{3}$ Minute vor-, zu Anfang des Winters aber täglich $\frac{1}{2}$ Minute nachgeht, so muß dies Unterschiede von unsern nach mittlerer Zeit gehenden Uhren herbeiführen, die sehr erheblich werden und erst nach Monaten sich wieder ausgleichen.

83. Zeitgleichung. Die Zeit, (Minuten und Sekunden) welche man zu den Angaben einer Sonnenuhr addieren (oder davon subtrahieren) muß, um Zeitangaben zu erhalten, die das Jahr hindurch gleichförmig fortlaufen, heißt die Zeitgleichung.

Um eine deutliche Vorstellung davon zu bekommen, wie die wahre Sonnenzeit neben der gleichmäßig verlaufenden mittleren Zeit während des ganzen Jahres sich bewegt, denkt man sich auch für die mittlere Zeit eine Sonne. Damit ihr Fortschreiten die gleichmäßig verlaufende Zeit darstelle, muß ihr Weg der Äquator sein. (Nr. 78 und Figur 39 in Nr. 73.) Dort soll sie von dem Meridiane aus, welchen die wahre Sonne mittags an einem zu wählenden Tage passiert, abgehen und in derselben Richtung, also, vom Nordpole aus gesehen, entgegen der Bewegung des Uhrzeigers, gleichförmig sich bewegen, so daß sie an demselben Monatstage des folgenden Jahres mit der wahren Sonne jenen Meridian erreicht, und dann mit ihr denselben Rundlauf immer ebenso wiederholt. Als Ausgang wird man nicht einen Tag in einer Jahreszeit aussuchen, in welcher wir die Sonne ungewöhnlich schnell oder langsam am Himmel fortschreiten sehen. Denn wollte man z. B. den 1. Januar nehmen, so würde die wahre Sonne der erdichteten anfangs vorauseilen, (Nr. 82 Anm.) später aber bedeutend hinter ihr zurückbleiben, und die als Verbesserung der Sonnenzeit zu ermittelnde Zeitgleichung müßte hier sehr groß ausfallen. Man wird vielmehr die Anordnung so treffen, daß beide so nahe, wie es überhaupt möglich ist, nebeneinander herlaufen.

Einer der Tage, welche, als Anfang genommen, die positiven und negativen Zahlen der Zeitgleichung möglichst klein werden lassen, ist der 15. April. Es wird demnach festgesetzt, daß die erdichtete Sonne am 15. April im Augenblicke der Kulmination der wahren Sonne von diesem Meridiane aus links herum abgehe und gleichförmig so fortschreite, daß sie täglich einen Bogen des Äquators beschreibt, welcher die Rektascension um $3^m 56{,}57^s$ Sternzeit vergrößert. (Nr. 80.)

Als der Mittelpunkt der wahren Sonne am 15. April für die Berliner Sternwarte kulminierte, hatte sie $1^h 33^m 45{,}9^s$ Rektascension.

Dieser Punkt des Äquators ist die Ausgangsstelle der erdichteten Sonne. Von hier aus kommen nach der ihr vorgeschriebenen Bewegung in 10 Tagen hinzu $39^m 25{,}7^s$. Mithin wird für die zweite Sonne am 25. April die Rektascension $2^h 13^m 11{,}6^s$. Die wahre Sonne ist aber im Augenblicke der Kulmination dieses Tages erst bei $2^h 11^m 2{,}9^s$ angelangt; sie geht also $2^m 8{,}7^s$ Sternzeit früher durch den Berliner Meridian als die erdichtete Sonne. Diese $128{,}7^s$ sind mit $1 - 0{,}00273$ verkürzt zu multiplizieren, um sie in Sekunden mittlerer Zeit zu verwandeln (Nr. 81). Man erhält $2^m 8{,}3^s$. Eine nach mittlerer Zeit gehende Uhr muß also am 25. April im Augenblicke der Kulmination der Sonne nicht 12^h, sondern erst $11^h 57^m 51{,}7^s$ angeben; d. h. für den 25. April ist die Zeitgleichung $-2^m 8{,}3^s$. Zehn Tage später, am 5. Mai, hat man für die erdichtete Sonne $2^h 52^m 37{,}3^s$, die wahre Sonne ist mittags erst bei $2^h 49^m 6{,}9^s$ der Rektascension; sie kulminiert mithin an diesem Tage schon $3^m 30{,}4^s$ Sternzeit früher, als die gedachte; und daraus folgt für den 5. Mai die Zeitgleichung $-3^m 29{,}8^s$.

In dieser Weise sind die in der folgenden Tabelle von 10 zu 10 Tagen zusammengestellten Werte der Zeitgleichung berechnet. Eingeschaltet sind diejenigen Tage, an welchen die Zeitgleichung einen größten oder (wenn er negativ ist) einen kleinsten Wert erlangt. Zur Prüfung der Rechnung multipliziere man das tägliche Fortschreiten der zweiten Sonne, $3^m 56{,}57^s$, mit irgend einer der in Spalte I stehenden Anzahl der Tage nach dem 15. April, und addiere das Produkt zur Rektascension des Anfangspunktes, $1^h 33^m 45{,}9^s$; dann muß die in Spalte IV für das gewählte Datum notierte Zahl herauskommen. Spalte III giebt die Rektascensionen der wahren Sonne im Mittage an.*) Die Differenz (Spalte V) ist in der Ordnung III minus IV zu bilden, damit nach dem Multiplizieren mit $1 - 0{,}00273$ die Zeitgleichung sofort mit dem richtigen Vorzeichen entsteht.

Um den Lauf der Zahlen in Spalte VI mit einem Blick übersehen zu können, ist in Figur 40a (und b) zuerst die oben und unten mit April 15 bezeichnete Linie angenommen. Dann wurden in gleichen Abständen zu ihr Parallelen gezogen und an ihre Enden das von 10 zu 10 Tagen fortschreitende Datum gesetzt. Darauf sind quer hindurch die Linie 0 und ihre Parallelen gelegt. Jede hat von der darüber oder darunter laufenden einen beliebig groß zu wählenden Abstand, den wir mit m bezeichnen wollen. Es sind 6^{mm} genommen, weil dann die Zehntel-Millimeter Sekunden darstellen. Die Zeitgleichung für Mai 5 ist $-3^m 29{,}8^s$ oder rund $-3\frac{1}{2}$ Minute. Demgemäß ist auf der Linie Mai 5 von der Null-

*) Berliner astronomisches Jahrbuch für 1874 und das für 1875.

Linie aus nach unten 3½ m abgetragen und der Endpunkt markiert. Auf der Linie August 13 sind von der Null-Linie aus nach oben 4 m und 3,6 mm abgegrenzt, denn für diesen Tag kommt die Zeitgleichung auf + 4 m 36 s. Nachdem so die Markierung für sämtliche in der Tabelle stehenden Tage ausgeführt war, wurde durch alle Marken, wie es ihre Folge deutlich erkennen ließ, die Kurve hindurchgezogen. Man beachte wohl, daß beim Zusammenschieben der beiden Tafeln (auch mit Vertauschung ihrer Plätze) Figur 40a hinauf- und Figur 40b herunterzurücken ist, bis die beiden Hälften der Null-Linie in eine Richtung kommen. Dieser wiederholt auf- und

Tafel der Zeitgleichung.

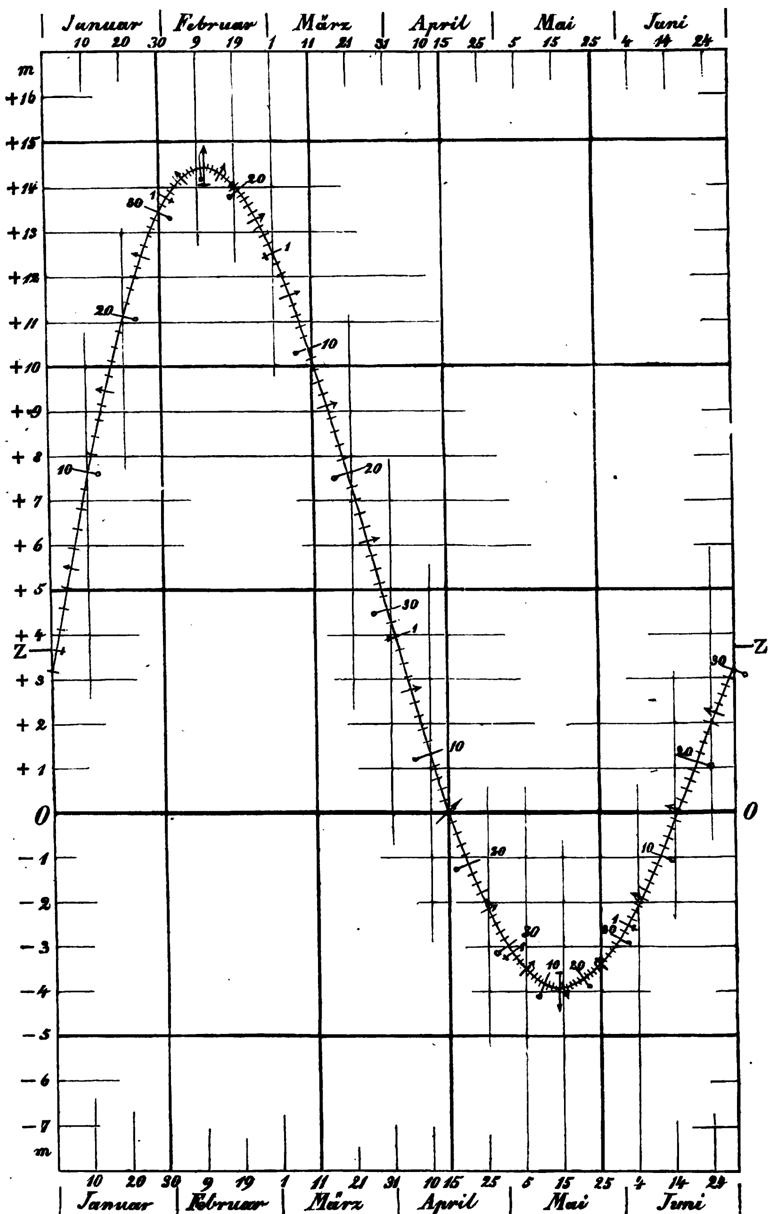
I Anzahl der Tage	II Datum		III Rektascension beim Kulminieren der wahren Sonne in Sternzeit	IV der erdichteten Sonne in Sternzeit	V Differenz III—IV in Sternzeit	VI Zeitgleichung in mittlerer Zeit
0	April	15	1h 33m 45,9s	1h 33m 45,9s	0m 0s	0m 0s
10		25	2 11 2,9	2 13 11,6	— 2 8,7	— 2 8,3
20	Mai	5	2 49 6,9	2 52 37,3	— 3 30,4	— 3 29,8
29		14	3 24 10,8	3 28 6,4	— 3 55,6	— 3 55,0
30		15	3 28 7,5	3 32 3,0	— 3 55,5	— 3 54,9
40		25	4 8 4,9	4 11 28,7	— 3 23,8	— 3 23,2
50	Juni	4	4 48 50,5	4 50 54,4	— 2 3,9	— 2 3,6
60		14	5 30 11,7	5 30 20,1	— 0 8,4	— 0 8,4
70		24	6 11 47,1	6 9 45,8	+ 2 1,3	+ 2 1,0
80	Juli	4	6 53 12,0	6 49 11,5	+ 4 0,5	+ 3 59,8
90		14	7 34 7,0	7 28 37,2	+ 5 29,8	+ 5 28,9
100		24	8 14 13,8	8 8 2,9	+ 6 10,9	+ 6 9,9
102		26	8 22 8,2	8 15 56,0	+ 6 12,2	+ 6 11,2
110	August	3	8 53 21,7	8 47 28,6	+ 5 53,1	+ 5 52,1
120		13	9 31 31,1	9 26 54,3	+ 4 36,8	+ 4 36,0
130		23	10 8 45,8	10 6 20,0	+ 2 25,8	+ 2 25,4
140	Sept.	2	10 45 16,4	10 45 45,7	— 0 29,3	— 0 29,2
150		12	11 21 20,4	11 25 11,4	— 3 51,0	— 3 50,4
160		22	11 57 14,8	12 4 37,1	— 7 22,3	— 7 21,1
170	Okt.	2	12 33 19,0	12 44 2,8	— 10 43,8	— 10 42,0
180		12	13 9 55,5	13 23 28,5	— 13 33,0	— 13 30,8
190		22	13 47 22,0	14 2 54,2	— 15 32,2	— 15 29,7
200	Nov.	1	14 25 55,3	14 42 19,9	— 16 24,6	— 16 21,9
202		3	14 33 47,4	14 50 13,0	— 16 25,6	— 16 22,9

I Anzahl der Tage	II Datum		III Rektascension beim Kulminieren der wahren Sonne in Sternzeit	IV Rektascension beim Kulminieren der erdichteten Sonne in Sternzeit	V Differenz III—IV in Sternzeit	VI Zeitgleichung in mittlerer Zeit
210	Nov.	11	15h 5m 49,5s	15h 21m 45,6s	— 15m 56,1s	— 15m 53,5s
220		21	15 47 7,4	16 1 11,3	— 14 3,9	— 14 1,6
230	Dez.	1	16 29 44,1	16 40 37,0	— 10 52,9	— 10 51,1
240		11	17 13 25,6	17 20 2,7	— 6 37,1	— 6 36,0
250		21	17 57 43,6	17 59 28,4	— 1 44,8	— 1 44,5
260		31	18 42 5,7	18 38 54,1	+ 3 11,6	+ 3 11,1
261	Januar	1	18 46 30,9	18 42 50,7	+ 3 40,2	+ 3 39,6
270		10	19 26 0,6	19 18 19,8	+ 7 40,8	+ 7 39,5
280		20	20 8 58,1	19 57 45,5	+ 11 12,6	+ 11 10,8
290		30	20 50 40,6	20 37 11,2	+ 13 29,4	+ 13 27,2
300	Februar	9	21 31 2,9	21 16 36,9	+ 14 26,0	+ 14 23,6
302		11	21 38 57,6	21 24 30,0	+ 14 27,6	+ 14 25,2
310		19	22 10 5,8	21 56 2,6	+ 14 3,2	+ 14 0,9
320	März	1	22 48 1,1	22 35 28,3	+ 12 32,8	+ 12 30,7
330		11	23 25 6,4	23 14 54,0	+ 10 12,4	+ 10 10,7
340		21	0 1 39,0	23 54 19,7	+ 7 19,3	+ 7 18,1
350		31	0 37 59,8	0 33 45,4	+ 4 14,4	+ 4 13,7
360	April	10	1 14 30,2	1 13 11,1	+ 1 19,1	+ 1 18,9
365		15	1 32 54,0	1 32 54,0	0 0	0 0

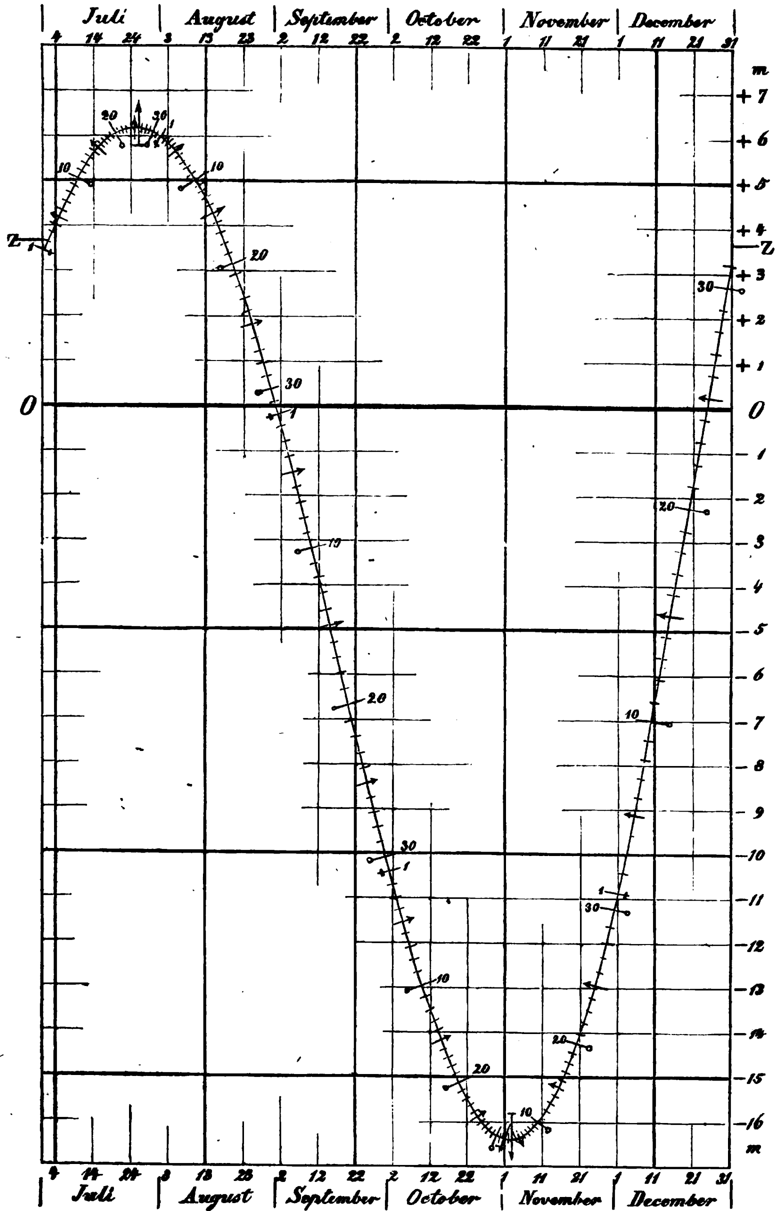
absteigende Zug stellt den Lauf der Zahlenwerte der Zeitgleichung vor Augen. Man sieht die überaus große und sehr schnelle Veränderung im Dezember und Januar. Endlich wurde die Entfernung benachbarter Senkrechten in Zehntel geteilt und die gerade über oder unter ihnen liegenden Punkte der Kurve angegeben. Durch sie kann man nun für jeden Tag des Jahres die Zeitgleichung, der Größe und dem Vorzeichen nach, ablesen.

In Rücksicht auf die Anmerkung zu Nr. 82 betrachte man die Stärke und die Breite der Wellenbewegung in dieser Kurve. (Hierüber handelt weiter die Anmerkung zu Nr. 101.)

Anmerkung. Wer zur Berechnung der Zeitgleichung vom 1. Januar ausgeht, addiert, um auf den 10. Januar zu kommen, neunmal $3^m 56{,}57^s$, also $35^m 29{,}1^s$, zu der als Anfang genommenen Rektascension der wahren Sonne am 1. Januar, $18^h 46^m 30{,}9^s$ (vergl. die Tabelle) und erhält für Spalte IV bei Januar 10 $19^h 22^m 0{,}0^s$, mithin für Spalte V $+ 4^m 0{,}6^s$ und für VI $3^m 59{,}9^s$, also hier $3^m 39{,}6^s$ weniger, als dort in der Tabelle steht, und dieser Unterschied ist gleich der in der Tabelle angegebenen Zeitgleichung



Figur 40a. Zeitgleichung.



Figur 40b. Zeitgleichung.

für den 1. Januar. Bei Januar 20 würde man erhalten in Spalte IV $20^h 1^m 25{,}7^s$, in V $7^m 32{,}4^s$ und in VI $7^m 31{,}2^s$, und dies ist wieder $3^m 39{,}6^s$ weniger. So geht es fort; alle diese Zeitgleichungswerte geben mit denen der Tabelle eine Differenz gleich der dortigen Zeitgleichung des Ausgangstages. Wenn man dann mit den in der Figur 40 gewählten Maßen für Breite und Höhe nach diesen Zahlen die Kurve konstruiert, so entsteht ganz dieselbe krumme Linie, nur ist die benutzte Null-Linie um 3,66 m höher als die in unserer Figur. (Ihr Anfang und Ende sind links und rechts am Rande durch Z angedeutet.) Nun würde man aber bemerken, daß ein weit größerer Teil der Kurve unter der Null-Linie ZZ liegt, als über ihr; die Zeitgleichung würde für November 3 hinabgehen auf $-20^m 2{,}5^s$, während der größte positive Wert (für Februar 11) nur auf $+10^m 45{,}6^s$ gekommen ist. Dieses ungleiche Abgehen der erdichteten Sonne von der wahren würde dann veranlassen, die gebrauchte Null-Linie so weit hinunter zu rücken, daß die Abweichungen der Kurve nach oben und unten gleich werden. Bezeichnete man zu dem Zweck zunächst die beiden Maxima (Februar 11 und Juli 26) mit a und c, die absoluten Werte der beiden Minima (Mai 14 und November 3) mit b und d und die zu bestimmende Verschiebung der Null-Linie mit y, so würde man ansetzen vorläufig aus den 4 Hauptwerten

$$(a + y) + (c + y) = (b - y) + (d - y)$$

und finden

$$y = \tfrac{1}{4}[(b + d) - (a + c)],$$

welches als erste Annäherung schon gäbe $y = 3^m 35^s$. Aus der Formel ist ersichtlich, daß bei n in gleichen Zwischenzeiten zu wählenden Werten, wenn S_b die absolute Summe der negativen, S_a die der positiven Größen ist, kommen muß

$$y = \frac{1}{n}[S_b - S_a],$$

und man hat hinreichend viel Werte in Rechnung gezogen, wenn bei vergrößertem n in y die Zehntelsekunden sich nicht mehr ändern. So würde man beim Ausgehen vom 1. Januar erhalten $y = 3^m 39{,}6^s$. Nach dem Hinabrücken wäre man dann auf die Null-Linie der Figur 40 gekommen und sähe, daß statt des 1. Januar einer der Tage als Anfang hätte genommen werden sollen, welche durch die vier Schnittpunkte der Kurve mit dieser Null-Linie angegeben werden. Um die Verschiebung und infolgedessen das Umändern aller Zahlen der Zeitgleichung zu vermeiden, nahmen wir sogleich den ersten jener vier Tage als Anfang an. Bei dieser Anordnung läuft die erdichtete Sonne so, daß die wahre Sonne vor und hinter ihr sich im ganzen gleich weit entfernt und ihr Anschluß so gut wie möglich ist.

84. Zeit des Sonnen-Aufganges und Unterganges. Man nimmt zu einer solchen Zeitangabe denjenigen Augenblick, in welchem man den Sonnen**mittelpunkt** im Horizonte sieht. Weil dort die Strahlenbrechung $\beta = 0^0\,34'\,54{,}1''$ beträgt, so ist dann der Zenitabstand des Sonnenmittelpunktes $90^0 + \beta$, und es liefert der auf diese Seite angewandte Kosinussatz den ihr gegenüberliegenden Stundenwinkel t. Subtrahiert man die Gleichung für cos t von $1 = 1$, und setzt nach der Zusammenziehung

$$\tfrac{1}{2}\left[90^0 + \beta + (\varphi - \delta)\right] = a$$
$$\tfrac{1}{2}\left[90^0 + \beta - (\varphi - \delta)\right] = b,$$

so hat man

$$\sin \tfrac{1}{2} t = \mp \sqrt{\frac{\sin a \sin b}{\cos \varphi \cos \delta}}$$

wo das Minuszeichen vor der Quadratwurzel für den Aufgang gilt, da der auf der Ostseite des Meridians liegende Stundenwinkel negativ zu rechnen ist.

Wir wollen die weitere Entwicklung hier **genau** durchführen mit Berücksichtigung der Änderung der Rektascension und Deklination der Sonne. (Vergl. unten Ergebnis V.)

Aus dem Stundenwinkel geht (nach Nr. 43) mittels Dividieren durch 15 hervor, daß ein hinter dem Mittelpunkte der aufgehenden Sonne stehender Fixstern nach t Sekunden Sternzeit kulminiert. Die Sonne aber bleibt im Laufe des Vormittags hinter dem Sterne zurück. Aus den beim Kulminieren der Sonne in früheren Jahren beobachteten Rektascensionen weiß man, daß zwischen dem Mittage des gewählten Tages und dem des vorhergehenden die Sonne fortrückt um u Sekunden in Rektascension. Diese Ortsveränderung entsteht in $s = 86400 + u$ Sekunden Sternzeit. Also kommen auf die Zeit vom Aufgehen bis zum Kulminieren des Fixsternes $\frac{t}{s} \cdot u$ Sekunden der Rektascension. Um so viel, $m = t \cdot \frac{u}{s}$, steht der Mittelpunkt der Sonne noch vor der Meridianebene des Ortes, wenn der Stern sie passiert. Daher ist die Verzögerung der Sonne vom Aufgange bis zu ihrer Kulmination $v = (t + m)\frac{u}{s} = m + m\frac{u}{s}$. Der Vormittag dauert also $t + v$ Sekunden Sternzeit. Diese werden durch Multiplizieren mit $1 - 0{,}002731$ in Sonnenzeit verwandelt (Nr. 81), und schließlich ist die Zeitgleichung in ihrer derzeitigen Größe zu addieren, um die gesuchte Angabe in mittlerer Zeit zu erhalten.

Beispiele.*) In einer Richtung von Norden nach Süden liegen die vier Städte Greifswald, Berlin, Passau und Palermo. Für sie kulminiert also die Sonne gleichzeitig. Wegen ihrer verschiedenen Polhöhen werden aber die Auf- und Untergangszeiten desselben Tages ungleich. Es ist die Polhöhe von Greifswald 54° 15′, von Berlin 52° 31′, von Passau 48° 35′ und von Palermo 38° 7′. Die andere veränderliche Größe, welche den Stundenwinkel t bestimmt, ist die Deklination der Sonne. Ihre Einwirkung auf t ist, da δ positiv und negativ bis gegen $23\frac{1}{2}^0$ wachsen kann, sehr bedeutend. Wir nehmen deshalb zwei Tage, und wählen den 24. Juni und den 1. Dezember.

Im Laufe des Tages ändert sich aber auch die Deklination der Sonne und die Zeitgleichung. Es ist im Augenblicke der Kulmination der Sonne

Datum		Rektascension	Deklination	Zeitgleichung
Juni	23	6ʰ 7ᵐ 37,7ˢ	+ 23° 26′ 45,7″	+ 1ᵐ 48,2ˢ
	24	6 11 47,1	+ 23 25 47,8	+ 2 1,0
	25	6 15 56,4	+ 23 24 25,1	+ 2 13,6
November	30	16ʰ 25ᵐ 25,1ˢ	— 21° 40′ 40,6″	— 11ᵐ 13,5ˢ
Dezember	1	16 29 44,1	— 21 50 11,3	— 10 51,1
	2	16 34 3,7	— 21 59 16,8	— 10 28,2

Am 24. Juni findet der Sonnenaufgang etwa 8 Stunden vor, und der Untergang etwa 8 Stunden nach der Kulmination statt; und am 1. Dezember sind die beiden Zwischenzeiten etwa 4 Stunden. Wir müssen also für den Sonnenaufgang am 24. Juni bei der Deklination den dritten Teil des Unterschiedes zwischen den Größen für Juni 23 und 24, nämlich 19,3″, zur Mittagsdeklination des 24. Juni addieren, und entsprechend für den Sonnenuntergang verfahren. So erhält man

Juni 24: Sonnenaufgang $\delta = + 23^0 26' \; 7{,}1''$,
Sonnenuntergang $\delta = + 23 \; 25 \; 20{,}2$;

Dezember 1: Sonnenaufgang $\delta = — 21^0 48' 36{,}2''$,
Sonnenuntergang $\delta = — 21 \; 51 \; 42{,}2$.

Mit diesen Werten ergiebt die *genaue* Rechnung das, was auf der folgenden Seite tabellarisch zusammengestellt ist.

Die Ergebnisse zeigen: I. Am 24. Juni geht die Sonne in Greifswald eine *halbe Stunde* früher auf und eine halbe Stunde

*) Noch 2 Beispiele folgen in Nr. 146.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
24. Juni	Polhöhe	Stundenwinkel der Sonne beim Aufgange	Stundenwinkel der Sonne beim Untergange	Mittlere Zeit beim Sonnen-Aufgange	Mittlere Zeit beim Sonnen-Untergange
Greifswald	54° 15′	— 128° 23′ 38,88″ (21,0″)	128° 21′ 59,56″ (45,4″)	3h 28m 17,3s (18,4s)	8h 35m 38,0s (37,0s)
Berlin	52 31	— 125 41 32,61 (35,2)	125 39 53,37 (40′ 14,6″)	3 39 5,9 (5,8)	8 24 49,4 (50,8)
Passau	48 35	— 120 32 17,76 (17,2)	120 31 4,06 (6,8)	3 59 43,2 (43,2)	8 4 13,7 (13,9)
Palermo	38 7	— 110 44 29,37 (28,5)	110 43 42,32 (40,0)	4 38 55,2 (55,3)	7 25 3,6 (3,5)
1. Dezember					
Greifswald	54° 15′	— 57° 30′ 33,66″ (35,2″)	57° 24′ 39,66″ (41,8″)	7h 58m 59,5s (59,4s)	3h 38m 54,8s (55,0s)
Berlin	52 31	— 59 44 38,76 (43,4)	59 39 14,28 (16,6)	7 50 2,9 (2,6)	3 47 53,4 (53,6)
Passau	48 35	— 64 4 48,50 (49,2)	64 0 17,72 (18,3)	7 32 41,7 (41,6)	4 5 18,2 (18,2)
Palermo	38 7	— 72 32 18,26 (18,4)	72 29 21,80 (26,4)	6 58 50,7 (50,7)	4 39 15,6 (15,9)

1.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	
24. Juni	Differenz der Polhöhen	Dauer der Tageshelle vor 12 Uhr	Dauer der Tageshelle nach 12 Uhr	Dauer der Tageshelle Differenz	Dauer der Tageshelle Summe	Sekunden Sonnenzeit mehr als Sternzeit t vor der Kulmination	nach der Kulmination
Greifswald	— 1° 44′	8h 31m 42,7s (41,6s)	8h 35m 38,0s (37,0s)	+ 3m 55,3s (55,4s)	17h 7m 20,7s (18,6s)	4,55s	4,52s
Berlin	— 3 56	8 20 54,1 (54,2)	8 24 49,4 (50,8)	+ 3 55,3 (56,6)	16 45 43,5 (45,0)	4,46	4,42
Passau	— 10 28	8 0 16,8 (16,8)	8 4 13,7 (13,9)	+ 3 57,0 (57,1)	16 4 30,5 (30,7)	4,28	4,24
Palermo		7 21 4,8 (4,7)	7 25 3,6 (3,5)	+ 3 58,8 (58,8)	14 46 8,4 (8,2)	3,93	3,89
1. Dezember							
Greifswald	— 1° 44′	4h 1m 0,5s (0,6s)	3h 38m 54,8s (55,0s)	— 22m 5,6s (5,6s)	7h 39m 55,3s (55,6s)	3,56s	3,66s
Berlin	— 3 56	4 9 57,1 (57,4)	3 47 53,4 (53,6)	— 22 3,7 (3,8)	7 57 50,6 (51,0)	3,70	3,80
Passau	— 10 28	4 27 18,3 (18,4)	4 5 18,2 (18,2)	— 22 0,1 (0,2)	8 32 36,5 (36,6)	3,97	4,08
Palermo		5 1 9,3 (9,3)	4 39 15,6 (15,9)	— 12 53,7 (53,4)	9 40 24,9 (25,2)	4,50	4,62

später unter, als in Passau; und wenn die Sonne in Palermo aufgeht, scheint sie in Berlin schon eine ganze Stunde, und auch am Abend sieht man sie in Berlin eine Stunde länger, als in Palermo. Dies gilt für die Zeit um den längsten Tag. Im Herbst und Winter sind die südlicher gelegenen Orte im Vorteile. Am 1. Dezember, drei Wochen vor dem kürzesten Tage, erstreckt sich der einstündige Unterschied in der Auf- oder Untergangszeit von Palermo noch bis Greifswald.

II. An jedem Orte sind der negative und der positive Stundenwinkel ungleich, weil die Deklination der Sonne im Laufe des Tages sich geändert hat; und die Zeitangaben des Sonnen-Aufganges und Unterganges haben nicht gleiche Abstände von 12^h, 1) wegen Ungleichheit der Stundenwinkel, hauptsächlich aber 2) wegen der Zeitgleichung, weil unsere nach mittlerer Zeit gehenden Uhren nicht 12^h zeigen dürfen, wenn die Sonne kulminiert.

III. In den Kalendern ist für jeden Tag die Zeit des Sonnen-Auf- und Unterganges angegeben. Danach kann man seine Uhr auf richtigen Gang prüfen, indem man ihre Zeitangabe abliest, wenn man den Sonnenmittelpunkt an einer freien Stelle im Horizonte sieht. Obige Ergebnisse lehren aber, daß in Greifswald oder in Passau nicht ein Berliner Kalender dabei zu benutzen ist. Die Polhöhe des Wohnortes darf nicht erheblich abweichen von der des Ortes, für welchen die Kalendertabelle berechnet ist.

IV. Greifswald ist von Berlin 193^{km} entfernt. Der Unterschied der Auf- oder Untergangszeiten beider Städte beträgt für den 24. Juni $10^m\,48{,}6^s$. Wenn man diesen auf alle Kilometer gleichmäßig verteilt, kommt auf 1^{km} $3{,}36^s$. Folglich geht am Nord-Ende der in Richtung der Magnetnadel laufenden, $3{,}24^{km}$ großen Friedrichstraße in Berlin die Sonne um den längsten Tag 11 Sekunden früher auf und ebensoviel später unter, als am Süd-Ende der Straße. Am 1. Dezember ist dieser Zeitunterschied je 9 Sekunden.

V. Die durch Rektascensionsänderung hinzukommenden Sekunden werden bei Verwandlung der Sternzeit in Sonnenzeit fast ganz wieder fortgenommen. Die Sonnenzeit hat hier (Spalte 12 der Tabelle), je nach der kürzeren oder längeren Dauer dieses halben Tages, nur $3\frac{1}{2}$ bis $4\frac{1}{2}$ Sekunden mehr, als die aus dem Stundenwinkel erhaltene Sternzeit. Da nun eine Änderung von $3\frac{1}{2}$ Sekunden (nach Ergebnis IV) schon 1 Kilometer nördlich oder südlich von der in der Rechnung genommenen Polhöhe eintritt, so kann man, wenn man nicht für den Standort einer Sternwarte, sondern für eine ganze Stadt die Zeit des Sonnen-Auf- oder Unterganges sucht, die Rechnung dadurch erheblich abkürzen, daß man die

aus dem Stundenwinkel durch Dividieren mit 15 hervorgehende Zeitangabe sofort als Sonnenzeit nimmt. Man braucht dann nur noch die Zeitgleichung zu addieren.

Anmerkung. Es war die Dauer eines Vor- oder Nachmittages angegeben $t+v$ Sekunden Sternzeit, wo $v = m + m\frac{u}{s} = t\frac{u}{s} + t\left(\frac{u}{s}\right)^2$ bedeutete. Wenn man den kleinen Sekundenbruch $t\left(\frac{u}{s}\right)^2$ vernachlässigt, so ist die Dauer $t + t\frac{u}{s}$ Sekunden Sternzeit $= t\left(1+\frac{u}{s}\right)(1-c)$ Sekunden Sonnenzeit, wo c den Koefficienten 0,002731 bezeichnet. Die Abweichung dieser Zahl von den aus dem Stundenwinkel hervorgehenden t Sekunden Sternzeit ist

$$A = t\left(1+\frac{u}{s}\right)(1-c) - t = t\left[(1-c)\frac{u}{s} - c\right].$$

Dieselbe wird negativ, wenn $(1-c)\frac{u}{s} < c$ ist, also, da $s = 86400 + u$ war, wenn $u < \frac{c}{1-2c} 86400$, d. h. $u < 237$ ist. Bei dem größten und dem kleinsten Werte von u beträgt die Abweichung A für jene 4 Städte weniger als 6 Sekunden, positiv und negativ. Für den größten Sonnentag, den 22. Dezember (Nr. 82), wo $u = 266{,}65^s$ und beim Sonnenuntergange $\delta = -23^0 27' 22{,}9''$ ist, kommen Sekunden Sonnenzeit mehr als Sternzeit t in Greifswald 4,51, Berlin 4,73, Passau 5,13, Palermo 5,90; und für den kleinsten Sonnentag, den 16. September, wo u nur $215{,}24^s$ und beim Sonnenuntergange $\delta = +2^0 20' 33{,}8''$ ist, werden die Sekunden Sonnenzeit weniger als Sternzeit t in Greifswald 5,58, Berlin 5,57, Passau 5,53 und Palermo 5,48. — Die abgekürzte Rechnung liefert also immer ein Ergebnis, welches genau richtig ist für eine Stelle, die noch innerhalb derselben Stadt liegt.

Zusatz. **Dämmerung**. Da die Sonne nach ihrem Untergange und vor ihrem Aufgange die über unserm Horizonte befindliche Atmosphäre mehr oder minder weit erleuchtet und die Luft- und Dunstteilchen etwas von dem erhaltenen Lichte zu uns zurückwerfen, so entsteht ein Übergang zwischen Tag und Nacht, die Abend- und die Morgendämmerung. Man unterscheidet bürgerliche und astronomische Dämmerung. Wenn das Dunkelwerden so weit vorgeschritten ist, daß man bei wolkenfreiem Abendhimmel in einem

nicht nach Westen gelegenen Zimmer, um noch lesen zu können, Licht anzünden muß, so ergiebt die nun seit Mittag vergangene Zeit den Stundenwinkel der Sonne zwischen den Seiten $(90^0-\varphi)$ und $(90^0-\delta)$, aus welchen man dann die dritte Seite, den derzeitigen Zenitabstand der Sonne, zu $96\frac{1}{2}^0$ findet. Ist also die Sonne vom Untergange an bis $6\frac{1}{2}^0$ unter den Horizont gelangt, so schließt die bürgerliche Abenddämmerung. Ebenso hat die Erfahrung gelehrt, daß beim Schlusse der astronomischen Dämmerung, wenn die kleinsten mit freien Augen wahrnehmbaren Sterne sichtbar werden, die Sonne 18^0 unter dem Horizonte sich befindet. Die astronomische Dämmerung dauert mithin vom Sonnenuntergange an bis zu der Stunde und Minute, in welcher der Sonnenmittelpunkt den 18^0 unter dem Horizonte ihm parallel gelegten Dämmerungskreis erreicht; und diese Zeit ist sehr verschieden lang, je nach der Polhöhe des Ortes und der Größe der Deklination der Sonne. Den Stundenwinkel des Sonnenmittelpunktes am Ende der astronomischen Dämmerung erhält man aus der Formel in Nr. 84, wenn man für β 18^0 nimmt. Verwandelt man ihn in Zeit und zieht man hiervon die Sonnenuntergangszeit ab, so findet man die Dauer der astronomischen Dämmerung für den betreffenden Tag. Machen dabei die Werte von φ und δ den $\sin\frac{1}{2}t$ gleich oder größer als 1, so dauert die Dämmerung die ganze Nacht. Die Zeit der hellen Nächte beginnt und schließt für einen bestimmten Wohnort, wenn $(90^0-\varphi)-\delta=18^0$, also $\delta=72^0-\varphi$ geworden ist.

§ 13. Das tropische Jahr.

85. Dauer tropischer Jahre. Unter dem tropischen Jahre versteht man die Zeit, während welcher wir den Sonnenmittelpunkt vom Widderpunkte an durch alle Zeichen des Tierkreises wandern sehen, bis zu dem Augenblicke, in welchem er das nächste Mal den Äquator wieder in aufsteigender Richtung passiert.

Der Zeitpunkt, in welchem der Sonnenmittelpunkt den Äquator durchschreitet, wird gefunden, wenn man nach Betrachtung der Figur 38 in Nr. 62 berechnet, in wieviel Sekunden nach der Kulmination am 20. März der Sonnenmittelpunkt den Weg L_1V durchlief. Die Zeit T, in welcher er L_1L_2 beschrieb, ist aus dem Rektascensionsunterschiede D_2D_1 bekannt. Es verhalten sich aber, da die Bewegung für den einen Tag als gleichförmig zu nehmen ist, die Zeiten z und T, in denen der Sonnenmittelpunkt die Strecken L_1V und L_1L_2 zurücklegte, wie diese Wege; und somit haben wir

$$z=\frac{L_1D_1}{L_1D_1+L_2D_2}\cdot T.$$

Nach den Berliner astronomischen Jahrbüchern war

Nr.	Datum	AR	Dekl.
I	1871 März 20	$23^h\,57^m\,51{,}7^s$	$-0^\circ 13'\,55{,}7''$
	21	0 1 30,2	+0 9 46,3
II	1870 März 20	$23^h\,58^m\,44{,}5^s$	$-0^\circ\,8'\,11{,}0''$
	21	0 2 22,8	+0 15 29,8
III	1869 März 20	$23^h\,59^m\,39{,}1^s$	$-0^\circ\,2'\,16{,}8''$
	21	0 3 17,4	+0 21 24,3
IV	1868 März 19	$23^h\,56^m\,53{,}4^s$	$-0^\circ 20'\,14{,}1''$
	20	0 0 31,9	+0 3 27,9
V	1872 März 19	$23^h\,57^m\,0{,}5^s$	$-0^\circ 19'\,27{,}8''$
	20	0 0 38,9	+0 4 13,8
VI	1850 März 20	$23^h\,58^m\,12{,}5^s$	$-0^\circ 11'\,40{,}2''$
	21	0 1 50,8	+0 12 1,0

Nach der Angabe I ist

$$L_1 D_1 = 13'\,55{,}7'' = 835{,}7''$$
$$L_1 D_1 + L_2 D_2 = 23'\,42'' = 1422''$$
$$T = 24^h\,3^m\,38{,}5^s = 86618{,}5^s$$

also

$$z_{71} = \frac{835{,}7}{1422} \cdot 86618{,}5^s = 50905^s \text{ Sternzeit.}$$

Mithin war das Ende des tropischen Jahres 50905^s Sternzeit nach der Kulmination des Sonnenmittelpunktes am 20. März 1871. Ebenso findet man aus II für den Anfang dieses Jahres

$$z_{70} = \frac{491}{1420{,}8} \cdot 86618{,}3^s = 29934^s \text{ Sternzeit}$$

nach der Kulmination am 20. März 1870. Das Jahr dauerte also 365 Sonnentage und 20971^s Sternzeit. Der Überschuß ist $= 5^h\,48^m\,34^s$ mittlerer Zeit. (Nr. 81.) Mithin lautet das Ergebnis:

Das tropische Jahr vom 21. März 1870 bis zum 21. März 1871 hatte $365^d\,5^h\,48^m\,34^s$ mittlerer Zeit.

Der Anfang des Jahres 1869 bis 70 war nach Nr. III

$$z_{69} = \frac{136{,}8}{1421{,}1} \cdot 86618{,}3^s = 8338^s \text{ Sternzeit}$$

nach der Kulmination am 20. März 1869; sein Ende wurde schon eben berechnet; es dauerte also 21596^s Sternzeit $= 21539^s$ mittlerer Zeit über 365 Sonnentage. Mithin ergiebt sich nun:

Das tropische Jahr vom 21. März 1869 bis zum 21. März 1870 hatte $365^d\,5^h\,58^m\,59^s$ mittlerer Zeit, war also $10^m\,25^s$ länger als das Jahr 1870 bis 71.

Dieser beträchtliche Unterschied veranlaßt, noch ein Jahr zu berechnen. Der Anfang für das Jahr 1868 bis 69 fiel nach der Angabe Nr. IV

$$z_{68} = \frac{207,9}{1422} \cdot 86618,5^s = 12664^s \text{ Sternzeit}$$

vor die Kulmination des Sonnenmittelpunktes am 20. März; es enthielt folglich 21002^s Sternzeit $= 20945^s$ mittlerer Zeit mehr als 365 Sonnentage; und das Ergebnis lautet:

Das tropische Jahr vom 20. März 1868 bis zum 20. März 1869 dauerte $365^d\,5^h\,49^m\,5^s$ mittlerer Zeit; es kommt also dem Ergebnisse für das Jahr 1870 bis 71 nahe.

86. Das Schaltjahr. Die vorstehenden drei Ergebnisse, welche nur in den Minuten und Sekunden von einander abweichen, zeigen übereinstimmend, daß ein Jahr beinahe 6 Stunden oder $\frac{1}{4}$ Tag mehr beträgt als 365 Sonnentage. Folglich geben 4 Jahre einen Gesamtüberschuß von fast einem ganzen Tage, welcher einzuschalten ist, wenn die Anfänge der Jahreszeiten sich im Kalender nicht gänzlich verschieben sollen.*) Von je 4 Jahren wählt man als Schaltjahr mit 366 Sonnentagen dasjenige, dessen Jahreszahl durch 4 ohne Rest teilbar ist. Will man eine Jahreszahl darauf prüfen, ob sie einem Schaltjahr angehört, so braucht man die Probe nur auf die aus ihren beiden letzten Ziffern gebildete Zahl zu machen. —

*) Der Schalttag wird seit Julius Cäsar als der 24. Februar eingefügt. Im Jahre 708 nach der Erbauung Roms (46 v. Chr.) bestimmte Cäsar, daß alle 4 Jahre ein Tag eingeschaltet werden solle nach den Terminalien. Dies Fest fiel auf den VII. ante Calendas Martias, also auf den 23. Februar. An dieser Stelle einzuschalten, waren die Römer gewohnt; denn es wurden, um Numas Zwölf-Monden-Jahr von 355 Tagen auf ein Sonnenjahr zu bringen, alle 2 Jahre abwechselnd 22 und 23 Tage hier eingelegt, die man mit den 5 letzten Tagen des Februar zu einem Schaltmonat, Mercedonius, vereinte. So hatte jedes Jahr einen Tag zu viel; und darum war angeordnet, daß alle 24 Jahre die für den Mercedonius bestimmten 23 Tage und noch ein Tag weggelassen werden sollten. — Cäsar verteilte 10 Tage auf die 7 Monate, welche bis dahin nur 29 Tage gehabt hatten (der Mondwechsel dauert $29^1/_2$ Tage), indem er dem Januarius, Sextilis und December je 2 Tage, dem Aprilis, Junius, September und November je einen Tag zulegte; und gab die Bestimmung über den alle 4 Jahre hinzukommenden Tag. Man bezeichnete den Schalttag mit dem Zahlworte sextus, insofern er im Kalender neben dem sextus a. C. M. stand, und da der rex sacrorum an den Nonen des Februar eines Schaltjahres bekannt machte: „Calendis bis sextus est“, so nannte man den Schalttag mit dem sextus zusammen: „die beiden Sechsten“. Später zog man die beiden Wörter in bisextus zusammen, und bezeichnete mit diesem Worte, insofern der Schalttag zwischen dem VII. und VI. a. C. M. stand, nach Analogie des römischen Ordnungszahlen-Systems, den Schalttag als den „Zweitsechsten“.

87. Ungleichheit tropischer Jahre. Gegen die beiden Jahre 1868 bis 69 und 1870 bis 71, die fast gleich lang waren, ergab sich für das dazwischen liegende Jahr 1869 bis 70 ein erheblicher Überschuß. Um zu sehen, ob jene beiden Jahre der mittleren Dauer des tropischen Jahres nahe kommen, wollen wir noch ein sich diesen anreihendes Jahr berechnen, nämlich das von 1871 bis 72, in der Erwartung, daß es eine Abweichung nach der entgegengesetzten Seite liefert.

Aus der obigen Angabe Nr. V findet man das Ende des Jahres $z_{72} = 71154^s$ Sternzeit nach der Kulmination am 19. März. An diesem Tage waren aber seit dem 20. März 1871 doch schon 365 Tage vergangen, weil im Februar 1872 der Schalttag dazwischen getreten ist. Mit dem aus Nr. I bekannten Anfange verbunden, ergiebt sich:

Das tropische Jahr vom 20. März 1871 bis zum 19. März 1872 dauerte $365^d\,5^h\,36^m\,34^s$ mittlerer Zeit. Seine Größe bleibt also hinter jenen beiden Jahren noch mehr zurück, als diese von dem Zwischenjahre übertroffen wurden.

88. Die **mittlere Dauer des tropischen Jahres** ist, damit die ungleichen Abweichungen sich möglichst ausgleichen, als das arithmetische Mittel aus einer größeren Reihe von Jahren zu berechnen. Wir wählen dazu die 22 Jahre vom 20. März 1850 bis 19. März 1872.

Aus der obigen Angabe VI erhält man den Anfangspunkt dieses Zeitabschnitts 42675^s Sternzeit nach der Kulmination des Sonnenmittelpunktes am 20. März 1850; das Ende war in Nr. 87 aus V gefunden, nämlich 71154^s Sternzeit nach der Kulmination am 19. März 1872. Vom letzten Jahre, dem Schaltjahre 1872, wurden nur 365 Tage genommen; und somit beträgt jener Zeitabschnitt $22 \cdot 365^d + 5^d + 28401{,}2^s$ mittlerer Zeit. Daraus ergiebt sich*)

das tropische Jahr $= 365^d\,5^h\,48^m\,47{,}33^s$ mittlerer Zeit.

Anmerkung. Stellt man die Ergebnisse für die Größe jener vier in Nr. 85 und 87 berechneten Jahre zusammen und schreibt ihre Abweichung von der mittleren Dauer des tropischen Jahres auf, so sieht man, daß einzelne tropische Jahre in den Minuten erheblich abweichen können.

*) Das Ergebnis stimmt genau überein mit der Größe des tropischen Jahres welche die Astronomen für die Gegenwart angeben. [Es nimmt nämlich in einem Jahrhundert um $0{,}595^s$ ab.]

89. Ungenauigkeit beim Einschalten eines Tages. Bei dem in Nr. 86 angegebenen Schaltverfahren, welches dem von Julius Cäsar eingeführten und nach ihm benannten Julianischen Kalender angehört, wird stets etwas zu viel eingeschaltet. Dieser bei jedem Schalttage fast $\frac{3}{4}$ Stunden betragende Überschuß muß nach Ablauf von Jahrhunderten störend hervortreten dadurch, daß der Frühlingsanfang schon da ist, während der Kalender noch nicht auf den 21. März gekommen ist.

So war in der Mitte des 16. Jahrhunderts an den Frühlingsanfang schon der 11. März herangetreten. Da die kirchliche Festrechnung es wünschenswert machte, sich auf das Konzil zu Nicäa (im Jahre 325) zu beziehen, auf welchem angegeben war, daß die Frühlingsnachtgleiche zur Zeit am 21. März sei, so befahl Papst Gregor XIII. durch die Bulle vom 1. März 1582, um die damalige Lage des Kalenders wieder herzustellen, zur Ausmerzung der seitdem zu viel eingeschalteten 10 Tage, es solle der im Jahre 1582 auf Donnerstag den 4. Oktober folgende Tag Freitag der 15. Oktober genannt werden (also 10 Nummern der Tage fort, ohne den Zug der Wochentage zu unterbrechen).*)

90. Aufsuchen eines Schaltverfahrens. Um nun zu sehen, wie Schalttage einzulegen sind, damit der Kalender auf dem Sonnenjahre fest werde, ist zu berechnen, nach wieviel Jahren von 365 Tagen man den alljährlich hinzukommenden Bruchteil des 366. Tages annähernd zu einer ganzen Zahl von Tagen vereinigen könne. Man hat dazu (nachdem der Überschuß zunächst in Sekunden angegeben ist) $\frac{2\,092\,733}{8\,640\,000}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, indem man Zähler und Nenner des Bruches durch den Zähler dividiert und mit dem im Nenner neben der ganzen Zahl entstehenden Bruche ebenso und weiter so verfährt, und dann durch Abbrechen hinter der ganzen Zahl im ersten, zweiten, dritten ... Nenner die Näherungswerte (bis zum fünften) hinzustellen. — Diese sind $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{29}$, $\frac{8}{33}$, $\frac{31}{128}$, $\frac{70}{289}$. Man kann also die Größe des tropischen Jahres mit steigender Genauigkeit angeben: $365\frac{1}{4}$, $365\frac{7}{29}$, $365\frac{8}{33}$, $365\frac{31}{128}$ oder $365\frac{70}{289}$ Tage.

*) Daß man „zur Zeit der Nicäischen Kirchenversammlung 3 Tage Abweichung korrigiert habe", ist ein durch ein viel gelesenes Buch verbreiteter Irrtum. Cäsar hat das Wintersolstitium auf den VIII. Cal. Jan., d. h. auf den 25. Dezember, gesetzt. Da es zu seiner Zeit zwischen dem 23. und 24. Dez. schwankte, so scheint sein astronomischer Ratgeber Sosigenes älteren Angaben gefolgt zu sein. Das Frühlingsäquinoktium stellte Cäsar entsprechend auf den 25. März (statt im Jahre 45 v. Chr. auf den 23.). — [Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. Aus den Quellen bearbeitet von Prof. Dr. Ludwig Ideler. Berlin, 1825. 2 Bände. Bd. II, S. 124 und 143; I., S. 78. — Bd. II, S. 132 steht: „Von diesem Zeitpunkte an (vom Jahre 8 nach Chr.) bis auf unsere Tage hat der Julianische Kalender keine Störung weiter erlitten." — Auch: Piper, Zur Kirchenrechnung, Formeln und Tafeln, in Crelles Journal für Mathematik, 22. Bd. (1841), S. 97—147.]

Die Genauigkeit der letzten Angabe erstreckt sich bis in die Hundertstel-Sekunden. Demnach sind 289 Jahre $= 289 \cdot 365^d + 70^d$. Allein diese 70 Schalttage auf die 289 Jahre zu verteilen, läßt sich nicht nach einer einfachen Regel ausführen. Der vierte Näherungswert eignet sich dazu. Er sagt, daß 128 Jahre nicht, wie man nach dem Julianischen Schaltverfahren rechnen würde, 32, sondern nur 31 Schalttage haben dürfen. Man müßte also die Bestimmung treffen: es solle das je 128. Jahr ein Gemein-Jahr sein. In der That wäre dieses Schaltverfahren außerordentlich genau; es würde das Festlegen des Kalenders sehr gut leisten.

91. Die Gregorianische Schaltordnung. Die unserm Gregorianischen Kalender zu Grunde liegende einfache Regel läßt sich ausdrücken: Zwei Nullen, am Ende einer Jahreszahl, sollen vor Anwendung der Julianischen Schaltregel gestrichen werden. — Hiernach haben 400 Jahre 97 Schalttage.*) Diese Bestimmung steht jener auf dem 128. Jahre beruhenden Schaltweise an Genauigkeit erheblich nach. Denn zu $3 \cdot 128$ Jahren sind 93 Schalttage erforderlich; die an 400 Jahren fehlenden 16 Jahre geben noch 4 Schalttage hinzu. Allein durch dieses Hinzunehmen der 16 Jahre entfernt man sich nicht unbeträchtlich von jener bei 384 Jahren stattfindenden großen Genauigkeit. Während man nämlich hier kaum eine Viertelstunde zurückgeblieben war, legt man in den 4 Schalttagen (nach Nr. 89) 3 Stunden zu viel hinzu,

---

*) Luigi Lilio, ein Arzt in Rom (gest. 1576), der als der eigentliche Urheber der neuen Schaltrechnung anzusehen ist, rechnete das mittlere tropische Jahr gleich dem mittleren Jahre des Kopernikus zu $365^d\,5^h\,49^m\,16^s$. Hiernach fehlen an $365^d\,6^h$ nur $10^m\,44^s$. Die abrundenden 644^s geben einen vollen Tag in $86400 : 644 = 134$ Jahren. Diese 134 Jahre nahm Lilio, um eine rundlaufende Rechnung zu bekommen, als $1^1/_3$ Jahrhundert, und hatte so durch je 4 Jahrhunderte eine gute Ausgleichung. — [Prof. Dr. Wilhelm Matzka, Die Chronologie in ihrem ganzen Umfange. Wien, 1844. Seite 251. Auch Ideler, Handbuch der Chronologie, II. S. 301—304.]

Anmerkungen aus der Chronologie. 1. Hätte man den Kalender an der Stelle festlegen wollen, wie er am Anfange der christlichen Zeitrechnung im Sonnenjahre lag (der dreiundzwanzigste März bei der Frühlingsnachtgleiche), so mußten im Jahre 1582 viermal 3 Säkularjahre als Gemeinjahre gelten, mithin 12 statt 10 Tage als zuviel genommene Schalttage ausgelassen werden. Es sind daher zwei Tage mehr vorhanden in der christlichen Zeitrechnung.

2. Im Kreislauf der 7 Wochentage liegt unsere Zeitrechnung so, daß der 1. Januar „des Jahres 1 nach Christi Geburt" ein Sonnabend war. Das vorhergehende Jahr heißt „das Jahr 1 vor Chr." Wie lautet hiernach die vollständige Antwort auf die Frage: Wann ist Christus geboren? — (Zur Probe, ob jener 25. Dezember ein Sonnabend war, berechne man den heutigen Wochentag aus seinem Datum.) [Auch den Wochentag Ihrer Geburt?]

3. Das erste Jahr, in welchem die Tage nach Cäsars verbessertem Kalender gezählt wurden, war das Jahr 709 nach Erbauung Roms oder das Jahr 45 v. Chr. Von seinem Anfange an bis zum Konzil zu Nicäa, im Jahre 325 n. Chr., waren vergangen 369 Jahre, nicht 370; das Konzil war im 325sten Jahre nach Chr. Geb.

so daß in 4 Jahrhunderten $2^h\ 44^m\ 28^s$ zu viel eingeschaltet sind, was die gewünschte Unveränderlichkeit in der Lage des Kalenders nach großen Zeitabschnitten beeinträchtigen muß. Denn dieser mit je 400 Jahren hinzukommende Überschuß von 9868^s wächst zu einem ganzen Tage an in 3500 Jahren; so daß der Fehler in der Gregorianischen Schaltweise stets nach Ablauf solcher Periode*) dadurch wieder ausgeglichen werden muß, daß ein Schaltjahr als ein Gemeinjahr zu nehmen ist. Die Gregorianische Schaltregel leistet das Gewünschte nicht vollkommen; während bei der 128 jährigen Schaltperiode die Notwendigkeit eines Ausgleichs sich nicht bemerklich machen würde. Dabei müßte die Regel lauten: Ist eine Jahreszahl durch 4 teilbar, so gehört sie einem Schaltjahr an, nur nicht, wenn sie auch durch 128 aufgeht. Allein sie wäre unpraktisch, weil bei Jahreszahlen, wie 1920 oder 2176, nicht sofort ersichtlich ist, daß sie durch 128 teilbar sind. Die Einfachheit der Handhabung empfiehlt die Gregorianische Regel.

Anmerkung. Die vom Papste Gregor XIII. befohlene Kalenderverbesserung wurde nur in wenigen katholischen Ländern im Jahre 1582 ausgeführt; andere folgten einige Jahre nachher. Die Protestanten in Deutschland nahmen die Veränderung erst 1700, England 1752 und Schweden 1753 vor.**) Die Anhänger der griechisch-katholischen Kirche zählen noch heute nach dem Julianischen Kalender fort. Da dieselben jene 10 Tage im Jahre 1582 nicht ausließen und sie seitdem noch 2 Tage zu Schalttagen nahmen, während wir die Jahre 1700 und 1800 als Gemeinjahre rechneten, so sind sie gegen unsern Kalender um 12 Tage zurück; und diese Differenz wird nach dem Jahre 1900 auf 13 steigen. Bei den Russen und den Griechen fällt der Frühlingsanfang jetzt auf den 9. März „alten Stils“, und wird nach 1900 auf den 8. März hinübertreten.

§ 14. Das siderische Jahr.

92. Zahlenwerte für die Schiefe der Ekliptik. Aufgabe. Die Schiefe der Ekliptik zu berechnen aus Rektascension und Deklination des Sonnenmittelpunktes.

Aus den gegebenen Katheten a und d eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks hat man den der Seite d gegenüberliegenden Winkel ε durch

$$\operatorname{cotg} \varepsilon = \sin a \operatorname{cotg} d.$$

---

*) Das sind Zeitabschnitte, gleich dem von Abraham bis zum Anfang der neueren Geschichte.

**) Vergl. die Note zu Nr. 22 über Newtons Geburts- und Todestag.

Beispiele:

I.	1830 Mai 1	AR	$2^h\,32^m\,27{,}51^s$,	Dekl. $+14^0\,59'41{,}8''$.
II.	1850 Sept. 1		10 40 56,10 ,	$+$ 8 20 53,7.
III.	1870 Juli 5		6 57 12,62 ,	$+$22 48 12,8.

Die in Zeit angegebene Rektascension ist in Grade (Minuten und Sekunden) zu verwandeln; (Nr. 43) man erhält im Beispiele I AR in Bogen $a = 38^0\,6'\,52{,}65''$.

Ergebnisse: I. $\varepsilon = 23^0 27'\,31{,}70''$ (32,2″).
II. $\varepsilon = 23^0 27'\,25{,}01''$ (25,0″).
III. $\varepsilon = 23^0 27'\,18{,}67''$ (19,1″).

93. Abnahme der Schiefe der Ekliptik. Vorstehende Ergebnisse zeigen eine kleine Verminderung in den zweimal 20 Jahren. In der That nimmt die Schiefe der Ekliptik seit den ältesten historischen Zeiten ab.

Der Jesuit Antoine Gaubil, welcher 1723 als Missionar nach China ging, berichtet aus einer alten chinesischen Handschrift, daß der Kaiser Tschu-Kong, welcher von 1104 bis 1098 vor Chr. Geb. regierte, im Jahre 1100 die Höhe der Sonne in beiden Solstitien mit einem Gnomon beobachtet habe. Die Höhe dieses Obelisken betrug 8 chinesische Schuhe über der wagerechten Grundfläche, die Schattenlänge war im Sommersolstitium $1\frac{1}{2}$ Schuh und im Wintersolstitium fehlte dem 13. Schuhe nur sein 32. Teil. — Man berechne aus dieser 3000 Jahre alten Beobachtung die damalige Schiefe der Ekliptik. Die Strahlenbrechung bei der großen Höhe ist 11″, bei der kleinen 1′ 33″, der scheinbare Halbmesser der Sonne am 21. Juni 15′ 46″ und am 21. Dezember 16′ 17″.*)

Antwort: $23^0\,52'\,17''$. Das sind 25′ mehr als jetzt. Die Sonne kulminierte damals um $\frac{1}{8}$ ihres scheinbaren Durchmessers am längsten Tage höher und am kürzesten Tage tiefer, als gegenwärtig.

Obigem fügt Littrow (1781—1840, seit 1819 Direktor der Sternwarte in Wien) in § 50 seines Buches „die Wunder des Himmels“ noch hinzu die Angaben folgender Beobachter:

	Schiefe der Ekliptik.
Der Grieche Pytheas in Massilia (Marseille), 350 v. Chr. (mittels eines Gnomon)	$23^0\,49'\,20''$
der Araber Ibn-Junis in Ägypten, 1000 n. Chr.	23 34 26
Coschu-King in China, 1280	23 32 2
Fürst Ulugbegh in Samarkand, 1437	23 31 48
Bradley in England, 1750	23 28 18.

*) Das arithmetische Mittel der beiden Sonnenhöhen ist die Äquatorhöhe, daher die Polhöhe des Beobachtungsortes Loyang, jetzt Honan-Fu genannt, $34^0\,45'\,25''$. Dieselbe ist von den Missionaren hiermit in guter Übereinstimmung gefunden. Dies bestätigt die Zuverlässigkeit auch jenes Ergebnisses.

94. Berechnung der **Länge und Breite** eines Fixsterns aus seiner Rektascension und Deklination.

Auflösung. In Figur 39 zu Nr. 73 ist J der Pol der Ekliptik EK. Da ♈P und ♈J (in der Figur, als störend, fortgelassen) Quadranten sind, so sind auch ♈A, ♈K und ♈Q 90^0. Deshalb ist in dem sphärischen Dreiecke JPL die Seite $JP = KA = \varepsilon$ (der Neigungswinkel ABK ist die Schiefe der Ekliptik ε). Der Bogen $CK = 90^0 - l$ giebt den Winkel $PJL = 90^0 - l$ und QD den Winkel $JPL = 90^0 + \alpha$. Man kennt also in dem Dreiecke JPL zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel P. Die ihm gegenüberliegende Seite $JL = 90^0 - b$ liefert die Breite b und der Winkel PJL die Länge l.

Zunächst hat man mittels des Kosinussatzes für die Seite JL

$$\sin b = \sin d \cos \varepsilon - \cos d \sin \varepsilon \sin \alpha$$

oder, wenn man $\cos \varepsilon$ herausstellt,

$$\sin b = \cos \varepsilon (\sin d - \cos d \,.\, \operatorname{tg} \varepsilon \sin \alpha).$$

Nun werde der Hilfswinkel ω eingeführt als

$$1) \quad \operatorname{tang} \omega = \operatorname{tg} \varepsilon \sin \alpha,$$

dann erhält man $2) \quad \sin b = \dfrac{\cos \varepsilon \sin (d - \omega)}{\cos \omega}$.

Nachdem hierdurch die Breite b gefunden ist, ergiebt sich durch den Sinussatz

$$3) \quad \cos l = \frac{\cos \alpha \cos d}{\cos b}.$$

95. 12 Beispiele. Nach diesen Formeln möge man für irgend einen der in der folgenden Tabelle A (S. 100) angegebenen Sterne aus der beobachteten Rektascension und Deklination*) seine Länge und Breite für jedes der drei Jahre 1830, 1850 und 1870 (gleichzeitig neben einander) berechnen, wozu die Werte der Schiefe der Ekliptik

für 1830 $\varepsilon = 23^0 27' 32''$
für 1850 $\varepsilon = 23^0 27' 25''$
für 1870 $\varepsilon = 23^0 27' 19''$

aus Nr. 92 bekannt sind. Die in Tabelle B zusammengestellten Ergebnisse sind die der Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen. [Beim Hilfswinkel sind noch Hundertstelsekunden bestimmt, und beim

---

*) Die Angaben sind den Berliner astronomischen Jahrbüchern für 1830, 1850 und 1870 entnommen.

Interpolieren wegen der Sekunden sind die Logarithmen nicht auf 7 Decimalen abgerundet, sondern es ist stets noch eine achte Decimale in der Rechnung mitgeführt.]

96. Das Rückwärtsgehen des Widderpunktes. Für Tabelle A sind bei jedem Quadranten des Äquators drei Sterne willkürlich genommen. Deshalb sind die aus den Ergebnissen nun abzuleitenden Folgerungen als allgemein gültig hinzustellen.

Während in den zweimal 20 Jahren die demselben Sterne angehörigen Deklinationen sich verändert haben, und zwar zum Teil recht erheblich (s. die letzte Spalte 7 der Tabelle A), ist der Unterschied der gefundenen Breiten außerordentlich gering (s. Spalte 12 in der Tabelle B). So kleine Abweichungen können teils aus der nicht völlig unveränderlichen Schiefe der Ekliptik, teils aus den Ungenauigkeiten der letzten Decimale der Logarithmentafeln hervorgehen. Wenn demnach die Breite bei allen Fixsternen stehen bleibt, so ruht die Ekliptik; der Äquator bewegt sich, und ruft dadurch jene Veränderungen in den beobachteten Größen hervor. Da die Rektascensionen und die Längen bei allen Fixsternen mit den Jahren zunehmen, so muß der beiden gemeinsame Anfangspunkt der Zählung, der Widderpunkt, seine Lage verändern. Er geht, da die Zahlen wachsen, entgegengesetzt der Richtung, in welcher wir den Sonnenmittelpunkt die Ekliptik beschreiben sehen. Letzteres Fortschreiten (links herum) nennen die Astronomen vorwärts. Der Widderpunkt geht also rückwärts (vom Nordpol aus gesehen rechts herum, wie der Uhrzeiger).

Für die Geschwindigkeit, mit welcher der Widderpunkt auf der ruhenden Ekliptik fortrückt, ergeben die Längendifferenzen für 1850 und 1830, sowie für 1870 und 1850 nahe übereinstimmende Werte, so daß die Geschwindigkeit als fast gleichförmig anzusehen ist. Demnach läßt diese Größe sich als eine jährliche Veränderung angeben. (S. Spalte 13 und 14.) Das arithmetische Mittel aus den 12 Ergebnissen der Tabelle ist für 1850 und 1830 (Spalte 13)

$$\tfrac{1}{20}(l_{50} - l_{30}) = 50{,}220''$$

und für 1870 und 1850 (Spalte 14)

$$\tfrac{1}{20}(l_{70} - l_{50}) = 50{,}263'',$$

und das arithmetische Mittel aus allen **50,241''**.*)

*) Dieses Ergebnis stimmt genau überein mit der in den Berliner astronomischen Jahrbüchern für 1870 und 1871 angegebenen Größe der „allgemeinen Präcession".

A. Beobachtet.

1. Nr.	2. Äquator-Quadrant	3. Fixstern	4. im Jahre	5. Rektascension	6. Deklination	7. Unterschied der Deklinationen
1.		α Arietis	1830	1h 57m 36,404s	+ 22° 39′ 15,70″	+ 5′ 46,03″
			1850	1 58 43,596	+ 22 45 1,73	+ 5 45,96
			1870	1 59 50,982	+ 22 50 47,69	
2.	I.	α Persei	1830	3h 12m 13,766s	+ 49° 14′ 54,09″	+ 4′ 26,17″
			1850	3 13 38,460	+ 49 19 20,26	+ 4 24,90
			1870	3 15 3,264	+ 49 23 45,16	
3.		β Orionis	1830	5h 6m 22,224s	− 8° 24′ 17,82″	+ 1′ 31,60″
			1850	5 7 19,807	− 8 22 46,22	+ 1 31,64
			1870	5 8 17,509	− 8 21 14,58	
4.		α Leonis	1830	9h 59m 18,576s	+ 12° 47′ 40,36″	− 5′ 47,12″
			1850	10 0 22,644	+ 12 41 53,24	− 5 47,44
			1870	10 1 26,805	+ 12 36 5,80	
5.	II.	α Ursae maj.	1830	10h 53m 9,761s	+ 62° 39′ 59,99″	− 6′ 26,36″
			1850	10 54 25,531	+ 62 33 33,63	− 6 26,43
			1870	10 55 40,957	+ 62 27 7,20	
6.		β Leonis	1830	11h 40m 22,910s	+ 15° 31′ 19,19″	− 6′ 41,81″
			1850	11 41 24,220	+ 15 24 37,38	− 6 41,49
			1870	11 42 25,659	+ 15 17 55,89	
7.		1 α Librae	1830	14h 41m 17,870s	− 15° 17′ 7,16″	− 5′ 6,85″
			1850	14 42 23,918	− 15 22 14,01	− 5 3,38
			1870	14 43 29,966	− 15 27 17,39	
8.	III.	α Scorpii	1830	16h 18m 59,827s	− 26° 2′ 49,25″	− 2′ 51,04″
			1850	16 20 13,107	− 26 5 40,29	− 2 46,15
			1870	16 21 26,392	− 26 8 26,44	
9.		α Herculis	1830	17h 6m 53,940s	+ 14° 35′ 24,50″	− 1′ 30,71″
			1850	17 7 48,563	+ 14 33 53,79	− 1 27,04
			1870	17 8 43,280	+ 14 32 26,75	
10.		α Lyrae	1830	18h 31m 10,981s	+ 38° 37′ 47,54″	+ 1′ 0,39″
			1850	18 31 51,585	+ 38 38 47,93	+ 1 3,40
			1870	18 32 32,246	+ 38 39 51,33	
11.	IV.	α Aquarii	1830	21h 57m 3,000s	− 1° 8′ 33,42″	+ 5′ 44,83″
			1850	21 58 4,661	− 1 2 48,59	+ 5 47,77
			1870	21 59 6,407	− 0 57 0,82	
12.		α Pegasi	1830	22h 56m 17,880s	+ 14° 17′ 31,69″	+ 6′ 25,64″
			1850	22 57 17,519	+ 14 23 57,33	+ 6 26,74
			1870	22 58 17,221	+ 14 30 24,07	

B. Berechnet.

8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
Nr.	im Jahre	Länge	Breite	Unterschied der Breiten	Längendifferenz für 1 Jahr $\frac{1}{20}(l_{50}-l_{30})$	$\frac{1}{20}(l_{70}-l_{50})$
1.	1830	35° 17′ 6,483″	+ 9° 57′ 39,91″	+ 1,05″	50,315″	
	1850	35 33 52,790	+ 9 57 40,96	+ 0,78		50,419″
	1870	35 50 41,165	+ 9 57 41,74			
2.	1830	59° 42′ 40,011″	+ 30° 6′ 30,73″	+ 5,41″	50,205″	
	1850	59 59 24,112	+ 30 6 36,14	+ 5,35		50,188″
	1870	60 16 7,881	+ 30 6 41,49			
3.	1830	74° 27′ 15,346″	− 31° 8′ 33,22″	+ 6,47″	50,261″	
	1850	74 44 0,558	− 31 8 26,75	+ 6,99		50,356″
	1870	75 0 47,673	− 31 8 19,76			
4.	1830	147° 27′ 59,344″	+ 0° 27′ 37,63″	+ 0,91″	49,985″	
	1850	147 44 39,040	+ 0 27 38,54	+ 1,61		50,065″
	1870	148 1 20,339	+ 0 27 40,15			
5.	1830	132° 48′ 36,256″	+ 49° 40′ 24,67″	+ 1,35″	50,508″	
	1850	133 5 26,413	+ 49 40 26,02	+ 0,98		50,440″
	1870	133 22 15,215	+ 49 40 27,00			
6.	1830	169° 15′ 33,547″	+ 12° 16′ 49,33″	− 6,09″	49,857″	
	1850	169 32 10,695	+ 12 16 43,24	− 4,93		49,958″
	1870	169 48 49,863	+ 12 16 38,31			
7.	1830	222° 39′ 20,490″	+ 0° 22′ 54,05″	− 7,80″	50,178″	
	1850	222 56 4,055	+ 0 22 46,25	− 5,27		50,110″
	1870	223 12 46,263	+ 0 22 40,98			
8.	1830	247° 23′ 21,933″	− 4° 33′ 0,27″	− 7,79″	50,250″	
	1850	247 40 6,936	− 4 33 8,06	− 4,08		50,196″
	1870	247 56 50,857	− 4 33 12,14			
9.	1830	253° 46′ 37,506″	+ 37° 18′ 13,60″	− 6,47″	50,243″	
	1850	254 3 22,367	+ 37 18 7,13	− 3,28		50,295″
	1870	254 20 8,276	+ 37 18 3,85			
10.	1830	282° 55′ 54,634″	+ 61° 44′ 20,33″	− 1,67″	50,490″	
	1850	283 12 44,432	+ 61 44 18,66	+ 1,06		50,605″
	1870	283 29 36,536	+ 61 44 19,72			
11.	1830	330° 58′ 53,608″	+ 10° 40′ 8,02″	− 2,57″	50,157″	
	1850	331 15 36,739	+ 10 40 5,45	− 0,73		50,280″
	1870	331 32 22,344	+ 10 40 4,72			
12.	1830	351° 7′ 0,673″	+ 19° 24′ 32,97″	− 0,64″	50,187″	
	1850	351 23 44,403	+ 19 24 32,33	− 0,12		50,241″
	1870	351 40 29,226	+ 19 24 32,21			

Diese erst nach Verlauf einer Reihe von Jahren hervortretende Veränderung in den Längen der Fixsterne, welche schon der alexandrinische Astronom Hipparch (Gründer der wissenschaftlichen Astronomie, er starb um 125 v. Chr.), durch Vergleich seiner Beobachtungen (auf der Insel Rhodus) mit den 150 Jahre früher von Aristyll und Timocharis gemachten, erkannte, schrieb man im Altertume einer Eigenbewegung der Sterne zu, und nannte sie, gemäß der Zunahme der Längen, die Präcession der Fixsterne. Allein da sie sich bei allen Fixsternen übereinstimmend zeigt, so findet sie ihre einfache und vollkommene Erklärung in dem Zurückweichen des Widderpunktes.*)

Eine deutliche Anschauung von der Ortsveränderung der Durchschnittspunkte des Äquators und der Ekliptik erhält man, wenn man, die Figur 39 in Nr. 73 ansehend, sich vorstellt, die in ihrem Mittelpunkte unterstützte Äquatorscheibe AQ kippe langsam nach hinten nieder. Dann bewegt sich der Durchschnittspunkt ♈ auf der festen Ekliptik nach rechts, und der Pol P des Äquators tritt hinter die durch JJ′ gehende Ebene des Papiers. Die Richtigkeit dieser Vorstellung beweist in der Tabelle A die Spalte 7, welche „Unterschied der Deklinationen" überschrieben ist. Senkt sich der Äquator mit seinem ersten und vierten Quadranten, ♈A und Q♈, so müssen die Deklinationen der über dieser Hälfte stehenden Sterne zunehmen; die gleichzeitig steigende andere Hälfte läßt die Deklinationen der über dem zweiten und dritten Äquatorquadranten befindlichen Sterne kleiner werden.

Anmerkung. Weil die Rektascensionen und Deklinationen sich ändern, werden von dem Direktor der Berliner Sternwarte astronomische Jahrbücher seit 1776 herausgegeben, in welchen dieselben für die wichtigsten Gestirne so angegeben werden, wie sie nach den neuesten Beobachtungen für die einzelnen Tage des betreffenden Jahres im Augenblicke der Kulmination sein müssen.

97. Abweichen der Zeichen der Ekliptik von den gleichnamigen Sternbildern des Tierkreises. Der Verschiebung des Nullpunktes folgen die übrigen Zeichen der Ekliptik; und so ist es gekommen, daß gegenwärtig die Zeichen der Ekliptik nicht mehr zusammenfallen mit den gleichnamigen Sternbildern des Tierkreises. Sie haben sich um ein ganzes Sternbild rückwärts verschoben; denn die Länge von α Arietis (in der Tabelle der Stern Nr. 1) betrug im Jahre 1870 $35^0 51'$ statt 0^0, die

---

*) Geschichtlich mag schon hier erwähnt werden, daß Newton 1687 den Ursprung der Präcessionsbewegung fand in der Anziehung, welche der Mond und die Sonne auf die abgeplattete Erde ausüben.

Länge der Mitte zwischen α und β Leonis (die Sterne Nr. 4 und 6) $158^0 55'$ statt 120^0, die von α Scorpii (Stern Nr. 8) $247^0 57'$ statt etwa 210^0, die von α Aquarii (Stern Nr. 11) $331^0 32'$ statt 300^0. Die Übereinstimmung von Zeichen und Sternbild wird demnach am besten hergestellt, wenn wir die Zeichen um 36^0 vorrücken; und diese Lage hatten die Zeichen vor $\frac{36 . 60 . 60}{50\frac{1}{4}}$ Jahren, das ist um 700 vor Christi Geburt.

98. Ortsveränderung des Himmelspoles. Beim Rückwärtsgehen der Äquinoktialpunkte ist die Schiefe der Ekliptik einer sehr kleinen und äußerst langsamen Änderung unterworfen. (Nr. 93.) Der Äquatorpol P (Figur 39 in Nr. 73) bewegt sich also in der Weise hinter die Ebene BJZ, daß sein Abstand vom Ekliptikpole J für Jahrhunderte fast ungeändert bleibt, da JP ebenso viel Grade, Minuten und Sekunden hat, wie die Schiefe der Ekliptik ε; d. h. P beschreibt um den Pol J der Ekliptik eine Bahn, die einer kreisrunden nahe bleibt. Er braucht zu einem Umlaufe so viel Jahre, wie die in Nr. 96 erhaltenen 50,220 oder 50,263 Bogensekunden in der Kreisperipherie der Ekliptik enthalten sind: also rund 25800 Jahre.*) (Nr. 172, Note.)

Der Pol der Ekliptik befindet sich, wie ein (nach Nr. 65 gefertigter) Himmelsglobus erkennen läßt, im Sternbilde des Drachen. Er ist der in Figur 3 zu Nr. 8 mit J bezeichnete Punkt.

Bei diesem langsamen Rundgange nähert sich der Nordpol der Himmelskugel gegenwärtig dem Polarsterne etwa in der Richtung von δ Ursae majoris zum Polarsterne.

Aufgabe. Der Abstand des Himmelspoles vom Sterne α Draconis (Nr. 8) war im Jahre 1854 $a = 24^0 57'$. Dieser Bogen ist die Grundlinie eines gleichschenkligen sphärischen Dreiecks, dessen Spitze der Pol der Ekliptik ist, dessen Schenkel also gleich der Schiefe

*) Daß die Erde solchen Zeitabschnitt von über 25000 Jahren mit den Gesteinslagern an ihrer Oberfläche schon mehr als einmal durchgemacht hat, beweisen Auswaschungen der Flüsse. Das Bett des Niagaraflusses vom Erie-See bis Queenstown besteht aus 30^m dicken Kalklagern, welche auf Schieferthon-Massen von gleicher Dicke liegen. Diese werden weggewaschen von derjenigen Wassermenge des Niagarafalles, welche beim Aufschlagen nach hinten ausweicht, und von dem Kalklager brechen die ihrer Unterlage beraubten Stücke ab. So schreitet der Wasserfall allmählich zurück, nach Lyell (1797—1875, Prof. der Geologie in London) in je 10 Jahren um 3 Meter. Demnach waren dem Flusse erforderlich zum Herstellen der schroffwandigen Schlucht, welche von seinem Austritte aus der Queenstown-Hochebene bis zur jetzigen Stelle des Niagara-Falles 20 Kilometer lang ist, etwa 60000 Jahre.

der Ekliptik sind. Dies trifft für den alten Wert der Schiefe, $\varepsilon = 23^0\ 52'$ (Nr. 93), noch genauer zu, als jetzt.*) Aus dem Winkel an der Spitze findet man durch die Präcession 50,241″, um welche Zeit vor Christi Geburt α Draconis Polarstern war.

Aus $\sin \frac{1}{2} x = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\sin \varepsilon}$ ergiebt sich die Zeit um 2770 vor Christi Geburt. Es war also in den letzten Jahrhunderten vor Erbauung der 3 größten Pyramiden bei den ägyptischen Priestern α Draconis Polarstern.

99. Dauer des siderischen Jahres. Das tropische Jahr wurde als diejenige Zeit ermittelt, nach welcher wir den Sonnenmittelpunkt den Äquator wieder in aufsteigender Richtung passieren sehen. (Nr. 85.) Im Laufe des Jahres aber verändert der Äquator, wie in Nr. 96 nachgewiesen wurde, seine Lage ein wenig, und und zwar geht diese langsame Verschiebung ununterbrochen in der Richtung vor sich, daß der Widderpunkt hinter der auf der nördlichen Himmelshalbkugel vorschreitenden Sonne zurückweicht, und wenn sie auf der südlichen sich ihm nähert, ihr entgegenkommt. Folglich hat der Sonnenmittelpunkt, wenn wir ihn, zum Hinübertreten auf die nördliche Halbkugel, den Äquator wieder erreichen sehen, noch nicht ganz alle 360 Grade der Ekliptik beschrieben.

Zur Abkürzung bezeichnen wir die 1296000″ des Kreisumfangs mit a, die nach dem Ergebnis in Nr. 96 am ganzen Rundlaufe noch fehlenden 50,241″ mit b und die Dauer des tropischen Jahres, in Sekunden ausgedrückt, (Nr. 88) mit t. Es sind (a — b) Sekunden des Kreisumfangs durchlaufen in t Sekunden mittlerer Zeit, mithin werden die noch übrigen b Sekunden beschrieben in $\frac{bt}{a - b}$ Sekunden mittlerer Zeit. (Vor dem Rechnen können von t und a — b die beiden letzten Stellen gestrichen werden.) Es ergiebt sich:

das mittlere tropische Jahr ist um $20^m\ 23{,}39^s$ mittlerer Zeit kürzer als das siderische Jahr.

Dauer des siderischen Jahres $365^d\ 6^h\ 9^m\ 10{,}72^s$ mittlerer Zeit oder

365,256374 Tage mittlerer Zeit.

---

*) Aus der Rektascension $210^0\ 6'$ und der Deklination $+ 65^0\ 3'$ kann nach Nr. 94 die Breite und Länge für α Draconis berechnet werden. Der Winkel am Pole der Ekliptik ($1 - 90^0$) ergiebt dieselbe Antwort, wie die oben vereinfachte Aufgabe.

§ 15. Größe des Fortschreitens in der Ekliptik während eines Tages mittlerer Zeit.

100. Mittlere Größe der Schritte. In Nr. 78 wurde nachgewiesen, daß die Zeiten zwischen je zwei aufeinander folgenden Kulminationen der Sonne von ungleicher Länge sind. Wir können also zur Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher wir die Sonne von Tag zu Tag in der Ekliptik fortschreiten sehen, nicht Sonnentage gebrauchen; die Sternzeit-Tage wären unbequem zu verwenden, weil sie sich den Sonnentagen nicht anschließen; wir müssen Tage mittlerer Zeit nehmen. Von solchen Tagen sind für die vier Quadranten der Ekliptik erforderlich 92, 94, 89 und 90. (Nr. 77.) Bei der nicht großen Verschiedenheit dieser Zahlen können die Tagesschritte nur wenig von einander abweichen. Die von mittlerer Größe sind leicht zu berechnen, da wir aus Nr. 99 wissen, daß die ganze Ekliptik in 365,2564 Tagen mittlerer Zeit beschrieben wird. Man findet

$$59' 8{,}19''.$$

Durchschnittlich rückt also der Sonnenmittelpunkt täglich fast einen ganzen Grad in der Ekliptik weiter.*) Denken wir uns, zur deutlichen Anschauung dieser Größe, rechts von der Sonne noch zwei Sonnen angesetzt, so daß wir auf gemeinsamer Centrale drei gleiche Kreisscheiben sich berühren sehen, so nimmt die äußerste jetzt die Stelle ein, an welcher wir die Sonne am vorhergehenden Tage zu derselben Zeit erblickten. (Anmerk. zu Nr. 22.) Um eine so beträchtliche Strecke von zwei Sonnenbreiten (noch besser: zwei Vollmondsbreiten) bleibt bei der Umdrehung der Himmelskugel die Sonne täglich hinter den Sternen zurück.

101. Der kleinste und der größte Schritt. Es war, als der Sonnenmittelpunkt für die Berliner Sternwarte kulminierte,

Datum	Zeitgleichung	Differenz	Rektascension	Differenz	Deklination	Differenz
1871 Juli 2	$+3^m 37{,}8^s$	$+11{,}2^s$	$6^h 43^m 49{,}42^s$	$+4^m\ 7{,}78^s$	$+23^0\ 4' 24{,}5''$	$-4' 31{,}8$
3	$+3\ \ 49{,}0$		$6\ \ 47\ \ 57{,}20$		$+22\ \ 59\ \ 52{,}7$	
1870 Jan. 1	$+3^m 39{,}6^s$	$+28{,}3^s$	$18^h 47^m 26{,}54^s$	$+4^m 24{,}92^s$	$-23^0\ 0' 23{,}6''$	$+5' 14{,}1''$
2	$+4\ \ 7{,}9$		$18\ \ 51\ \ 51{,}46$		$-22\ \ 55\ \ 9{,}5$	

*) Aus der uralten Zeit, in welcher man das Jahr zu 360 Tagen rechnete, stammt die Einteilung der Sonnenbahn und jedes Kreisumfangs in 360 Grade. Nach Hesiod hatten noch die Griechen zu seiner Zeit (im 9. Jahrhunderte v. Chr.) solches Jahr von 12 Monaten zu 30 Tagen. Die Babylonier teilten nicht nur

Da die Zeitgleichung für jeden dieser vier Tage das positive Vorzeichen hat, war in jenem Augenblicke 12 Uhr mittlerer Zeit schon vorüber und wir müssen mit Hülfe der Differenzen Rektascension und Deklination für den Moment 12 Uhr berechnen. Vom 2. zum 3. Juli hatte in $24^h 0^m 11{,}2^s$ die Rektascension zugenommen um $247{,}78^s$, folglich kommen beim 2. Juli auf 217,8 Sekunden mittlerer Zeit $0{,}62^s$ in Abzug; die Deklination ist um 0,7″ zu vergrößern. So entstehen

Juli	2 12 Uhr	$a_2 = 6^h 43^m 48{,}80^s$	$d_2 = +23^0\ 4'\ 25{,}2''$
	3	$a_3 = 6\ \ 47\ \ 56{,}54$	$d_3 = +22\ \ 59\ \ 53{,}4$
Jan.	1	$a_1 = 18\ \ 47\ \ 25{,}87$	$d_1 = -23\ \ 0\ \ 24{,}4$
	2	$a_2 = 18\ \ 51\ \ 50{,}70$	$d_2 = -22\ \ 55\ \ 10{,}4$

Diese Werte geben die Länge des Sonnenmittelpunktes aus

$$\cos l = \cos a \cos d$$

nämlich für Anfangs- und Endpunkt des zu berechnenden Ekliptikbogens. Es ergiebt sich

Juli 2 $\quad l_3 - l_2 = 0^0\, 57'\, 10{,}55''\ (10{,}9'')$
Jan. 1 $\quad l_2 - l_1 = 1^0\ \ 1'\, 11{,}11''\ (\ 9{,}9'')$.

Macht man dieselbe Rechnung für je zwei benachbarte Tage des Jahres, so findet man vor und nach dem 2. Juli größere Bogen, als wir für diesen Tag erhielten, vor und nach dem 1. Januar kleinere, als sich für diesen Tag ergab; und man sieht, daß für das ganze Jahr die Größen der Bogen von dem einen der hier stehenden Werte zu dem andern durch Wachsen oder Abnehmen hinüberführen. Mithin sind diese der kleinste und der größte Bogen.

Anmerkung zur Zeitgleichung. Die Abweichung von dem in Nr. 100 berechneten Mittel, 59′ 8,19″, ist für den 2. Juli 1′ 57,64″ und für den 1. Jan. 2′ 2,92″; also selbst bei diesen Grenzwerten sind die Unterschiede nicht bedeutend. Allein diese Schritte in der Ekliptik liegen beide fern vom Äquator, wo die Meridiane näher zusammentreten. (Figur 39 in Nr. 73.) Bei den engeren Zwischenräumen sind die kleinen Schritte für die Zeitgleichung noch ziemlich günstig, die großen aber sehr ungünstig; und darum bewirkt ihre geringe Verschiedenheit doch die sehr ungleichen Veränderungen bei der Zeitgleichung (Nr. 83). Am

---

die Grade und Stunden, sondern auch ihre Längenmaße, Gewichte und Münzen in Sechzigstel. Auch in aufsteigender Ordnung faßten sie ganze Zahlen der Maße nach Potenzen von 60 zu höheren Einheiten zusammen. Die Bruchteilung nach Sechzigsteln behielten alle Kulturvölker des Altertums bei; bei den ganzen Zahlen der Maße aber ging man auf Potenzen von 10 über.

2. Juli ist die Differenz der Rektascensionen $a_3 - a_2 = 1^0\,1'\,56{,}1''$, aber bei der erdichteten Sonne stets 59′ 8,2″; also kommt die wahre Sonne, trotz des kleinsten Schrittes, um 2′ 47,9″ weiter über die Meridiane fort. Daher entsteht auch hier ein Zuwachs für die Zeitgleichung. Für den 1. Januar erhebt sich der Überschuß auf 7′ 4,3″ und ruft daher eine große Wirkung hervor. Man verfolge bei den täglichen Umdrehungen der Himmelskugel das Kulminieren der wahren und der erdichteten Sonne und beachte genau Lage und Größe der Schritte, (Nr. 82) dann sieht man deutlich, daß der Lauf der Zeitgleichung, wie die Darstellung in Figur 40 es zeigt, dort ein Paar kleine und hier ein Paar sehr große Abweichungen hervortreten lassen muß.

Zweiter Abschnitt.

Die Erde.

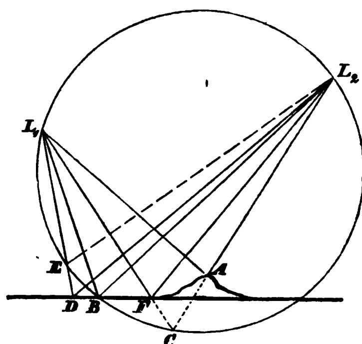
I. Kapitel.

Kugelgestalt der Erde.

§ 1. Abweichung der Oberfläche von einer Ebene.

102. Kleinheit der Erde. Mißt man mit einem Sextanten den Winkelabstand irgend zweier Sterne, so findet man ihn stets und an allen Orten der Erde von ganz derselben Größe.

Mögen die Sterne Punkte an der Himmelskugel oder frei im Raume schwebende Orte sein, so kann man sich doch durch zwei Sterne, L_1 und L_2, (Figur 41) und durch den Beobachtungsort B einen Kreis denken. Der Peripheriewinkel L_1BL_2 ist der mit dem Sextanten gemessene Winkelabstand. Wäre nun die Höhe unserer Berge nicht verschwindend klein gegen die Entfernungen der Sterne von uns, so würde ein Beobachter in A auf dem Gipfel eines Berges, wenn die Ebene des Kreises auch durch seinen Standort geht, den Winkelabstand L_1AL_2 größer finden, weil dieser Winkel als Außenwinkel größer als L_1CL_2 ist; und wenn die Ebene des Kreises nicht durch A ginge, so könnte man sie um die Sehne L_1L_2 so weit drehen, daß sie durch A geht, und dann findet dasselbe statt, weil jetzt $\angle L_1CL_2$ auch gleich $\angle L_1BL_2$ ist als Peripheriewinkel in kongruenten Kreisen auf demselben Bogen.



Figur 41.

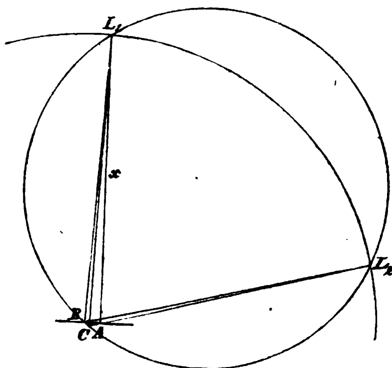
Könnte man ferner auf der Erde so weit fortreisen, daß dieser Weg eine merkliche Größe hätte im Vergleich zu den Entfernungen der Sterne von uns, so würde aus denselben Gründen

der Winkelabstand der beiden Sterne entweder kleiner (in D) oder größer (in F) sich ergeben.

Da man nun nirgends die geringste Veränderung in der Größe des Winkelabstandes findet, so folgt, daß die Höhe der Berge und jede Entfernung auf der Erde verschwindend klein ist im Vergleich zum Abstande der Sterne von uns. Es ist so, als ob wir, so weit wir auch auf der Erde fortreisen mögen, immer nur aus demselben Punkte — dem Mittelpunkte — die Himmelskugel betrachten.

Nur beim Monde und, wenn sie der Erde möglichst nahe sind, bei den Planeten Mars und Venus ergeben an sehr weit von einander entfernten Orten gleichzeitig angestellte Beobachtungen äußerst geringe Unterschiede in den Winkelabständen von nahe bei ihnen erblickten Fixsternen.

103. Vorläufig abgeschätzte Sternweite. Um darüber eine Vorstellung zu gewinnen, wie weit die Sterne mindestens von uns entfernt sein müssen, stellen wir folgende Betrachtung an. Die Eisenbahn von Paris nach Köln ist 490^{km} lang, die von Köln nach Berlin 583, von Berlin bis Königsberg 590 und die von Königsberg nach Petersburg 975^{km}; also ist der Schienenweg von Paris nach Petersburg 2638^{km} lang. Wenn nun auf den Sternwarten von Paris und Petersburg bei Beobachtung derselben Sterne, die zu den Beobachtungsorten A und B so gelegen sind, wie es Figur 42 zeigt, ein Unterschied in den Winkelabständen von einer halben Sekunde wirklich gefunden wäre, so würde $\angle AL_1C = \angle L_1AL_2 - L_1CL_2 = \frac{1}{2}$ Sekunde sein. Beschreibt man nun um L_1 mit L_1A als Radius einen Kreisbogen zwischen den Schenkeln dieses außerordentlich kleinen Winkels AL_1C, so läßt sich die Länge dieses Bogens nach der Größe von AB ungefähr abschätzen. Da nun der Schienenweg von A bis B von der geraden Linie AB abweicht, so wollen wir statt der 2638^{km} als Länge jenes Bogens rund $2450 = 780\pi$ Kilometer annehmen.*) Dann findet man den Radius $L_1A = x$ durch die Gleichung für den Bogen



Figur 42.

*) Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, daß hier nur von einer Schätzung, nicht von einer genauen mathematischen Bestimmung die Rede ist; da

$$\frac{\frac{1}{2}}{360 \cdot 60 \cdot 60} \cdot 2\pi x = 780\pi$$

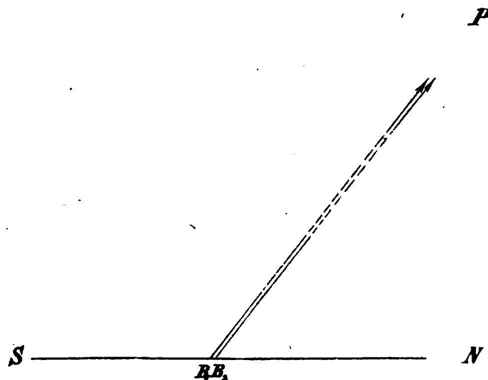
$$x = 1010880000^{km},$$

so daß wir die Entfernung der Sterne von der Erde über 1000 Millionen Kilometer uns vorzustellen haben, wenn der Unterschied der Winkelabstände $\frac{1}{2}$ Sekunde betrüge. Nun findet man aber gar keinen Unterschied; also muß die Entfernung noch weit größer sein.

Nach § 25 des Bahnpolizeireglements vom 1. Januar 1872 beträgt auf den deutschen Eisenbahnen die größte zulässige Fahrgeschwindigkeit der Güterzüge 45^{km} in der Stunde, die der Personenzüge 75^{km} und die der Schnellzüge 90^{km} in der Stunde.*)

Ein Schnellzug würde bei ununterbrochener Fahrt zu jener Strecke x 1280 Jahre brauchen, ein Personenzug 1540 Jahre.

104. Kreisrundung von Süd nach Nord. Wenn die Erdoberfläche eine Ebene wäre, so würde man an allen Orten die Polhöhe von derselben Größe beobachten. Es müßten nämlich in den beiden Beobachtungsorten B_1 und B_2 (Figur 43) auch mit

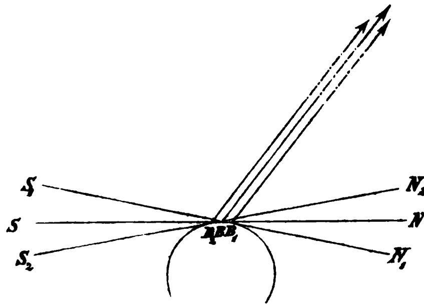


Figur 43.

wir ja nur eine Vorstellung gewinnen wollen, wie weit die Sterne mindestens von uns entfernt sein müssen. Wem die Annahme 2450^{km} noch zu groß scheinen sollte, der mag sich den Weg hinter Petersburg und Paris noch genügend weit fortgesetzt denken.

*) Hieraus folgt die Geschwindigkeit
eines Schnellzuges 25^{m},
eines Personenzuges 21^{m},
eines Güterzuges 12$\frac{1}{2}^{m}$.
Man hat zu beachten, daß in obiger Festsetzung der stündlichen Fahrgeschwindigkeit die Zeit des Aufenthaltes an den Stationen einbegriffen ist; ferner, daß die

den vorzüglichsten Instrumenten die Winkel NB_1P und NB_2P sich ganz gleich ergeben, weil die von B_1 und B_2 nach dem Pole gezogenen Linien nach einem Punkte laufen, der weit über 1000 Millionen Kilometer entfernt ist. Solche Linien sind als **parallel** zu erachten. — Wenn aber die Erdoberfläche gekrümmt ist, so muß die Polhöhe für nördlich von unserem Wohnorte gelegene Städte größer, für südlich liegende kleiner sein. (Figur 44.) $\angle N_1B_1P > \angle NBP > \angle N_2B_2P$.



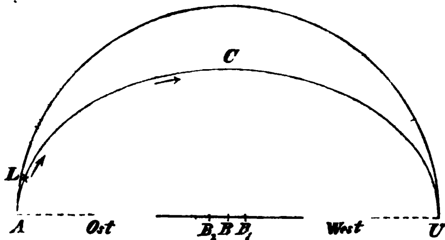
Figur 44.

Geht man kaum 2^{km} weit nach Norden, so findet man die Polhöhe schon um eine Bogenminute größer. (Vergl. das Beispiel in Nr. 59.) Für je 11^{km}, die man in nördlicher Richtung zurücklegt, wächst die Polhöhe um $\frac{1}{10}^0$. Reist man nach Süden, so nimmt die Polhöhe nach je 11^{km} um $\frac{1}{10}^0$ ab. Folglich muß die Erdoberfläche gekrümmt sein, und zwar muß sie, weil für gleiche Strecken die Polhöhe stets um gleichviel zu- oder abnimmt, **gleichförmig** gebogen sein. Der Kreis ist die krumme Linie, welche überall gleichmäßig gebogen ist. Also biegt sich die Erdoberfläche in der Richtung von Süd nach Nord **kreisförmig**.

Die Rundung von Süd nach Nord wird bestätigt durch die Ergebnisse der Berechnungen in Nr. 84. Stellt man bei Betrachtung der Figur 44 sich lebhaft vor, wie die Ebenen der Horizonte der Beobachtungsorte B_1, B, B_2 in den Mittagslinien N_1S_1, NS und N_2S_2 auf der Ebene der Figur senkrecht stehen, so sieht man deutlich, daß ein etwa im Nordosten aufgehender Stern zuerst über der Ebene N_1S_1, etwas später über NS und dann erst über der Ebene N_2S_2 erscheint; daß aber umgekehrt ein im Südosten aufgehender Stern zuerst in B_2, darauf in B und zuletzt in dem nördlichsten der drei Orte gesehen wird, — ganz so, wie für die Berechnungen der Zeit des Aufganges bei den Standpunkten der Sonne, nördlich und südlich vom Himmelsäquator, es sich ergab.

Züge bei den Bahnhöfen langsam ab- und anfahren. Folglich sind vorstehende Angaben nicht mehr als die größten zulässigen, sondern als die vorschriftsmäßigen mittleren Geschwindigkeiten der Eisenbahnzüge zu nehmen.

105. Rundung von West nach Ost. Die Erde könnte nun noch cylinderförmig sein, von Ost nach West geradlinig. Dann müßte ein im Himmelsäquator stehender Stern L (Figur 45) für alle von B östlich (B_2) oder westlich (B_1) gelegenen Orte zu derselben Zeit aufgehen und beim Untergange für alle Orte gleichzeitig verschwinden.



Figur 45.

Reist man auf der Eisenbahn mit einer gleichmäßig gehenden Uhr nach Ost, z. B. von Berlin nach Posen und Warschau, so findet man, wenn die Uhr in Berlin gerade 10 Uhr zeigte, als jener Stern aufging, daß derselbe am folgenden Abend in Posen — nicht wie in Berlin um 9 Uhr 56 Minuten — sondern außer den gewöhnlichen 4 Minuten noch 14 Minuten früher aufgeht, also schon um $9^h 42^m$. Kommt man am nächsten Tage nach Warschau, so sieht man den Stern $30\frac{1}{2}$ Minuten früher als in Berlin; bei seinem Aufgange zeigt die mitgebrachte Uhr $9^h 21\frac{1}{2}^m$, in Berlin aber tritt er an diesem Abend um $9^h 52^m$ über den Horizont. — Wäre man, statt nach Ost, nach West gefahren, von Berlin nach Hannover und Amsterdam, so hätte man an jenem ersten Abend nach der Abreise denselben Stern in Hannover erst um $10^h 10\frac{1}{2}^m$ gesehen; er kommt also dort erst zum Vorschein, wenn er an derjenigen Stelle des Himmelsäquators ist, die man in Berlin $14\frac{1}{2}$ Minuten nach seinem Aufgange ihn erreichen sieht. Und am nächsten Abend in Amsterdam muß die Uhr des Beobachters noch bis $10^h 26^m$ vorrücken, ehe der Stern hier aufgeht; während man in Berlin an diesem Abend seit $9^h 52^m$, also schon 34 Minuten früher, in Warschau sogar schon über eine ganze Stunde lang ihn am Himmelsgewölbe emporsteigen sieht. — Folglich muß auch in der Richtung nach Ost und nach West die Erdoberfläche ganz bedeutend gekrümmt sein.

Genaue Beobachtungen zeigen, daß man stets gleich viel Kilometer nach Ost gereist ist, wenn derselbe Stern um je 15 Minuten früher, und um ebensoviel nach West, wenn er immer 15 Minuten später, als an demselben Tage in Berlin aufgeht, ebenso kulminiert und untergeht. Die Erdoberfläche muß also auch von West nach Ost g l e i c h f ö r m i g gebogen sein.

§ 2. Beweise für die Kugelgestalt der Erde.

106. 1) **Aus der Kreisrundung nach den vier Himmelsgegenden.** Die in Nr. 104 und 105 besprochenen Erscheinungen zeigen sich an allen Orten der Erde in derselben Weise. Folglich muß die Erde Kugelgestalt haben.

107. 2) **Sichtbare Wölbung der freien Oberfläche.** Bei ganz freiem Horizonte beobachtet man überall auf der Erde, daß von fernen irdischen Gegenständen nur die oberen Teile sichtbar sind. Kommt z. B. ein Dampfschiff von hoher See, so wird man auf dasselbe aufmerksam durch Rauch, den man tief am Himmel, wo er das Meer zu berühren scheint, schweben sieht. Richtet man ein Fernrohr auf diese Stelle, so nimmt man nach einiger Zeit wahr, wie die Masten und der Schornstein aus dem Meere herauswachsen; dann erst erscheint langsam das Schiff selbst auf der Höhe, d. h. auf der Linie, welche Meer und Himmel scheidet, und von nun an scheint es auf der Oberfläche des Meeres herabzukommen.

Bleibt man am Fuße eines Turmes so lange stehen, bis ein in See gehendes Schiff am Horizonte soeben verschwindet, so kann man die oberen Teile desselben noch einmal zu Gesicht bekommen, wenn man den Turm schnell ersteigt.

Wegen der gewölbten Krümmung der Meeresfläche sieht man von den Mastkörben der Schiffe aus das Land zuerst, später vom Verdecke aus.

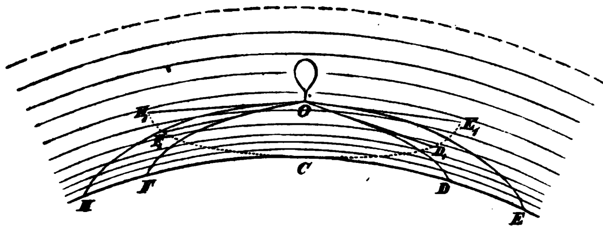
Entfernt man sich auf einem Seeschiffe von einem recht niedrigen Lande, z. B. von dem schmalen Landstreifen Prorer Wiek, welcher die östlichen Teile der Insel Rügen verbindet, so kann man bald dort nur noch die Wipfel der ungleich hohen Baumgruppen sehen. Ist man soweit fortgekommen, daß auch diese sogleich untergehen werden, so sieht man sitzend weniger Baumgruppen, als wenn man wieder aufsteht. Der Meeresspiegel ist wirklich gewölbt.

108. 3) Die Thatsache, daß der **Horizont überall** auf der Erde sich **kreisförmig** zeigt. Nur bei einem kugelförmigen Körper ist dies möglich.

Erhebt man sich höher, so nimmt die Weite der großen Kreisgrenze zu, wie es bei einer aus größerer Entfernung gesehenen Kugel sein muß. Der Anblick der von jenem Kreise umschlossenen Fläche aber ist durchaus nicht so, wie man ihn hiernach wohl sich denken möchte. Was man aus sehr großen Höhen von der Erdoberfläche erblickt, erscheint nicht als eine Kugelkappe, — es tritt

das Gegenteil ein. Und das muß so kommen, weil die Atmosphäre die Lichtstrahlen krümmt.

Befindet man sich hoch über der Erde, in einem Luftballon oder auf einem Gipfel der Alpen, so empfängt man von Punkten am Horizonte Lichtstrahlen, die in ihrem unteren Laufe gekrümmt sind und oben nach dem Beobachter hin flach streichen. (Nr. 45 und dazu Figur 27.) Er sieht also die Gegenden, je näher sie dem Horizonte sind, desto stärker gehoben [wie es Figur 46 veranschaulicht*)]; und darum erscheint ihm der erblickte Teil der Erdkugelfläche wie ein Napf.**)



Figur 46. Optische Täuschung in der Krümmung der Erdoberfläche beim Anblick aus großer Höhe.

*) Die Entfernung verkürzt sich. Der Bildpunkt H_1 liegt dem Auge O des Beobachters näher als H. Da man aber von dem Abstande eines in der Ferne erblickten Gegenstandes nur ein sehr unsicheres Urteil hat, so bringt die Vorstellung dem Beobachter das Bild noch näher. — Man vergleiche die für Luft und Wasser konstruierte Figur 4 der Tafel I zu: Engel und Schellbach, darstellende Optik. 21 Kupfertafeln. Halle, H. W. Schmidt, 1856.

**) Luftreisen von J. Glaisher, C. Flammarion, W. v. Fonvielle und G. Tissandier. Mit einem Anhange über die Ballonfahrten während der Belagerung von Paris. Frei aus dem Französischen. Eingeführt durch Hermann Masius. Mit zahlreichen Illustrationen. Leipzig, Fr. Brandstetter, 1872. [Ein sehr anziehend geschriebenes Buch.] Seite 38 sagt Glaisher, Direktor des meteorologischen Observatoriums in Greenwich: „Was mir bei dieser Fahrt (am 18. August 1862) noch besonders auffiel, war der Umstand, daß der Horizont, wenn man über den Rand der Gondel schaute, sich in der Höhe des Auges befand. Die Luftschiffer sagen, um diese ihnen wohlbekannte Sinnestäuschung zu bezeichnen, die Erde nehme die Form eines Waschbeckens an. Sicherlich liegt der Grund der Erscheinung in der Brechung des Lichtes.“ Die erreichte Höhe betrug 7300^m. — Seite 129 schreibt Flammarion, Astronom in Paris: „Die geometrische Gestalt der Erde erscheint von der Höhe aus (3000^m) sozusagen paradox. Statt sich zu runden, plattet die Kugel sich ab, ja sie vertieft sich beckenartig, so daß Himmel und Erde nur zwei hohle Wölbungen darstellen, die am Horizonte gleichsam zusammengelötet sind, und in deren Mitte das Luftschiff schwimmt.“

Freiherr von Hübner schreibt in seinem vortrefflichen Reiseberichte „Ein Spaziergang um die Welt“ (Leipzig, T. O. Weigel, 1874, 1. Band, S. 297 der größeren Ausgabe): „Du stehst auf einem Gipfel des Hochgebirges. Mit Schaudern siehst du hinab in die Schluchten und Abgründe, die dich umgeben; dann, gleichsam um das Auge zu beruhigen, blickst du über die Bergkämme hinweg nach der Ebene. Den Gesetzen der Optik gemäß, überragt sie scheinbar jene Kämme und steigt am Himmel hinan, bis sie die Höhe deines Standpunktes erreicht hat.“

109. 4) **Die Dauer der Morgen- und Abenddämmerung.** Einer ebenen Erde würde die Sonne plötzlich auf- oder untergehen, fast ohne Dämmerung, da die Licht zurückwerfenden Luftteilchen, wie schon aus der schnellen Abnahme der Dichtigkeit der Atmosphäre folgt, nur bis zu einer kleinen Zahl von Kilometern aufwärts sich erstrecken können.

110. 5) **Der stets runde Schatten der Erde bei Mondfinsternissen.** Geht der Mond bei seinem Fortschreiten unter den Sternen durch die Ekliptik an einer Stelle, deren Gradzahl die derzeitige Länge der Sonne um nahezu 180° übertrifft, so daß er am Himmel der Sonne gerade gegenüber tritt, also dahin, wohin der Schatten der Erde fällt, so entsteht eine Mondfinsternis. Wie ein Schirm bei optischen Versuchen, fängt dann der Mond den Erdschatten auf; und derselbe zeigt sich bei dieser alljährlich vorkommenden Erscheinung, von welchem Standorte aus die Sonne die Erde beleuchten mag, stets kreisrund begrenzt. Nur von einer kugelförmigen Erde kann der Schatten immer kreisrund sein.

Aus diesem Grunde, sowie aus der in Nr. 104 besprochenen Änderung der Polhöhe, wodurch in südlich gelegenen Orten andere Sternbilder sichtbar werden und in nördlichen Gegenden mehr Sterne zu Cirkumpolarsternen werden, schloß schon Aristoteles (geboren 384 v. Chr. zu Stagira in Macedonien, gestorben 322 v. Chr. in Chalcis auf Euböa), daß die Erde eine Kugel sei, und daß diese Kugel nicht sehr groß sein könne, weil, wenn man nur wenig gen Süd oder gen Nord fortgeht, die in unserem Scheitel stehenden Sterne sich sofort von demselben entfernen.*)

111. 6) **Die Reisen in allen Richtungen rund um die Erde.** Datumwechsel. Denjenigen, welche westwärts um die Erde

*) Aristoteles in seiner Schrift de coelo II, 14. Ferner sagt er: Die Erde ruht fest im Mittelpunkte der Himmelssphären, selbst eine Kugel, deren Umfang 40 Myriaden (400 000) Stadien beträgt. Den Gründen des Aristoteles fügte später Plinius (er lebte 23—79 nach Chr.) in seiner Historia naturalis hinzu: die runde Gestalt der Erde werde auch dadurch bewiesen, daß man von entfernten Schiffen zuerst die obersten Teile erblicke.

Aristoteles war ein Schüler Platons und dessen Freund während der zehn letzten Jahre seines Lebens. Den Gedanken, daß die Erde kugelförmig sei, hatte schon Pythagoras (geb. auf der Insel Samos etwa 580 vor Chr., lebte, nach längerem Verweilen in Ägypten, zu Kroton in Unter-Italien, und starb etwa 500). Von den Pythagoreern erhielt diese Vorstellung Platon (geb. zu Athen 429 vor Chr., starb 348 in Athen an seinem 82. Geburtstage). Er lehrt im Phaidon, einem seiner ersten Dialoge: es sei das Aussehen der Erde, von oben betrachtet, den Bällen ähnlich, welche aus 12 Lederstreifen zusammengesetzt sind. Sie könne nicht fallen, weil sie in der Mitte des Himmels sich befindet, und bei der vollkommenen Symmetrie keine Ursache vorhanden ist, daß sie nach einer Seite mehr als nach einer andern sich hinneige.

fahren, geht die Sonne täglich später unter, als dem Orte, bei welchem sie am Morgen dieses Tages waren. Ihnen dehnen sich die Tage. Wenn sie ein Viertel des Weges um die Erde gemacht haben, so kulminiert ihnen die Sonne, während sie in der Heimat untergeht; sie sind nun um einen Viertel-Tag gegen die Heimat zurück. Bei jedem folgenden Viertel des Weges kommt es ebenso; und wenn sie an dem Ausgangsorte wieder eintreffen, scheint ihnen ein ganzer Tag verloren gegangen zu sein, den sie also auch im Kalender nicht zählen konnten. Dies befremdete die ersten Weltumsegler. Magellan fuhr am 20. Sept. 1519 von San-Lucar (an der Mündung des Guadalquivir) mit 5 Schiffen ab, gelangte durch die nach ihm benannte Straße in den Stillen Ocean und kam auf einer der Philippinen-Inseln um. Elcano und seine Gefährten setzten mit dem einzigen noch übrig gebliebenen Schiffe die Reise um das Kap der guten Hoffnung fort und landeten an der Kapverdischen Insel Santiago Donnerstag, den 10. Juli 1522, während sie nach der Schiffsrechnung erst Mittwoch, den 9. Juli, hatten. In den Ausgangs-Hafen, San-Lucar, liefen sie ein nach ihrem Weiterzählen am 6. September; dort schrieb man den 7. September.

Demjenigen, welcher nach Osten reist, geht die Sonne täglich früher auf und unter. Die Summe der verkürzten Tage erhält dadurch einen Tag mehr, als die wirkliche Dauer dieser Reise um die Erde.

Um die Abweichung auszugleichen, pflegt man nach dem Passieren des 180. Meridians von Greenwich, wenn man westwärts herumfährt, den folgenden Kalendertag auszulassen;*) reist man aber ostwärts, so zählt man denselben Wochentag und dasselbe Datum noch einmal (mit der Bezeichnung II).**) Dann sind die Reisenden im Kalendertage immer in Übereinstimmung mit den civilisierten Bewohnern der Orte, zu welchen sie kommen.

Ein bestimmtes Datum, z. B. den Neujahrstag, zählen zuerst die Europäer auf Neu-Seeland. Für sie tritt auf der Erdkugel die Mitternachtstunde des neuen Jahres zuerst ein. Man verfolge den Eintritt des Neujahrs rund um die Erde, und überzeuge sich durch etwas weiteres Fortsetzen der Betrachtung, daß die auf der Westseite des 180. Meridians wohnenden den 2. Januar schreiben, während die auf der Ostseite den 1. Januar soeben begonnen haben. Dann sieht man ein, daß die Reisenden ihr Datum nach obiger Regel wechseln müssen.

---

*) Z. B.: Alexander Freiherr von Hübner, ein Spaziergang um die Welt. (Leipzig, T. O. Weigel, 1874, 2 Bände.) Auf Donnerstag, den 13. Juli, folgt Sonnabend, der 15. Juli 1871.

**) Professor Eduard Hildebrandts Reise um die Erde, von Ernst Kossak. (Berlin, O. Janke, 1872, 3. Auflage.) „Wir schreiben heute und morgen den dreißigsten März“ (1863).

§ 3. Kugelgestalt des Mondes.

112. Stereoskopische Photographien des Mondes. Um zwei Bilder eines Gegenstandes zu erhalten, welche zu einem Stereoskopbilde vereinigt werden können, stellt man ihm gegenüber zwei photographische Apparate so nebeneinander auf, daß sie sein würden die Augen eines Riesenkopfes, welcher um so größer zu denken ist, je weiter der Gegenstand entfernt ist, damit auf beiden Bildern die gegenseitige Lage der Bildpunkte der näheren und der entfernteren Stellen verschieden ausfalle. Solche gleichzeitigen Aufnahmen würden aber für den Mond selbst bei sehr weit voneinander abstehenden Standorten nicht hinreichend merkbare Unterschiede in beiden Bildern liefern. Man erlangt aber solche, wenn man die zweite Aufnahme viele Monate nach der ersten vornimmt. Wie man durch ungleichzeitige Aufnahmen Bilder mit der erforderlichen Verschiedenheit erhält, wird durch Folgendes deutlich.

Die Photographen pflegen, wenn eine Brustbildaufnahme gemacht ist, die Bitte auszusprechen, man möge den Kopf ein wenig mehr herumwenden. In der veränderten Haltung erfolgt dann eine zweite Aufnahme. Ein Paar solcher Bilder, die in der Stellung des Kopfes von einander verschieden sind, kann man zu einem Stereoskopbilde vereinen. Dabei ist das Bild, welches rechts die Seite des Kopfes breiter zeigt, rechts anzubringen, und zwar in nicht unbeträchtlichem Abstande vom andern, wenn die Wendung des Kopfes nur gering ist; bei erheblicher Verschiedenheit aber kommen die Bilder eng aneinander. Im Stereoskop erblickt man dann den Kopf körperlich. Das Heraustreten aus der Bildfläche überrascht um so mehr, als Brust und Arme platt bleiben; denn sie sind ja auf beiden Bildern kongruent.

So hat es Warren de la Rue mit dem Monde gemacht. Mittels eines großen Hohlspiegels, welcher ein Bild des Mondes von $2\frac{1}{2}^{cm}$ Durchmesser lieferte, photographierte er in den Jahren 1857 bis 1862 den Mond mehr als 300mal. Die Aufnahmen sind so vorzüglich, daß selbst die von ihnen gefertigten starken Vergrößerungen noch sehr scharf sind. Sechs Paar hat er zu Stereoskopbildern vereint. Sie geben den schönsten Beweis von der Kugelgestalt eines Himmelskörpers. (Nr. 213.)

Das beste von diesen Stereoskopbildern ist das Nr. VI; es zeigt den Mond im letzten Viertel. Der Anblick des so frei vor uns schwebenden Mondes macht einen gewaltigen Eindruck. Nicht allein die volle Kugelwölbung tritt stark auf uns zu, — jedes Gebirge liegt plastisch vor uns; in den zahlreichen, schroff abstürzenden Ringgebirgen sieht man deutlich die Vertiefung des weiten Thalkessels, und aus seiner Mitte steigt bei mehreren ein Centralkegel, als

Berg deutlich erkennbar, empor; die strahligen Lichtstreifen, welche die hohen Ringgebirge Tycho, Kopernikus und Kepler aussenden, strecken sich weit über weiße und graue, ebnere Landschaften hin, und an der Schattengrenze, wo die Nacht eintritt, erglänzen noch die Berggipfel in den Strahlen der untergehenden Sonne, während über die Thäler sich schon tiefes Dunkel gebreitet hat.*)

*) Die Bilder sind im Verlage bei Smith Beck und Beck, 6 Coleman street, London, E. C. Ein Bild auf Glas kostet 10 M., eines auf Papier 0,75 M.

Ein oder zwei dieser Bilder anzuschaffen, ist auf das dringendste anzuraten, weil kein Beweis so überwältigend ist, wie dieses Vor-Augen-stellen. Man wähle das oben beschriebene Nr. VI, und zwar auf Glas, und Nr. IV auf Papier. Letzteres giebt den Vollmond, also die ganze Kugel; aber es treten bei ihm nicht die Gebirge, als solche erkenntlich, hervor. Gut ist auch das Bild Nr. II, welches zwei Drittel der vollen Beleuchtung zeigt; doch befremdet die Lage, da die Schattengrenze quer läuft. — Hat man bei der oben besprochenen Brustbildaufnahme den Kopf beim Wenden nach rechts unglücklicherweise ein wenig gesenkt, so tritt, wenn das Bild mit der zugleich abwärts gehenden Verschiebung rechts liegt, das Kinn viel zu stark hervor und der Kopf erscheint länglich verzerrt. Diese Entstellung findet auf dem Bilde Nr. III statt, welches deshalb zu verwerfen ist. (Nr. I ist auf Papier schlecht.) Bei den zu Nr. II verbundenen Bildern ist die Wendung nach rechts klein, die Senkung viel stärker; und deshalb mußten diese quer nebeneinander gebracht werden, da man sonst nur, auf der Seite liegend, mit übereinander stehenden Augen beide stereoskopisch vereinigen könnte. Diese zweite Verschiebung der Bildpunkte ist schwach auch in Nr. IV vorhanden, und die daraus hervorgehende zu starke Wölbung wird von Personen, deren Augendistanz klein ist, leichter bemerkt. Zu jenen 6 Stereoskopbildern kamen 1865 noch 3 (B, C und D), welche den Verlauf einer partiellen Mondfinsternis vor Augen stellen. Zu ihnen gehört als erstes das obige Nr. IV; da ist der Vollmond noch ganz außerhalb des Erdschattens; B zeigt den rechts oben erfolgten Eintritt in den Halbschatten, C das Einrücken in den Kernschatten, und bei D schwebt der Mond vor uns, halb vom Erdschatten bedeckt. Auf diesen 3 Stereoskopbildern sind vereint die beiden gleichen Mondfinsternisse vom 27. Februar 1858 und vom 4. Oktober 1865. Man sieht, daß beidemal die Schattengrenze rund war, so, wie der Schatten eines runden Körpers auf einer Kugel sich darstellen muß. Rückwärts schließend hat man hierdurch eine Bestätigung für die Kugelgestalt der Erde. (Wer nur eines von den letzteren haben will, nehme C.)

Warren de la Rues vergrößerte Mondphotographien vom Jahre 1858 haben gezeigt, daß die von Schmidt in Athen im Jahre 1866 bemerkte Veränderung des Kraters Linné schon vor 1858 stattgefunden hat. Dieser Krater war, da er sich deutlich markierte, von Beer und Mädler bei Anfertigung ihrer 1836 vollendeten sehr genauen Mondkarte zu einem Haupt-Bestimmungspunkte genommen. Er hat sich in eine weiße Fläche von seichter Vertiefung mit kreisrunder centraler Grube verwandelt. Im Ringgebirge Marius sind 1864 zwei kleine Krater entdeckt, welche die beiden sorgfältigen Beobachter auf ihrer Karte gewiß dargestellt hätten, wenn sie vor 30 Jahren dagewesen wären. Das Ringgebirge Messier, von dem Mädler hervorhebt, daß es einem benachbarten völlig gleich sei, ist elliptisch geworden, mit einem von Ost nach West gerichteten großen Durchmesser. Das Achsenverhältnis war im Jahre 1856 0,75, 1875 nur 0,57. Der Mond ist also nicht völlig erstarrt, sondern entwickelt von Zeit zu Zeit eine vulkanische Thätigkeit, welche großartige Umgestaltungen an einzelnen Punkten der Oberfläche herbeiführt.

Anmerkung. Mit einem Fernrohre den Mond zu betrachten, ist die schlechteste Zeit die um den Vollmond. Denn es fehlen dann überall die Schatten, welche bei unserm Blicke aus der Vogelschau uns die Berge kenntlich machen. Die beste Zeit der Betrachtung ist der Tag des ersten Mondviertels, wo die Mond-Apenninen majestätisch aus der Nacht hervortreten, und wo in dem kleinen Alpengebirge das geradlinige Thal wunderbar auffällt. Auch der Tag vor dem ersten Viertel ist recht günstig. Ausgezeichnet schön aber ist der Tag nach dem ersten Viertel; denn dann ist für das Ringgebirge Plato die Sonne eben aufgegangen, und nahe bei ihm läßt der über das flache Land sich weit dehnende Schatten des Piko die schroffe Höhe dieses einzeln stehenden Felsens ahnen. Betrachtet man an einem dieser Abende den Mond nach etwa 2 Stunden noch einmal, so überrascht die Veränderung der Schattenlängen und der Beleuchtung der Berggipfel bei dem inzwischen weiter vorgeschrittenen Sonnenaufgange. Auch am 2. und 3. Abende nach dem ersten Viertel sind staunenerregende Gebiete der Mondoberfläche nahe der Nachtgrenze; am 2. Abende das Ringgebirge Kopernikus mit seinen Terrassen an der Innenseite und dem dreispitzigen Centralberge; am 3. Abende im weiteren Verfolg der Gegend des Plato der Regenbogenbusen (Sinus iridum), dessen Randgebirge in der rechten Stunde der Beleuchtung wie ein Henkel aus dem Nachtdunkel sich abhebt.

§ 4. Geographische Ortsbestimmung.

113. Erdpole. Erdäquator. Da beim Fortschreiten nach Norden die Polhöhe zunimmt, so muß sich in dieser Richtung auf der Erdkugel ein Punkt finden, bei welchem die Polhöhe 90° beträgt, wo also das Zenit mit dem Nordpol der Himmelskugel zusammenfällt. Diesen Punkt nennt man den Nordpol der Erde. Ihm liegt im Durchmesser gegenüber ihr Südpol. — Wie würde man, auf einem der Pole stehend, allnächtlich die Sterne sich bewegen sehen? — Dort giebt es keine Himmelsgegenden.

Der größte Kreis der Erdkugel, welcher auf dem die Pole verbindenden Durchmesser senkrecht steht, heißt ihr Äquator. Für jeden Punkt des Äquators liegt der Nordpol des Himmels im Nordpunkte des Horizontes, der Südpol des Himmels fällt mit dem Südpunkte des Horizontes zusammen. Für solchen Beobachtungsort gehen die Sterne senkrecht auf und unter. Dort sieht man nach und nach sämtliche Sterne der Himmelskugel am Himmelsgewölbe, von einem Erdpole aus aber nie mehr, als die Sterne der einen Hälfte der Himmelskugel. (Vergl. Nr. 35.)

114. Lage des Mittelpunktes der Himmelskugel. Die Erde ist wie ein materieller Punkt im Raume. Bei der in Nr. 31 besprochenen Beobachtung mit dem Theodoliten, welche ergab, daß wir die Sterne Parallelkreise beschreiben sehen, fanden wir den Punkt M (Figur 19 in Nr. 23), welcher sowohl in der optischen Achse des Fernrohrs, als auch in beiden Achsen des Theodoliten liegt, als den Mittelpunkt der Himmelskugel. Die zu jener Beobachtung nötige Stellung des Instruments war dort so angegeben, wie es in Berlin erforderlich ist; und es wurde darauf hingewiesen, daß der Neigungswinkel der Richtung des Centralzapfens gegen den Horizont für nördlicher liegende Orte größer, für südliche kleiner zu nehmen sei. Da nun die von allen Orten der Erde nach dem Himmelspole gerichteten Linien parallel sind (Nr. 104), so ist die Verschiedenheit der Neigungswinkel ein Zeichen, daß jede andere Stadt die Ebene ihres Horizontes in anderer Lage hat (vergl. Figur 44 in Nr. 104); und dies ist eine Folge von der Kugelgestalt der Erde; denn die Ebenen der Horizonte sind nichts anderes, als Berührungsebenen der Erdkugel. — In irgend einer andern Stadt ergiebt jene Beobachtung auch solchen Mittelpunkt M. Wenn nun also jeder Punkt der Erdoberfläche uns als Mittelpunkt der Himmelskugel erscheint, so rührt dies daher, daß alle Entfernungen auf der Erde, also auch der Abstand der Oberfläche von ihrem Mittelpunkte — wie groß dieser Radius auch sein mag — doch verschwindend klein sind gegen die über alle unsere Vorstellungen hinausgehende Größe der Entfernungen der Sterne von uns. (Nr. 102 und 103.) Da es nun für alle Stellen der Erdkugel — auch für ihren Mittelpunkt — so ist, als ob wir immer nur aus demselben Punkte die Himmelskugel betrachten, so haben wir uns die Erde zu denken nur wie einen materiellen Punkt im Raume.

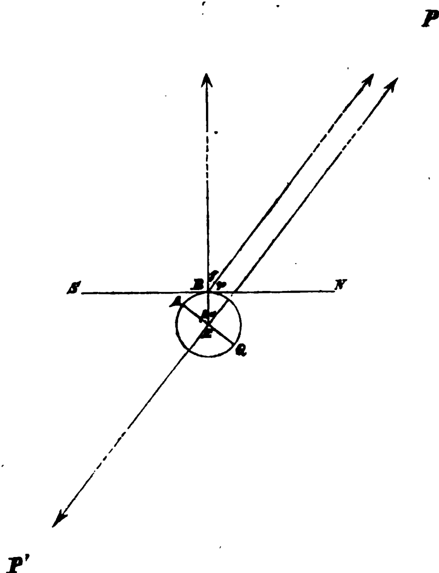
Weil es also willkürlich ist, welchen Punkt der Erde wir als Mittelpunkt der Himmelskugel annehmen, so wird es zweckmäßig sein, bei allen Betrachtungen, die sich — nicht, wie bisher, ausschließlich auf den Beobachtungsort — sondern auf die ganze Erde beziehen, den Mittelpunkt der Erde als den der Himmelskugel zu wählen. Dann ist der Durchmesser der Erde, welcher ihre beiden Pole verbindet, ein Teil der Weltachse (Figur 48 in Nr. 117), und der Erdäquator liegt koncentrisch in der Ebene des Himmelsäquators. Ebenso schneiden die Ebenen der Meridane an der Himmelskugel (Nr. 32) die Erdkugel in ihnen koncentrischen Erdmeridianen.

115. Geographische Breite und Länge.*) Vom Äquator an zählt man auf einem Erdmeridianquadranten die geographische

*) Die geographischen Koordinaten, Breite und Länge, hat Hipparch eingeführt. (Nr. 96.) Zur Ermittelung der Differenz der Ortszeiten, welche

Breite seiner Punkte. In Figur 48 zu Nr. 117 ist AB die Breite des Ortes B. Die geographische Länge aller Punkte eines Erdmeridians ist ein Bogen des Erdäquators bis zu seinem Schnittpunkte. Der Erdmeridian, welcher durch die Mitte zwischen den beiden Pfeilern des Meridianfernrohrs der Sternwarte von Greenwich geht, giebt den Anfang der Längenzählung. In Figur 48 ist GH der Meridian von Greenwich. Vom Schnittpunkte H dieses nullten Meridians aus zählt man auf dem Äquator die Längen positiv nach Osten bis $+180^\circ$ und negativ nach Westen bis -180°. HA und HL sind die Abscissen der Orte B und K, ihre Breiten AB und LK die Ordinaten. Dadurch ist die geographische Lage der Punkte B und K auf der Erdkugel bestimmt.

116. Die geographische Breite eines Ortes ist gleich seiner Polhöhe. Der kleine Kreis um E (Figur 47) ist der durch den Beobachtungsort B gehende Erdmeridian, folglich die Tangente SN die Mittagslinie für den Ort B und der Winkel NBP gleich seiner Polhöhe φ. Die von B und vom Erdmittelpunkte E nach dem Nordpole P der Himmelskugel gerichteten Linien sind parallel. (Nr. 104.) Der Durchmesser AQ ist die Durchschnittslinie der Ebenen des Meridians und des Erd-Äquators. Mithin giebt der zum Bogen AB gehörige Centriwinkel β die geographische Breite des Ortes B an. Die Behauptung $\beta = \varphi$ ist sehr leicht zu beweisen.



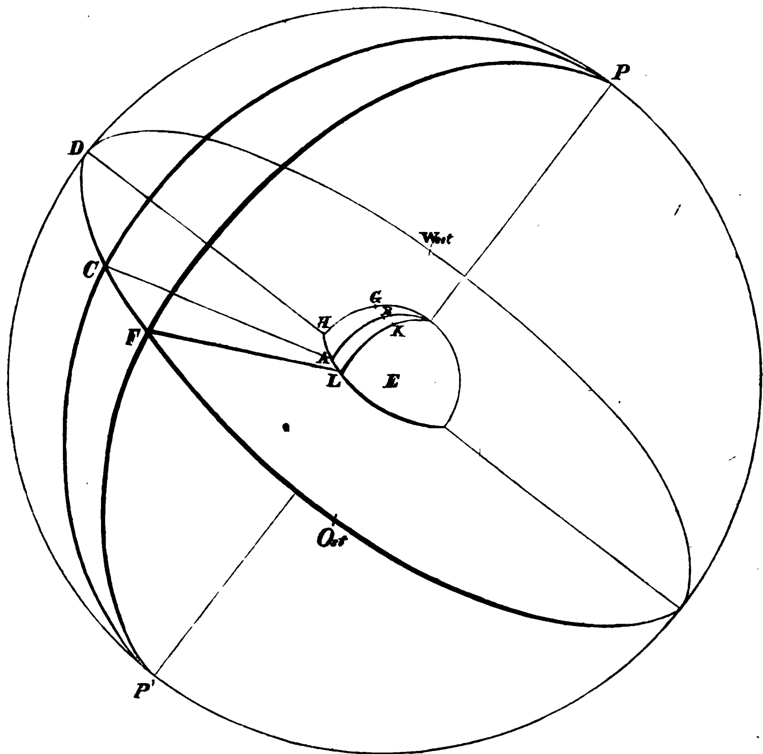
Figur 47. Die geographische Breite gleich der Polhöhe.

117. Der Unterschied der Längen zweier Orte wird mit Hilfe der Zeit bestimmt. Es sei in Figur 48 PCP′ der Meridian,

---

den Längenunterschied giebt (Nr. 117), ließ er, als eine für beide Orte gleichzeitige Erscheinung, Mondfinsternisse benutzen, deren Eintreten er für seinen Meridian von Rhodus auf eine Reihe von Jahren im voraus berechnete.

dessen Ebene durch die optische Achse des Meridianfernrohrs der Berliner Sternwarte B geht (Nr. 39), ebenso PFP′ für die Sternwarte von Königsberg K und PDP′ für die von Greenwich G. Einen der Sterne, durch welche der Himmelsäquator geht (man denke etwa an den obersten der drei Sterne des Jakobstabes — Nr. 17) sehen wir in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers von O (Ost) über C und D nach W (West) den Äquator durchlaufen. Es wurde in Nr. 39 schon gesagt, daß die Hauptuhr jeder Sternwarte stets dieselbe Zeit angiebt, wenn ein Stern für diese Sternwarte kulminiert. Ist der von uns betrachtete Stern im Punkte F angelangt, so kulminiert er in Königsberg; passiert er den Punkt C, so kulminiert er in Berlin; und erst viel später, wenn er bis D gekommen ist, geht er durch den Meridian von Greenwich. Mithin weisen die Zeiger der drei Uhren gleichzeitig nicht dieselbe Stunde; vielmehr gehen die Uhren in Königsberg und Berlin gegen die in Greenwich so viel vor, als der Stern Zeit braucht, die Bogen FD und CD zu durchlaufen. Zu jedem Grade derselben gebraucht er,



Figur 48. Bestimmung des Längen-Unterschiedes.

da ein ganzer Umlauf in 24 Stunden Sternzeit erfolgt, $\frac{24}{360}$ Stunden, d. h. 4 Minuten; und umgekehrt: in einer Zeitminute beschreibt der Stern einen Weg von $\frac{1}{4}^0$ oder 15 Bogenminuten, in einer Sekunde $\frac{1}{4}$ Bogenminute oder 15 Bogensekunden. Wenn man also weiß, wieviel Minuten und Sekunden die Uhren in Berlin und Königsberg gegen die in Greenwich vorgehen, so findet man sofort daraus die Grade, Minuten und Sekunden der Bogen CD und FD.

Ein vortreffliches Mittel zur Uhrvergleichung giebt der elektrische Telegraph, da die Geschwindigkeit des elektrischen Stromes so außerordentlich groß ist, daß er so gut wie in demselben Augenblicke in Greenwich, Berlin und Königsberg ist.*) Bei dem Chronographen der Sternwarte in Greenwich (Fig. 22 b in Nr. 25) wird der Poldraht UK_2 fortgenommen, ein Draht von U nach der Telegraphenleitung London-Berlin hinübergeführt und der negative Pol der Kette K_2 durch einen Draht, der von einer tief vergrabenen Kupferplatte herkommt, mit der Erde in leitende Verbindung gesetzt. In Berlin nimmt der Astronom die Poldrähte seines Schreibstiftes heraus; steckt in die eine Klemmschraube, hinten bei V, die Verbindung mit der Telegraphenleitung London-Berlin und in die andere, U, die für Berlin-Königsberg. Der Astronom in Königsberg führt die Telegraphenleitung bei V ein zu seinem Schreibstift, und setzt in die andere Klemme bei U den zur Erde ableitenden Draht. Schließt nun der Astronom in Greenwich die Chronographen-Taste um $0^h\ 0^m\ 0^s$ seiner Uhr, so giebt der Stich auf dem Papierstreifen der Berliner Uhr an $0^h\ 53^m\ 34{,}9^s$ **) und auf dem der Königsberger $1^h\ 21^m\ 59{,}1^s$. Mithin weiß man (Figur 48), daß der Bogen CD $13^0\ 23'\ 43{,}5''$ und FD $20^0\ 29'\ 46{,}5''$ enthält. Ebensoviel Grade, Minuten und Sekunden kommen aber auch auf die zu denselben Centriwinkeln gehörigen Bogen HA und HL des Erdäquators.

---

*) Auf Beobachtungsreisen, an Orten ohne elektrische Verbindung mit einer Sternwarte, benutzt man für Bestimmung nicht kleiner Längendifferenzen als Zeichen zur Uhrvergleichung Anfang oder Ende der Verfinsterung des innersten Jupitermondes, wenn er am Schatten Jupiters wie ein verlöschendes Flämmchen verschwindet, oder wenn er nach dem Durchgange wieder hell wird. Dieses Mittel ist von Galilei angegeben, der mit dem eben erfundenen Fernrohre 1610 am 7. Januar 3 Monde bemerkte und am 13. Januar alle 4 Monde Jupiters sah.

Die von Hipparch um 130 vor Chr. in Anwendung gebrachten Verfinsterungen des Erd-Mondes blieben das einzige Mittel zur Längenbestimmung, bis 1473 Regiomontan in seinen Ephemeriden auf 32 Jahre, durch Angabe von Standorten des Mondes unter den Sternen, ein neues Hilfsmittel bot, welches Amerigo Vespucci 1499 auf der Nordküste von Süd-Amerika zur Längenbestimmung benutzte. Er fand durch die von Regiomontan für Nürnberg auf Mitternacht des 23. Aug. 1499 angegebene Zeit der Konjunktion des Mondes mit dem Planeten Mars, die für die Zeit seines Beobachtungsortes abends um $6^1/_2$ Uhr eingetreten war: Küste Venezuela $5^1/_2{}^h$ westlich von Nürnberg. (Seite 155 in: Rudolf Wolf, Geschichte der Astronomie, München 1877.)

**) Dieser schon lange geltende Wert hat sich als ganz genau erwiesen. Astronomische Nachrichten, Bd. 95 (1879) Nr. 2265.

Folglich liegt die Sternwarte von Berlin 13° 23′ 43,5″ und die von Königsberg 20° 29′ 46,5″ östlicher Länge.

118. Wahre Dauer der Eisenbahnfahrten. Die Eisenbahnfahrpläne geben für Abgang und Ankunft der Züge Ortszeit an. Bei einer Fahrt nach West verspätet sich der Zug nicht so viel, wie nach seiner Uhr ein unkundiger Reisender es glaubt; und die Dauer der Hinfahrt und der Rückfahrt ist nicht so verschieden, wie der erste Blick auf den Fahrplan es erscheinen läßt. Man muß den Zeitunterschied der Orte in Anrechnung bringen. Der von Berlin-Königsberg ist $+ 28^m 24,2^s$ (nach Nr. 117), der ebenso ermittelte zwischen den Sternwarten von Berlin und Bonn $- 25^m 11,5^s$. Demnach können wir für die Berlin-Königsberger Eisenbahn rund $+ 28^m$ und für die von Berlin nach Köln mit Fortlassen des Überschusses hier hinlänglich genau $- 25^m$ rechnen. Ein Eilzug der Berlin-(Lehrte-Hannover-) Kölner Eisenbahn fährt ab aus Berlin abends 10^h Berliner Zeit, verläßt Hannover nachts $2^h 7^m$ Hannoverscher Zeit und kommt an in Köln morgens 8^h Kölner Zeit. Da nun Kölner Zeit um 25 Minuten gegen Berliner Zeit zurück sein muß, so ist die planmäßige Dauer der Fahrt nicht 10^h, sondern $10^h 25^m$. Demnach hat man auf dieser und auf der Berlin-(Kreuz-)Königsberger Eisenbahn (nach den Fahrplänen im September 1876) für die Eilzüge

Abgang aus	Ankunft in	Dauer der Reise
Köln 8^h abends	Berlin $7^h 10^m$ morgens	$11^h 10^m - 25^m = 10^h 45^m$
Berlin 10^h abends	Köln 8^h morgens	$10^h + 25^m = 10^h 25^m$
Berlin $10^h 45^m$ abends	Königsberg $11^h 50^m$ mittags	$13^h 5^m - 28^m = 12^h 37^m$
Königsberg $5^h 45^m$ nachm.	Berlin $6^h 10^m$ morgens	$12^h 25^m + 28^m = 12^h 53^m$

Von den beiden letzten Zügen ist derjenige, welcher nach dem Fahrplane mehr Zeit zu brauchen scheint, der schnellere.

Anmerkung. **Weltzeit.** Für die Eisenbahnverwaltung, auch für die Seedampfschiffahrt, namentlich aber für den Telegraphendienst, für Astronomie und Meteorologie, ist es erwünscht, überall ein und dieselbe Zeit-Zählung zu Grunde zu legen. Als Weltzeit wird die mittlere Zeit von Greenwich genommen. Das Datum eines Kalendertages der Weltzeit beginnt in dem Augenblicke, in welchem die Greenwicher Sternwarte Mitternacht hat. Die Nachmittags- und Abendstunden werden über 12 Uhr weiter bis 24 gezählt.

Um an derselben Uhr mit der Ortszeit auch die Weltzeit ablesen zu können, bringt man noch einen Stunden- und Minutenzeiger von roter Farbe an, die mit den alten Zeigern fest ver-

bunden werden. Da Königsberg gegen Greenwicher Zeit $1^h\ 22^m$ voraus ist (Nr. 117), so wird auf den Uhren des Telegraphenamtes in Königsberg der rote Minutenzeiger mit dem schwarzen bei der Umdrehungsachse so zusammengeschraubt, daß er 22 Minutenstriche weniger zeigt, als dieser; und da beim Stundenzeiger für eine Stunde 5 Minutenstriche und für den Stundenbruch $^{22}/_{60}$ noch $1^5/_6$ Minutenstriche kommen, so muß der rote Stundenzeiger so am alten befestigt werden, daß er $6^5/_6$ Minutenstriche weit nachfolgt. Geben dann die beiden roten Zeiger $12^h\ 0^m$ Weltzeit an, so zeigen die schwarzen 1 Uhr 22 Minuten, wie es dort die Ortszeit verlangt; und in demselben Augenblicke befindet sich mit den auf 12 weisenden roten Zeigern der schwarze Minutenzeiger eines **Berliner** Telegraphenamtes bei $53^1/_2$ Minuten und der schwarze Stundenzeiger mitten zwischen dem 4. und 5. Minutenstriche des Zifferblattes.

119. Anhang zu Nr. 117. Längendifferenz Berlin-Göttingen. Persönliche Gleichung. — Nachdem durch die Auseinandersetzung in Nr. 117 eine Vorstellung von der Bestimmung der geographischen Länge eines Ortes erlangt ist, wollen wir näher eingehend den Gang des Verfahrens darstellen, und wählen dazu die Bestimmung der Längendifferenz zwischen Berlin und Göttingen, wie sie von zwei Astronomen des preußischen geodätischen Instituts vom 25. Juli bis 15. August 1874 ausgeführt wurde, und zwar nach der Methode des lokalen Registrierens der Zeitsterne und der Vergleichung der Uhren auf elektromagnetischem Wege.*)

Es kommt vor allem darauf an, genau zu ermitteln, wieviel Sekunden die beiden Uhren zur Zeit ihrer telegraphischen Vergleichung unrichtig gehen. Nach vorher festgesetztem Beobachtungsplane registrierte in Berlin und in Göttingen jeder Astronom auf seinem Chronographen zunächst die Kulmination derselben 10 Sterne, die 2 bis 4 Minuten nach einander wenige Grade nördlich vom Äquator durch den Meridian gehen.**) Nachdem auch der Astronom auf der westlichen Station hiermit fertig war, wurden die Chronographen auf telegraphischem Wege miteinander verbunden. Eine dichte Folge von Punkten bezeichnete den Beginn der Reihe der Vergleichspunkte. Diese kamen nach 5 Sekunden Pause. Es waren 20 Punkte, die in unregelmäßigen Abständen von 1 bis 2 Sekunden von dem ersten Astronomen gegeben wurden; dann 5 Sekunden Pause, Reihe dichter Punkte, Pause, abermals 20 Punkte, 5 Sekunden Pause, Schlußreihe

*) Astronomisch-geodätische Arbeiten in den Jahren 1873 und 1874. Herausgegeben vom Königl. preußischen geodätischen Institut. Berlin, P. Stankiewicz, 1875. Seite 57 bis 74.

**) Vergl. Nr. 66. Dort sind nur zweimal 4 Sterne in die Tabelle gesetzt.

dichter Punkte. Sofort ließ die andere Station in gleicher Weise ihre Signale folgen. Darauf registrierte jeder wieder auf seinem Chronographen die Kulmination von 10 im Plane bestimmten Sternen, die nun durch den Meridian auch nahe dem Äquator gingen. Einer von den 10 Sternen, die vor dem Signalwechsel beobachtet wurden, kulminiert nach dem Sternkataloge

	um $18^h 46^m 17{,}79^s$;
der Chronograph der Berliner Uhr gab an	$18^h 47^m \ 3{,}08^s$
und der der Göttinger	$18^h 45^m 43{,}86^s$.

Nach Aussage dieses Sternes ging also die Berliner Uhr vor um $45{,}29^s$, die Göttinger $33{,}93^s$ nach. Einer von den 10 letzten Sternen kulminiert

	um $20^h 29^m 27{,}59^s$;
die in Berlin beobachtete Durchgangszeit war	$20^h 30^m 12{,}90^s$
die in Göttingen	$20^h 28^m 53{,}78^s$.

Hiernach ging nun die Berliner Uhr $45{,}31^s$ vor und die Göttinger $33{,}81^s$ nach. Aus dem arithmetischen Mittel der Angaben der 10 ersten und aus dem der 10 letzten Sterne wußte man, wie die beiden Uhren in dieser Nacht ihren Gang verändert hatten, und berechnete daraus ihre Abweichung von der Wahrheit zur Zeit des Signalwechsels. Es fand sich die Zeitverbesserung für die Berliner Uhr $-45{,}298^s$ und für die Göttinger $+33{,}807^s$.

Man hat ferner den sogenannten Stromzeit-Fehler zu beseitigen. Es vergeht ein sehr kleiner Bruchteil einer Sekunde, bis der durch die Telegraphenleitung abgeschwächte Strom im weichen Eisen den Magnetismus bis auf seine größte Stärke gebracht hat. Dort schlägt also die Nadel um den Sekundenbruch x später an das Papier, als die auf der zeichengebenden Station. Um so viel ist die Uhr noch weiter gegangen. Demnach geben die zweimal 20 Signalpunkte auf beiden Papierstreifen, geschrieben vom westlichen Beobachter, die Zeitdifferenz $t + x$ Sekunden an, die vom östlichen Beobachter gegebenen Signale $t - x$ Sekunden. Das arithmetische Mittel läßt die Stromzeit herausfallen. Aus diesem Grunde lieferte jeder Beobachter Vergleichspunkte auf beiden Chronographen. So ergab sich für diese Nacht

die Uhrdifferenz	$15^m \ 7{,}681^s$.
Es ging die Uhr in Berlin	$45{,}298^s$ vor,
diese sind also abzuziehen; es bleiben	$14^m 22{,}383^s$;
die Uhr in Göttingen ging	$33{,}807^s$ nach,
diese müssen, weil Göttingen die westliche Station ist, auch abgezogen werden. Die übrig bleibenden	$13^m 48{,}576^s$

sind aber noch zu verbessern aus einem die Astronomen sehr beschäf-

tigenden Grunde, der in der natürlichen Beschaffenheit des Menschen liegt, und ausführlicher Erläuterung bedarf. Wir geben diese durch genaue Beschreibung des Bestimmungsverfahrens.

In dem Passageninstrumente der Berliner Sternwarte sind im Okularstück 21 Vertikalfäden in gleichen Abständen ausgespannt. Der Durchgang eines Sternes durch das Gesichtsfeld dauert etwa $1\frac{1}{2}$ Minute, der Gang von Faden zu Faden 4 Sekunden. Diese Zeit wächst für Sterne größerer Deklination. Um den Durchgang eines Sternes zu beobachten, stellt sich zuerst der Astronom L. an das Fernrohr und registriert auf dem Chronographen die Durchgangsmomente bei den ersten 10 Fäden; dann tritt er zurück, und der Astronom R. markiert ebenso die für die letzten 10 Fäden. Aus den ersten 10 Stichen sieht man, wo L. den Durchgang des Sternes durch den Mittelfaden auf den Papierstreifen gesetzt haben würde, und aus den 10 andern, wohin von R. der Punkt für diesen Augenblick gekommen wäre. Diese beiden Stellen fallen nicht zusammen. Es gehört eine kleine Zeit zu dem zusammengesetzten Vorgange, welcher bei jeder Beobachtung sich vollzieht. Die Sinneswahrnehmung besteht aus drei Teilen: 1) dem Lichtreiz, welcher auf die Netzhaut des Auges ausgeübt wird, 2) der Fortpflanzung des Reizes durch den Sehnerven zum Gehirn, 3) dem Übergange desselben in das menschliche Bewußtsein. Nach der Wahrnehmung muß der Wille eine Muskelthätigkeit erregen, welche durch die Finger die Chronographentaste schließen läßt. Der Gesamtvorgang erfordert eine nicht unerhebliche Zeit, die bei den verschiedenen Personen ungleich ist. Der Unterschied dieser Zeiten wird gefunden durch das Ergebnis jener Beobachtung am Passageninstrumente, und muß für je zwei Astronomen, die gemeinsam messen wollen, ermittelt werden. Dieselben nennen dann die Differenz der zu ihrem Beobachten erforderlichen Zeiten, also denjenigen Sekundenbruch, welcher zu den Beobachtungsmomenten des zweiten addiert werden muß, damit seine Angaben denen des ersten gleich werden, ihre *persönliche Gleichung*.

Die beiden Astronomen L. und R. erforschten, bevor sie die Bestimmung der Längendifferenz Berlin-Göttingen unternahmen, durch zahlreiche Beobachtungen ihre persönliche Gleichung, und erhielten

$$L - R = + 0{,}018^s,$$

d. h. die Beobachtungsausführung dauerte bei L. $0{,}018^s$ länger, als bei R. Diese beiden Astronomen beobachteten also fast genau gleich schnell.*)

*) Von den persönlichen Fehlern handelt ausführlich der II. Abschnitt (Seite 13 bis 38) in: Dr. Th. Albrecht, Über die Bestimmung von Längendifferenzen mit Hilfe des elektrischen Telegraphen. Leipzig, W. Engelmann, 1869. Daselbst sind Seite 16 zusammengestellt die größten Werte der bekannt

Weil derjenige, welcher langsamer beobachtete, damals sich auf der westlichen Station befand, so ist von den bisher erhaltenen

	$13^m 48,576^s$
die persönliche Gleichung	$0,018^s$ abzuziehen,
und man hat	$13^m 48,558^s$

als das Ergebnis aus den Beobachtungen in einer Nacht.

Als in solcher Weise vier Ergebnisse erhalten waren, wechselten die beiden Astronomen mit ihren Theodoliten die Stationen, und beobachteten noch in 4 Nächten. Es konnten nämlich konstante Instrumentalfehler die ersten 4 Ergebnisse stets zu klein geliefert haben; dann mußten die letzten vier um denselben Betrag zu groß ausfallen; mithin wurden solche unbekannte Fehler durch das arithmetische Mittel eliminiert. Es werde bei dieser Gelegenheit nachdrücklich darauf hinwiesen, daß die Astronomen sich stets bemühen, durch geschickte Anordnung im Beobachtungsverfahren unvermeidliche Fehler zu beseitigen, anstatt diese selbst durch meist umständliche Untersuchungen wirklich zu berechnen. Die persönliche Gleichung zu ermitteln, wäre für die vorliegende Aufgabe nicht notwendig gewesen, da durch den Beobachterwechsel auch ihr Einfluß aus dem arithmetischen Mittel herausfällt. Da sie aber bekannt war, so konnte durch Anbringen dieser Verbesserung das Vorhandensein solcher Fehler ersichtlich werden. Bei einem andern Verfahren, dem mit einer Referenz-Station, wechseln die Beobachter nicht; der eine bleibt an dieser Hilfsstation R, der andere reist vom Orte A, nachdem die Längendifferenz AR bestimmt ist, nach der andern Linien-Station B, um dort ebenso mit jenem, also mit demselben persönlichen Fehler, zu arbeiten. Die Differenz der Längenunterschiede AR und BR giebt dann den gesuchten Längenunterschied AB frei von der persönlichen Gleichung.

Das Endergebnis der Längenbestimmung war:
Göttingen Reichenbachscher Meridiankreis westlich von Berlin Centrum der Sternwarte
$13^m 48,560^s$.

---

gewordenen persönlichen Gleichungen:

Bessel — Argelander	$-1,22^s$	im Jahre	1820
Bessel — Walbeck	$-1,04^s$	„ „	1820
Bessel — Struve	$-1,02^s$	„ „	1823
Dunkin — W. Ellis	$+0,84^s$	„ „	1847
Gerling — Nikolai	$+0,78^s$	„ „	1837.

Bisher mußte man sich begnügen, die Differenz zwischen den persönlichen Fehlern zweier Beobachter zu ermitteln. In neuerer Zeit aber sind selbstregistrierende Apparate konstruiert, welche die Erscheinung der Sterndurchgänge nachahmen und den Moment der wirklichen Koincidenz des Fadens und des künstlichen Sternes auf dem Chronographen angeben. Sie werden, weiter vervollkommnet, die Bestimmung der absoluten persönlichen Fehler ermöglichen und den wesentlichen Fortschritt herbeiführen, daß die Zeitbeobachtungen der Wahrheit noch näher kommen.

Als Probe für die Richtigkeit solcher Arbeiten pflegt man die Verbindungen von Beobachtungsorten zusammenzustellen, die einen Vielecksschluß geben. Ein solches Vieleck ist 1) Leipzig-Göttingen-Leyden-Bonn-Mannheim-Leipzig. Für dessen Seiten erhielt man*) im Jahre

1.	1874	Leipzig — Göttingen	+ 9^m	47,807^s
	1867	Göttingen — Leyden	+ 21	49,822
	1870	Leyden — Bonn	— 10	26,955
	1871	Bonn — Mannheim	— 5	27,170
	1871	Mannheim — Leipzig	— 15	43,481
		Der Schlußfehler des Vielecks ist		+ 0,023^s.

2.**)	1876	Greenwich — Berlin	— 53^m	34,89^s
	1876	Berlin — Wien	— 11	46,30
	1873	Wien — Paris	+ 56	0,22
	1872	Paris — Greenwich	+ 9	21,00
		Schlußfehler		+ 0,03^s.

3.**)	1875	Wien — Straßburg	+ 34^m	16,54^s
	1876	Straßburg — Genf	+ 6	27,93
	1877	Genf — München	— 21	49,36
	1875	München — Wien	— 18	55,11
		Schlußfehler		0,00^s.

Die Arbeiten sind also sehr genau.

Hieraus kann man durch Addition berechnen, auf welchem Grade östlicher Länge von Greenwich jede dieser Sternwarten sich befindet.

§ 5. Darstellung des Kugel-Gradnetzes auf Karten.

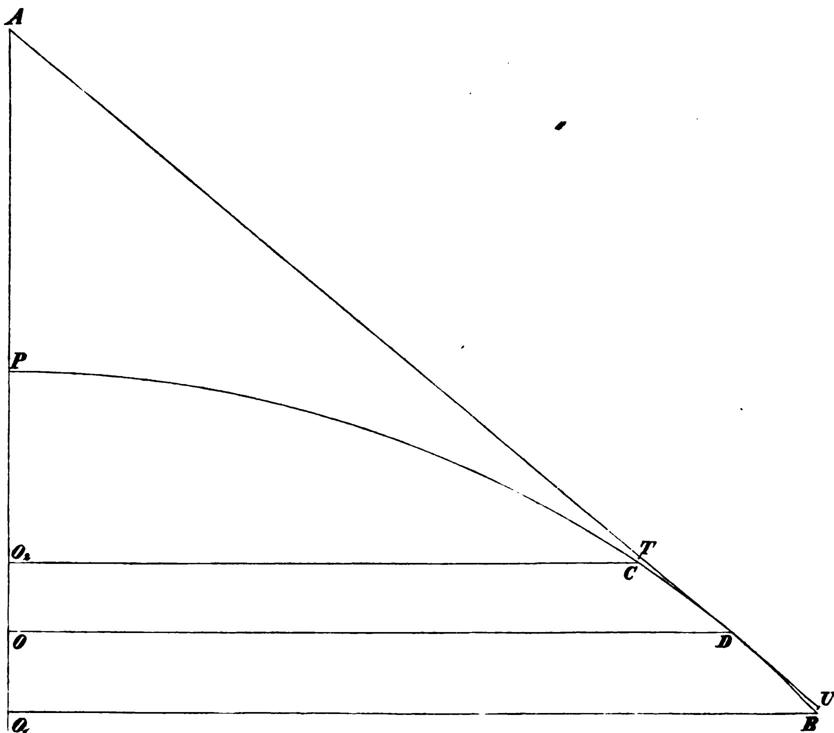
Eine Zeichnung auf dem Mantel eines geraden Cylinders oder eines geraden Kegels kann man durch Abwickeln des Mantels in eine Ebene bringen, so daß die gegenseitige Entfernung aller Punkte der Figur dieselbe bleibt. Bei einer Kugelfläche ist dies unmöglich,

*) Astron.-geodät. Arbeiten in den Jahren 1873 und 1874. Herausgegeben vom Königl. preuß. geodätischen Institut. Berlin, 1875. Seite 56.

**) Zusammengestellt aus der Tabelle im Anhang III zum Generalbericht über die europäische Gradmessung für das Jahr 1880. Berlin, Georg Reimer, 1881.

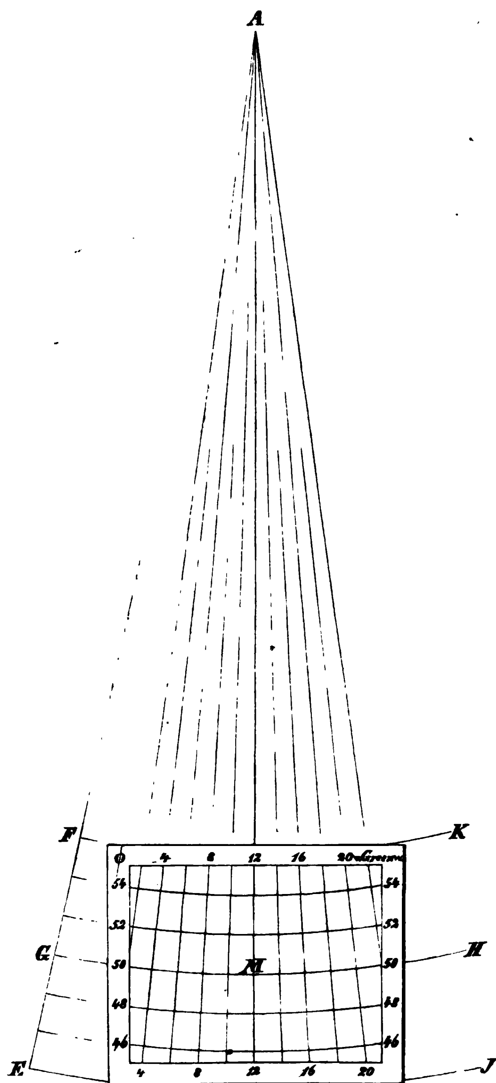
da sie sich nicht abwickeln läßt. Um durch eine ebene Zeichnung die Umrisse der Länder und die Lage der Orte darzustellen, muß man daher sich darauf beschränken, für den größeren Teil des auf der Karte dargestellten möglichste Übereinstimmung mit den wirklichen Formen und Lagen zu erreichen. Von den zu diesem Zwecke ersonnenen Verfahrungsweisen sind folgende die gebräuchlichen.

120. 1) **Darstellung auf einer abgewickelten Kegelzone.** Um eine Karte zu entwerfen von einem Teile der Erdoberfläche, welcher nur über 10 bis 15 Breitengrade sich erstreckt, denkt man den Mantel eines geraden Kegels um die Erdkugel gelegt, welcher dieselbe in dem mittleren Parallelkreise jenes Zonenstückes berührt. In Figur 49 sind BO_1 und CO_2 Radien der Parallelkreise von 44^0 und 56^0 nördlicher Breite auf einer Kugel von $r = 15^{cm}$ Radius, und DO der Radius des mittleren Parallelkreises dieser Kugelzone, also von $\varphi = 50^0$ nördlicher Breite. Durch D ist an den gezeichneten Meridianbogen BCP die Tangente gelegt. Sie beschreibt,



Figur 49. Kegelzone statt Kugelzone für eine Karte.

wenn die Figur sich um den durch die Mittelpunkte O_1 und O_2 gehenden Kugeldurchmesser dreht, den Mantel des verlangten Kegels. Seine Seite DA kann man, da der Winkel DAO gleich dem Centriwinkel zur geographischen Breite φ des Punktes D ist, berechnen aus $r \cot g\ \varphi$, braucht also für einen groß gewählten Zahlenwert des Kugelradius r das dann unbequeme Zeichnen der Figur 49 nicht auszuführen. Das Abwickeln des Kegelmantels liefert einen Kreisausschnitt vom Radius AD. Ein Teil desselben ist in Figur 50 als AGMH dargestellt. Wie die Ebene des Meridians BP den Kegelmantel in der Seitenlinie DA schneidet, so liefert auch jeder andere Meridian als Durchschnitt im Kegelmantel eine seiner Seitenlinien, die dann nach dem Abwickeln ein Radius des Kreisausschnitts in Figur 50 wird. Alle Meridiane stellen sich mithin hier dar als gerade Linien, die sämtlich durch den Punkt A gehen.



Figur 50. Gradnetz von einer Kegelzone.

Sind die Bogen DB und DC β Grad, so ist ihre Größe $\frac{\beta^0}{180^0}\pi r$. Diese Strecke trägt man nun von D aus auf DA vorwärts und rückwärts ab. Die erhaltenen Punkte T und U bestimmen dann auf dem Kegelmantel eine Zone, die ebenso

breit ist wie die gegebene Kugelzone. Ihre Grenzkreise werden im abgewickelten Mantel die mit GH koncentrischen Bogen FK und EJ. Durch gleiche Einteilung der Strecke EF findet man die Radien der Bogen, welche die dazwischen liegenden Parallelkreise der Kugel darstellen.

Auf dem mittleren Bogen GMH hat man nun ein Stück abzugrenzen, welches gleich dem zwischen zwei nahen Meridianen liegenden Bogen des mittleren Parallelkreises (mit dem Radius DO) ist. Hat ihr Längenunterschied δ Grad, so beträgt dieses Stück

$$x = \frac{\delta^0}{180^0} \pi r \cos \varphi.$$

Man trägt es von dem Punkte M des mittleren Meridians aus auf GH nach beiden Seiten ab, und läßt dabei unbeachtet, daß man nicht dem abgewickelten Bogen, sondern seiner Sehne diese Größe gegeben hat, was bei der Kleinheit von δ ohne Nachteil geschehen kann. Durch gleichmäßiges Abteilen findet man die übrigen Punkte des Bogens GH, durch die von A her die geraden Linien gezogen werden, welche die Meridiane liefern.

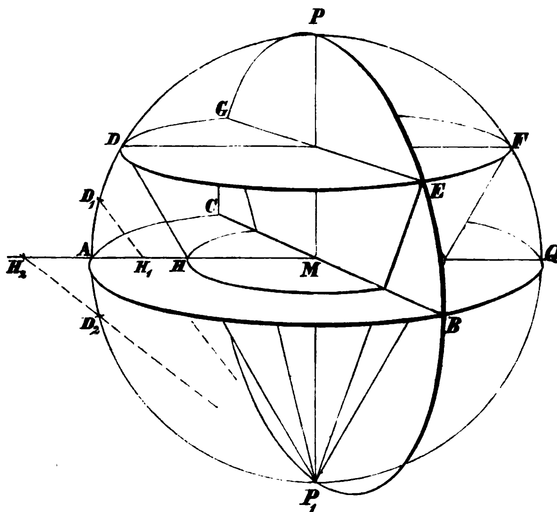
So entsteht der umrahmte Teil der Figur 50 als die Form des Gradnetzes für eine Karte von Deutschland.

Für ein Kartennetz in großem Maßstabe liegt der Punkt A nicht mehr auf dem Zeichenpapier. Dann berechnet man zunächst, wie weit bei den äußersten Parallelkreisen (54 und 46 in Figur 50) die Mitte unter der Sehne liegt, und hat dadurch die Biegung zum Zeichnen dieser Bogen. Darauf berechnet man x für beide, trägt diese Strecke von der Mitte aus auf ihnen ab und verbindet die zusammengehörigen Punkte durch die die Meridiane darstellenden geraden Linien.

Anmerkung. Soll das Netz eine Ausdehnung in so großer Zahl von Breiten- und Längengraden erhalten, wie es für eine Karte von Europa erforderlich ist, so dürfen die Meridiane nicht mehr als gerade Linien gezeichnet werden, weil sie, von A herkommend, im Süden viel zu weit auseinander treten würden. Man berechnet dann die Größe ihrer Abstände auf jedem Parallelkreise aus obiger Formel für x, indem man den Breitegrad des betreffenden Parallels für φ nimmt, und zieht dann durch die hiernach markierten Punkte der Parallelkreise krumme Linien so, wie die Folge der Punkte es fordert.

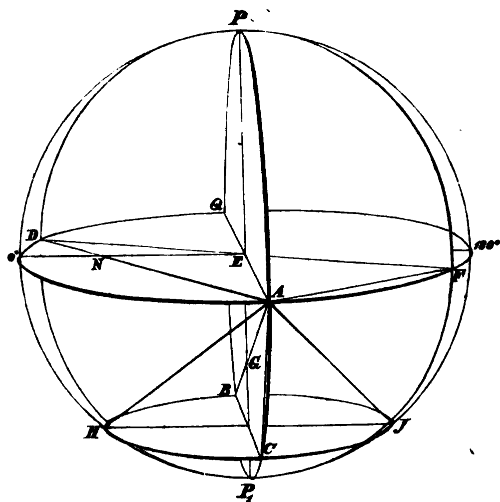
121. 2) **Die stereographische Projektion.***) Soll das Gradnetz einer Halbkugel auf einer Karte zur Anschauung gebracht werden, so wendet man ein perspektivisches Verfahren an. Man nimmt den Grundkreis der Halbkugel als Zeichenebene und denkt das Auge in der Kugelfläche, dem Pole der Halbkugel gerade gegenüber. Die aus solcher Anordnung hervorgehende Darstellung heißt eine stereographische Projektion. Sie ist im besondern eine Polarprojektion, wenn das Auge in einem Pole steht, also die nördliche oder südliche Halbkugel gezeichnet werden soll, und eine Äquatorialprojektion, wenn das Auge in einem Punkte des Äquators sich befindet.

a) Polarprojektion. Es sei das Gradnetz für eine Karte des nördlichen Sternhimmels zu entwerfen. Die Richtungen, in welchen das Auge P_1 (Figur 51) alle Punkte des Parallelkreises DEFG erblickt, liegen auf dem Mantel eines Kegels. Da derselbe von der Ebene des Äquators parallel seiner Grundfläche geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, dem Äquator koncentrisch. In der Zeichenebene werden folglich in den mit geeignet großem Radius beschriebenen Äquator die Parallelkreise ihm koncentrisch eingetragen. Ihre Radien hat man ohne Rechnung; man schneidet auf dem Äquatorkreise die Bogen AP_1, AD, AD_1 ab, markiert auf AM die

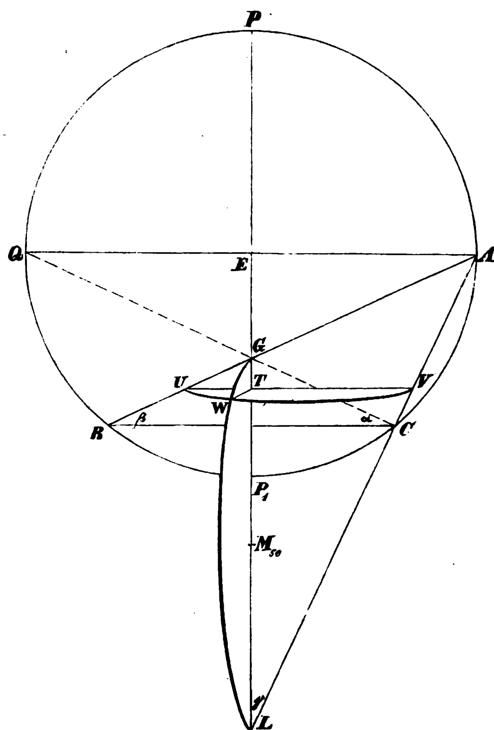


Figur 51. Polarprojektion.

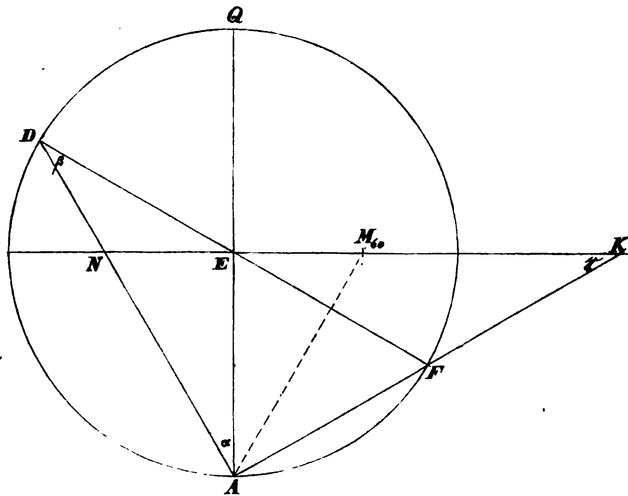
*) Erdacht von Hipparch. Die Benennung kam seit 1613 in Gebrauch durch Aguillon, Lehrer der Mathematik am Jesuiten-Kollegium zu Antwerpen.



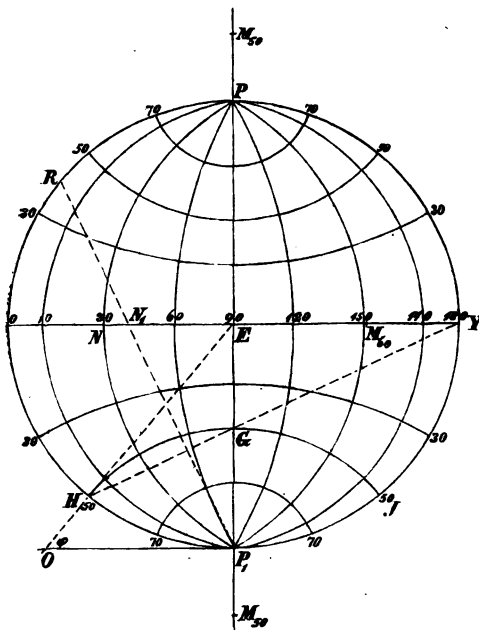
Figur 52.



Figur 53. Zur Äquatorialprojektion.



Figur 54.



Figur 55. Äquatorialprojektion.

Punkte H, H_1, welche die Verbindungslinien (P_1D, P_1D_1) angeben. Die Meridiane werden in der Zeichnung zu Durchmessern. Denn BC und QA sind die Linien, welche dem Auge P_1 die Meridiane BPC und QPA verdecken. Sie schneiden sich unter ebenso großen Winkeln, wie die Meridiane selbst. Hierin ist die Darstellung getreu. Die gezeichneten Parallelkreise aber erscheinen in der Mitte zu gedrängt, am Rande zu weit voneinander. Die Figur 51 zeigt $AH_1 > H_1H$, während $AD_1 = D_1D$ ($= 15^0$) ist. Nimmt man aber noch südliche Parallelkreise mit, so werden sie stark ausgedehnt; denn der Punkt D_2 wird nach H_2 außerhalb des Äquators versetzt.

b) Äquatorialprojektion. Es soll das Gradnetz der östlichen Erdhalbkugel dargestellt werden. Das Auge A (Figur 52) kommt in den Äquator bei 270° der (westlichen) Länge. Der Parallelkreis HCJB ist der von 50° südlicher Breite. Der auf ihm stehende schiefe Kegel mit der Spitze A schneidet die Zeichenebene P_1JPH in einer krummen Linie, welche durch H, G und J geht. Es liefert der Schnitt $APQP_1$ das senkrechte Achsendreieck ABC, weil er durch PP_1 geht. Nachdem er mit A nach rechts um PP_1 gedreht ist, hat man ihn als Figur 53 vor Augen. Die Zeichenebene steht hier senkrecht in PP_1L. Da $\gamma = \alpha$ (in dem rechtwinkligen Dreiecke LCG) und auch $\beta = \alpha$, also $\gamma = \beta$ ist, so hat die Zeichenebene die Lage eines Wechselschnittes. Der Durchschnitt ist folglich ein Kreis mit dem Durchmesser GL und dem Mittelpunkte M_{50}.*) Der Abstand EM_{50} ist in die Zeichenebene P_1JPH in Figur 55 übertragen und darauf mit dem Radius $M_{50}G$ der Kreisbogen HGJ als der gesuchte Durchschnitt beschrieben. Die ebenso zu machende Konstruktion für die Darstellungen der Parallelkreise von 70° und 30° südlicher und nördlicher Breite führe der Leser aus.

Daß der Meridian PDP_1 (Figur 52) in der Zeichenebene als der durch P, N und P_1 gehende Kreisbogen erscheint, wird in gleicher Weise bewiesen. Die Längendifferenz DQ ist in der Figur 52 als 60° gewählt. Da Äquator und Meridian PDP_1F rechtwinklig

---

*) Für diejenigen, welche diesen Lehrsatz noch nicht kennen, folge hier der Beweis. Durch irgend einen Punkt W des Wechselschnitts GWL (Figur 53) lege man die Ebene UWV parallel dem Grundkreise des Kegels. Da diese Ebene und auch der Wechselschnitt auf der Ebene des senkrechten Achsendreiecks ABC rechtwinklig stehen, so ist auch ihre Durchschnittslinie TW darauf lotrecht; mithin in dem Parallelkreise $TW^2 = TU \cdot TV$. Aus $\gamma = \beta$ folgt aber die Ähnlichkeit der Dreiecke UTG und VTL, und daraus $TG \cdot TL = TU \cdot TV$. Aus beiden Gleichungen hat man $TG \cdot TL = TW^2$. Beschreibt man nun in der Ebene GWL über GL als Durchmesser einen Kreis, welchen das Lot TW in W_1 schneidet, so ist auch in diesem $TG \cdot TL = TW_1^2$, mithin $TW = TW_1$, das heißt: der Punkt W des Wechselschnitts fällt mit dem Punkte W_1 des soeben beschriebenen Kreises zusammen. Dasselbe gilt von allen Punkten des Wechselschnitts; er ist also der Kreis mit dem Durchmesser GL.

aufeinander stehen, ist DAF das senkrechte Achsendreieck des Meridian-Kegels mit der Spitze A. Dasselbe ist in Figur 54 niedergelegt und giebt dort den Durchmesser NK eines Wechselschnitts. Sein Mittelpunkts-Abstand EM_{60} wird in Figur 55 übertragen und mit $M_{60}N$ der Kreisbogen PNP_1 beschrieben. Die Zeichnung der Meridiane, welche von dem als eine gerade Linie erscheinenden mittleren Meridiane 80° und 30° Längenabstand haben, wird der Leser mit Hilfe der Figur 54 leicht herstellen.*)

Diese Darstellungsweise hat den Nachteil, daß die rechts und links dem Rande nahen Gegenden in Länge und Breite ausgereckt werden.

Anmerkung. Bei der stereographischen Projektion ist der Ort des Auges so gewählt, daß die Darstellungen der Kreise mit dem Zirkel gezeichnet werden können. Läßt man bei der Äquatorialprojektion das Auge auf der Verlängerung des Durchmessers in der Richtung QEA (Figur 52) von der Kartenebene zurücktreten, so werden die Darstellungen der Kreise Ellipsen. Rückt das Auge in außerordentlich große Ferne, so geht die Projektion mehr und mehr in die rechtwinklige (orthogonale) über. Dabei werden die Darstellungen der Parallelkreise zu parallelen geraden Linien, die der Meridiane aber bleiben Ellipsen, als Cylinderschnitte (die hier nicht Wechselschnitte werden können). Ist λ die Länge des Meridians von Q (oder A) aus (Figur 52), so wird zur großen Halbachse $EP = r$ die kleine $= r \sin \lambda$. Von ihrem Endpunkte aus (etwa N in Figur 55) giebt man in der Entfernung r auf PP_1 die Brennpunkte F und F_1 an und konstruiert durch Kreuzbogen beliebige Punkte X der Ellipse, so daß immer $FX + F_1X = 2r$ ist.

Bei dieser gut aussehenden Darstellung des Gradnetzes werden aber am Rande die Abbildungen äußerst zusammengepreßt, und darum wird die rechtwinklige Projektion der Halbkugel nicht gebraucht, mit einziger Ausnahme der Mondkarte. Beim Monde

*) Das Zeichnen des vollständigen Netzes wird abgekürzt, wenn man beachtet: YH liefert G (Figur 55), da Y und H dieselbe Lage haben, wie A und B in Figur 53; und EH giebt das Tangentenstück OP_1 gleich dem Radius des Bogens HGJ, weil $OP_1 = r \cot g\, \varphi$ ist und aus Figur 53 (wo $\gamma = \beta = {}^1/_2\, \varphi$) für

$$MG = {}^1/_2 (EL - EG) = {}^1/_2\, r (\cot g\, {}^1/_2\, \varphi - \operatorname{tg}\, {}^1/_2\, \varphi) = \ldots.$$

derselbe Wert hervorgeht. Ferner wird für die Längendifferenz $l = PR = \varphi$ (Figur 55) EO gleich dem Radius des Bogens PN_1P_1. Denn EO ist $\frac{r}{\sin \varphi}$ und in Figur 54, wo im rechtwinkligen Dreieck NAK $MA = MK$, also Winkel $EMA = 2\gamma = 2\alpha = l$ ist, wird der Radius $AM = \frac{r}{\sin l}$, also für $l = \varphi$ ebenso groß, wie EO.

ist sie anzuwenden, weil er uns immer nur dieselbe Halbkugel zuwendet und die Landschaften am Rande stets so flach zusammengedrängt im Fernrohre erbickt werden.

122. 3) **Mercators Projektion.** Man wendet sie bei Anfertigung der Seekarten an. Um auf kürzestem Wege zum Ziele zu gelangen, müßte man in dem Bogen eines größten Kreises auf der Meeresfläche fahren. Weil derselbe die Meridiane unter ungleichen Winkeln schneidet, hätte der Steuermann die Richtung des Schiffes zu rechter Zeit gehörig zu ändern. Dies zu ermitteln, ist zeitraubend. Auf einer abgewickelten Kegelzone ist der kürzeste Weg als eine gerade Linie zu ziehen. Stellt man auf einer Seekarte die Meridiane und Parallelkreise als sich rechtwinklig durchschneidende gerade Linien dar, so trifft eine auf ihr zum Ziele gezogene gerade Linie alle Meridiane unter gleichen Winkeln und der Seemann liest aus ihrer Lage sofort ab, auf welchem Kompaßstrich er bei der beabsichtigten Reise fortwährend fahren kann.

Bei solcher Darstellungsweise werden die zwischen zwei Meridianen liegenden Bogen aller Parallelkreise von gleicher Größe. Um das richtige Verhältnis zwischen Parallelkreis- und Meridian-Graden wieder herzustellen, vergrößert man die Teile der Meridiane in dem Maße, in welchem die Parallelkreise abnehmen. Man multipliziert also das den Äquatorteilen gleiche Mittelstück des Meridians mit $\frac{1}{\cos\varphi}$ und erhält die Abstände der Parallelen für die höheren Breiten, deren Mitte φ ist.

Solches Gradnetz mit wachsenden Breiten, benannt nach dem deutschen Geographen Gerhard Mercator*), welcher im Jahre 1550 zuerst eine derartige Karte herausgab, läßt die Polargebiete sehr entstellt erscheinen. Deshalb wendet man es für Landkarten nicht an, es sei denn, daß man eine vom Äquator halbierte schmale Zone zeichnen will.

Anmerkung. Den Vorteil, den kürzesten Weg zwischen zwei Orten als eine gerade Linie auf der Karte ziehen zu können, gewähren die Karten in centraler Projektion. Denkt man das Auge im Mittelpunkte der Kugel, so treffen die nach den Punkten eines größten Kreises gehenden Sehstrahlen die die Kugel berührende

*) Der Geograph und Mathematiker Gerhard Krämer, genannt Mercator, war von deutschen Eltern während eines Aufenthaltes zu Rupelmonde (Rüpelmünde) in Flandern am 5. März 1512 geboren; zu Duisburg a. d. Ruhr, im Dienste des Herzogs von Jülich, starb er am 30. November 1594. Seine berühmte Seekarte erschien zu Duisburg 1569.

Kartenebene in der Geraden, in welcher die Kreisebene die Kartenebene schneidet. Alle kürzesten Wege auf der Kugel werden also in der Karte zu geraden Linien. Nimmt man einen Punkt des Äquators zum Berührungspunkte der Kartenebene, so entsteht eine Karte in centraler Äquatorialprojektion, und, wenn der Pol zum Berührungspunkte genommen wird, eine centrale Polarprojektion. Auf jener laufen die Meridiane als gerade Linien, die auf dem geradlinig gewordenen Äquator senkrecht stehen, und zwar in den vom Berührungspunkte aus zunehmenden Abständen $r \operatorname{tg} \lambda$, wo λ die vom Berührungspunkte an gezählte Länge des Meridians ist. Auf jedem findet man den Durchschnitt des Parallels mit der Breite φ aus $\frac{r}{\cos \lambda} \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Die Verbindung der demselben Parallel angehörigen Punkte der Karte wird eine Hyperbel, weil die Kartenebene mit der Achse des auf dem Parallelkreise stehenden Projektionskegels parallel läuft. In dieser Darstellung erscheinen die Randgegenden stark schiefgereckt.

Der auf solcher Karte als gerade Linie gezogene kürzeste Weg wird durch sorgfältiges Ablesen der Länge und Breite hinreichend vieler Schnittpunkte auf eine Karte in Mercators Projektion übertragen und gezeichnet, um die an den einzelnen Stellen der Seefahrt einzuschlagende Wegrichtung absehen zu können.

II. Kapitel.

Größe der Erde.

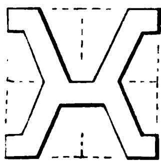
§ 6. Entwurf zur Bestimmung der Länge des Erdkugelradius.

123. Die Längeneinheit. Als Maßeinheit gilt nach dem Pariser Vertrage vom 20. Mai 1875 bei allen Kulturvölkern (auch bei den Japanern seit 1885) das Meter, und zwar der in den Jahren 1873 bis 1875 aus Iridium-Platina gefertigte Stab, welcher europäisches Normal-Meter genannt und in der auf gemeinschaftliche Kosten zu Paris unterhaltenen Anstalt für Maße und Gewichte aufbewahrt wird. Die Beamten derselben, von einer internationalen Kommission überwacht, wurden verpflichtet, die in erreichbarster Übereinstimmung für alle Länder hergestellten Kopien dieses Urmaßes mit ihm zu vergleichen und mit Angabe der Abweichungen als Landes-Urmaße zu verteilen.

Alle diese Normal-Meter, auch jenes europäische Meter, wurden aus demselben Gußstück von 236,33^{kg} Gewicht hergestellt, welches aus 9 Teilen Platina und 1 Teile Iridium bestehen sollte. Die

Analyse ergab 10,29 Prozent Iridium. Durch Beischmelzen des Iridium wird ein Platinstab härter, elastischer als Stahl, ganz unveränderlich und noch schwerer schmelzbar (nur durch Knallgasgebläse); er kann also durch eine Feuersbrunst nicht zerstört werden.*) — Der Barren wurde durch einen 5000^{kg} schweren Hammer gestreckt, dann in 8 Teile zerlegt und jeder Abschnitt durch weiteres Hämmern verlängert, so daß sie einen quadratischen Querschnitt von 2,5^{cm} Seite und alle zusammen 16,4^{m} Länge erhielten. Darauf setzte ein Walzwerk das Verlängern der Stücke fort, bis aus jedem drei Stäbe von je 1,02^{m} Länge hervorgingen.

Auf einer wohlpolierten Fläche solches Stabes wurden quer hinüber mit einer Diamantspitze zwei Linien gezogen, deren Abstand bei der Temperatur des Stabes von 0° C. die wahre Länge des Meters angeben soll. Die Striche sind so fein, daß ihre Breite zwischen 0,002 und 0,003 Millimeter beträgt. Der Apparat, welcher die Linien einschnitt, war in einem Raume aufgestellt, dessen Temperatur auf 0° C. gehalten wurde, und mit einem neu konstruierten Komparator verbunden, dessen Beobachtungs-Mikroskop über 200mal vergrößert. Bei der hierdurch möglichen äußerst genauen Vergleichung muß die geringste Veränderung in dem Abstande der beiden Grenzlinien bemerkt werden. Ruht aber der Stab auf einer nicht völlig ebenen Grundfläche, so muß er durch sein eigenes bedeutendes Gewicht sich biegen Stützt er sich z. B. nur mit den beiden Endkanten, so dehnt das Biegen die Grundfläche und zieht die Deckfläche zusammen, und es würde, wenn auf letzterer die beiden Striche angebracht wären, ihr Abstand verkleinert werden. Das Gegenteil tritt ein, wenn der Stab nur auf der Mitte ruht. Daraus folgt, daß Annähern und Entfernen der beiden Linien vermieden wird, wenn sie in der Mitte zwischen Grund- und Deckfläche angebracht werden können. Aus diesem Grunde wurde mit einer Hobelmaschine von der Deckfläche an in den Stab eine Rinne geschnitten und diese so lange vertieft, bis man auf die Hälfte der Dicke des Stabes kam. Auf dieser Mittelfläche sind die beiden Striche in 1^{m} Abstand gezogen. Um das Gewicht des Stabes zu vermindern, wurden auch die drei andern Seiten des Stabes ausgehobelt, so daß er einen etwa X-förmigen Querschnitt erhielt, wie ihn Figur 56 in natürlicher Größe darstellt.



Figur 56.
Querschnitt eines Normal-Meters, in natürlicher Grö[illegible].

Jedem der internationalen Normal-Meter sind zwei sorgfältig gearbeitete Thermometer beigegeben, welche in die Rinne des Stabes gelegt werden. Sie haben 45^{cm} Länge und 5^{mm} äußeren

*) Bei dem Westminster-Brande im Jahre 1834 wurde das messingene englische Original-Yard vom Jahre 1760 vernichtet.

Durchmesser, auch die Quecksilberbehälter sind außen nicht weiter; die Skala reicht von —5° bis + 50° C., jeder Grad hat etwa 7^{mm} Länge und ist in Zehntel geteilt.

Die Kopien sichern die Erhaltung der Längeneinheit.

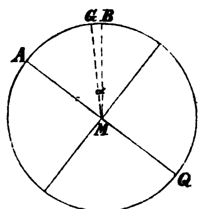
Das europäische Normal-Meter ist möglichst genau gleich gemacht dem im Jahre 1800 in Paris gefertigten Platinstabe, welcher Mètre des Archives genannt wurde. Bedenken gegen seine Unveränderlichkeit veranlaßten die Erneuerung des Urmaßes. Die Fortdauer der wahren Meter-Länge kann kontrolliert werden durch Bessels Toise, welche auf der Königsberger Sternwarte aufbewahrt wird. Sie ist 1823 in Paris aus Eisen verfertigt, bei 13° R. mit der Toise du Pérou verglichen und gleich 863,9992 Linien befunden, deren dieselbe genau 864 enthielt (nämlich 6 Fuß zu je 12 mal 12 Linien). Nach diesem eisernen Maßstabe, welcher die Längeneinheit für die von 1735 bis 1744 ausgeführte Gradmessung in Peru war, wurde die Länge des Meters zu 443,296 Linien im Jahre 1800 in Paris gesetzlich festgestellt. Jener Eisenstab, die Grundlage des Meters, ist zum Kopieren der Meter-Länge unbrauchbar geworden; man hat ihn verrosten lassen.

Den Beamten der internationalen Anstalt für Maße und Gewichte ist aufgegeben, die Maßstäbe und Meßstangen, welche in den einzelnen Ländern zu Grundlinien-Messungen gedient haben, mittels des oben erwähnten Komparators mit dem auch dort aufbewahrten vier Meter langen geodätischen Normalmaße aus Iridium-Platina zu vergleichen und ihre Ausdehnungskoefficienten zu bestimmen, so daß alle Messungen auf ein und dieselbe Einheit bezogen werden.

124. Ein Meridianbogen. Die Größe eines Erdradius findet man durch Ausführung folgenden Gedankens. Man beobachtet an zwei Stellen eines Meridians die Polhöhe. Dadurch hat man (nach Nr. 116) die geographische Breite der Beobachtungsorte B und G (Figur 57); ihre Differenz giebt den Bogen $BG = \alpha$ Grad. Hat man nun noch die Länge der Strecke $BG = a$ Kilometer ermittelt, so folgt aus

$$a : \pi r = \alpha^0 : 180^0$$

$$r = \frac{180}{\pi \alpha} \cdot a \text{ Kilometer.*)}$$



Figur 57.
Zur Bestimmung der Größe eines Erdradius.

*) Bis zum Jahre 1875 nannte man das große Längenmaß „geographische Meile“, und definierte sie in Deutschland als den 15ten, in Frankreich als den 25sten und in England als den 60sten Teil eines Grades vom Erdäquator. Nach der deutschen Bezeichnung war also $2\pi r = 360 \cdot 15$ geographische Meilen,

125. Triangulieren. Die Länge des Meridianbogens erhält man durch Triangulieren, ein Verfahren, welches Snellius*) 1615 in Holland zuerst anwandte. (Vergl. Figur 60 in Nr. 133.) Es werden, nach Angabe der Magnetnadel immer an dem Meridiane hin, zu beiden Seiten trigonometrische Signale errichtet. Dieselben bestehen in drei Mastbäumen, die man in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks so aufstellt, und durch Querhölzer fest verbindet, daß sie eine dreiseitige Pyramide bilden. Um das Signal aus der Ferne leichter kenntlich zu machen, deutet man die Seitenflächen dadurch an, daß man, von der Spitze anfangend, eine kleine Strecke herab einige kurze Latten quer aufnagelt. An der Spitze der Pyramide wird die Verlängerung der Höhe durch eine gut befestigte Stange markiert. Von ihr läßt man ein Senklot herunter und bestimmt den Fußpunkt der Höhe auf einer 1^{m} tief in die Erde gegrabenen Steinplatte, in welche zwei sich rechtwinklig kreuzende Messingstreifen mit Blei eingelassen sind, zur dauernden Festlegung dieser Stelle. Nun wird ein hoher Steinblock darüber gesetzt und, nachdem ein auf seiner Deckfläche eingerissenes Kreuz nach Angabe jenes Lotes senkrecht über die festgelegte Marke gebracht ist, festgemauert. Auf diese steinerne Säule kommt der Theodolit mit seinem Mittelpunkte genau über den Kreuzpunkt. Nachdem sein Grundkreis horizontal gemacht ist, nimmt man (wiederholt) die Horizontalwinkel zwischen den nach den nächsten Signalen gehenden Richtungen auf. (Nr. 23 am Schluß.)

Das Einstellen des Fernrohrs bei beträchtlichen Entfernungen wird erheblich erleichtert, ja bei ungewöhnlich großen Abständen, wie bei den 105^{km} zwischen dem Brocken und dem Inselsberge, geradezu erst ermöglicht durch Anwendung eines Heliotropen.**) Derselbe besteht in einem wenige Quadratcentimeter großen ebenen Spiegel, welcher über dem Steinblock der fernen Station von einem Gehilfen aufgestellt und so gerichtet wird, daß durch Zurückwerfen des Sonnenlichtes der Beobachter am Theodoliten von dorther ein Sonnenbild erhält, welches wie ein Stern erscheint und scharf beobachtet werden kann.

Außer den so zu erhaltenden Winkeln muß man noch den

---

woraus

$$2r = \frac{5400}{\pi} = 1718{,}8734 \text{ geographische Meilen.}$$

Hiermit ist aber die Größe des Erddurchmessers nicht gefunden; denn das Maß war der fünfzehnte Teil einer unbekannten Länge. — Als noch in den einzelnen Ländern nach ihren „geographischen Meilen" gerechnet wurde, lautete die Frage nach der Größe des Erddurchmessers mit andern Worten: Wie lang ist eine geographische Meile?

*) Willebrord Snell (Snellius), Prof. der Mathematik an der Universität zu Leyden, geb. 1591, gest. 1626.

**) 1821 erfunden von Gauß in Göttingen.

kennen, welchen eine der Richtungen mit der Mittagslinie einschließt. (Nr. 55 bis 57.) (In Figur 60 zu Nr. 133 ist es der Winkel Eichberg-Berlin-D.) Nun braucht man nur noch von einer einzigen Seite die Länge zu ermitteln, dann hat man durch den Sinussatz alle, und findet die Teile der Meridianstrecke (in Figur 60 Berlin-G) als die Projektionen der ihnen benachbarten Seiten. Jene eine Seite aber erhält man gleichfalls durch Triangulieren von einer in der Nähe gewählten Grundlinie aus, die man mit einem Maßstabe wirklich mißt, und zwar mit der erdenklichsten Genauigkeit, da man von der kurzen Grundlinie schließen will auf den sehr vielmal größeren Meridianbogen, der dann noch mit der großen Zahl $\frac{180}{\pi a}$ zu multiplizieren ist. (Nr. 124.) Durch dieses sehr beträchtliche Vervielfachen würde der bei nicht äußerst scharfem Messen begangene Fehler stark mit vergrößert, und sein Einfluß würde das Ergebnis unzuverlässig machen.

§ 7. Apparat zur Grundlinienmessung.

126. Einwirkung der Wärme auf den Maßstab. Um eine etwa 3 Kilometer lange Grundlinie genau zu messen, ist die geeignetste Länge des Maßstabes 4 Meter. Seine Größe wird durch die wechselnde Tagestemperatur veränderlich. Besteht das Meßlineal aus Iridium-Platina, dessen Ausdehnungskoefficient sehr klein, nämlich 0,0000088 ist, und beträgt seine Länge bei 0° C. genau 4000^{mm}, so wird es, während der im Sommer auszuführenden Messung, bei der Mittagstemperatur von 23° R. = $\frac{10}{8}\cdot 23°$ C. um 1^{mm} länger, und man würde, ohne dies zu beachten, nach zehnmaligem Hinlegen des Maßstabes diese Strecke schon um 1^{cm} zu klein angeben. Hieraus ersieht man, daß die Temperatur des Meßlineals in jedem Augenblicke des Messens sorgfältig bestimmt werden muß. Da man aber sich nicht davon überzeugt halten kann, daß die Temperatur des Lineals mit der der Luft zu jeder Zeit schon vollkommen übereinstimmt, so ist nicht ein daneben hängendes Quecksilberthermometer zu gebrauchen, sondern es muß das Meßlineal selber seine Temperatur angeben als ein Metallthermometer, also durch den Unterschied seiner Länge von der eines benachbarten Lineals aus einem sich stärker ausdehnenden Metalle.

Bessel*) wandte zur Grundlinienmessung bei Königsberg im Jahre 1834 für die Meßstangen Eisen und Zink an. Auf einer fast 4^{m} langen Eisenstange, die 27^{mm} breit und 7^{mm} dick war, ruhte eine

*) Friedrich Wilhelm Bessel, Direktor der Sternwarte in Königsberg, geb. 22. Juli 1784 zu Minden, gest. 17. März 1846 in Königsberg.

halb so breite und etwas kürzere Zinkstange, deren Enden, damit sie beim Gebrauche nicht abgenutzt würden, kleine Stahlansätze hatten, die keilförmig in horizontale Schneiden ausliefen. Der eine etwas vorstehende Ansatz war durch Schrauben mit der Eisenstange fest verbunden, im übrigen aber war die Zinkstange frei und konnte durch Wärmeausdehnung sich auf der Eisenstange ausstrecken. Ihrer zweiten Schneide, welche von dem andern Ende der Eisenstange zurücktrat, stand in etwa 4mm Entfernung gegenüber die senkrechte Schneide eines auf der Eisenstange festgeschraubten Stahlstücks, welches auf der andern Seite ebenfalls solche senkrechte Schneide hatte als Ende des Maßstabes. Jenen Zwischenraum, welcher durch die stärkere Wärmeausdehnung des Zinks kleiner wurde, maß man durch Einschieben eines sehr schlanken Glaskeiles, welcher durch Teilstriche am Rande seiner 8cm langen Seitenfläche von der ($2\frac{1}{4}$mm großen) kleinsten Unterabteilung des Maßes [Linien der Toise] die Hundertstel angab. Aus der Differenz der Eisen- und Zink-Länge berechnete man mittels der Ausdehnungskoefficienten die Temperatur der Stangen. Auch wurde mit dem Glaskeil der weniger als 4mm große Abstand gemessen, den man zwischen je zwei der vier Maßstäbe frei lassen mußte, um nicht durch Anrücken die vorhergelegte Meßstange zu verschieben.*)

Bei dem neuen Brunnerschen Apparate besteht das Meßlineal aus Iridium-Platina und hat unter sich ein messingnes Lineal. Beide sind nur in der Mitte fest miteinander verbunden. Der Unterschied der Wärmeausdehnungen der beiden Metalle wird an feinen Strichen, die nahe den Enden auf den Linealen gezogen sind,

---

*) Die genaue Beschreibung und den Gebrauch des Meßapparates hat Bessel niedergelegt in seinem großen Werke: Gradmessung in Ostpreußen und ihre Verbindung mit preußischen und russischen Dreieckketten. Ausgeführt von F. W. Bessel, Direktor der Königsberger Sternwarte, und Baeyer, Major im Generalstabe. Berlin, Ferd. Dümmler's Buchhandlung, 1838. (4°, 452 S.)

Mit diesem Apparate wurden gemessen 1834 die Grundlinie bei Königsberg, 1822m lang, 1846 bei Berlin, 2336m, 1847 bei Bonn, 2134m, zwei in Belgien 1851 und 53, eine bei Kopenhagen, 1854 die von Strehlen bei Breslau, 2763m, 1871 die alte von Braak bei Hamburg, 5875m, 1872 die von Großenhain bei Dresden, 1877 die bei Oberhergheim für die Elsaß-Lothringische Dreieckskette, 6982m, und nach einer sorgfältigen Aufbesserung des Apparates, 1880 die bei Göttingen, 5193m lang. — Da der Brunnersche Apparat beim Messen der Hauptgrundlinie in Spanien (1858 bei Madridejos) Ergebnisse von außerordentlicher Schärfe geliefert hat, so ließ General Baeyer, Chef des Berliner geodätischen Instituts, von Brunners Söhnen in Paris einen ebensolchen 1876 bis 78 im Preise von 27000 M. für die europäische Gradmessung anfertigen. Mit diesem wurden zunächst die Grundlinie bei Breslau (1879) und die bei Berlin (1880) nachgemessen, um den Vergleich zwischen Bessels Meßstangen und dem neuen Meßlineale genau zu haben. Da mit ihm die europäische Gradmessung zum Abschluß gebracht werden soll, so wurde die Beschreibung und Zeichnung des Besselschen Apparates, welche der Verfasser an dieser Stelle des Buches ausführlich gegeben hatte, ersetzt durch die Darstellung des neuen. (Auch für Frankreich und Ägypten sind ebensolche Apparate von Brunner 1880 geliefert.)

mit mikrometrischen Mikroskopen höchst genau abgelesen. Ist der Abstand der beiden Striche auf dem Messinglineale bei der Temperatur 0 Grad m_0 Millimeter und μ (= 0,0000190) der Ausdehnungskoefficient des Messings (der an dem Apparate selbst genauer zu bestimmen ist), so wächst der Abstand der Striche bei t Grad der hundertteiligen Skala auf

$$m = m_0 + t \cdot \mu m_0$$

und entsprechend bei den Strichen auf dem Platin (Koefficient π abgekürzt = 0,0000088)

$$p = p_0 + t \cdot \pi p_0$$

mithin

$$m - p = m_0 - p_0 + t(\mu m_0 - \pi p_0).$$

Die Differenz $m_0 - p_0$ bestimmt man, wie in Nr. 129 näher angegeben werden wird, $= d_0$ in einem hölzernen Häuschen, in welchem die Meßlineale in einem Troge durch Eis auf 0^0 abgekühlt werden, sowie die Größe $\mu m_0 - \pi p_0 = \delta$, welche die Differenz der Ausdehnungen für jeden Grad der hundertteiligen Skala bedeutet. Diese Konstanten geben durch die beim Messen der Grundlinie an beiden Enden der Lineale mit den Mikroskopen abgelesenen Unterschiede, welche zusammen = d sind, aus obiger kürzer geschriebenen Gleichung

$$d = d_0 + t\delta$$

die gegenwärtige Temperatur der Lineale

$$t = \frac{d - d_0}{\delta} \text{ Grad Celsius.}$$

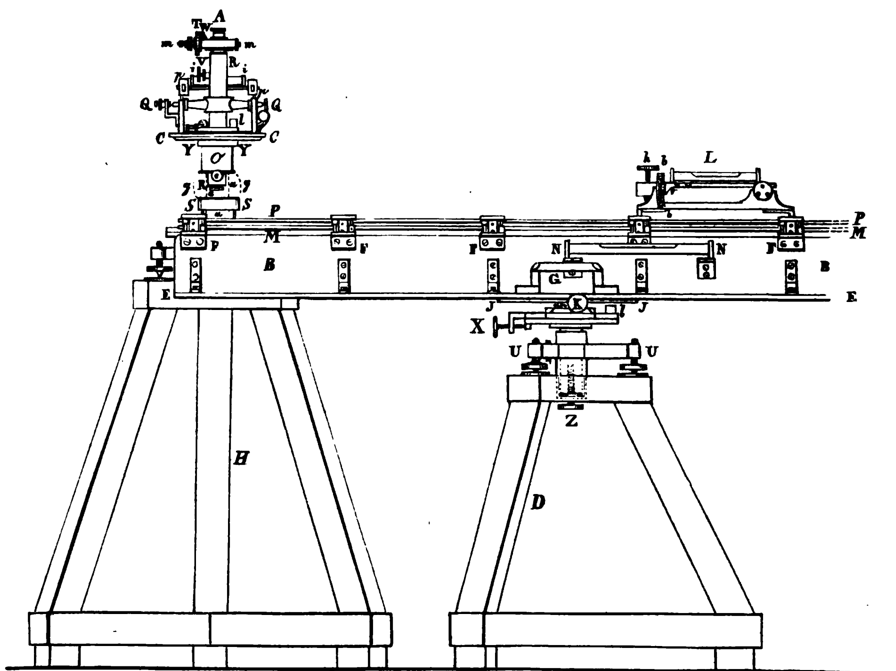
127. Das Meßlineal. Die Figur 58 zeigt vom **Brunnerschen** Apparate die Bestandteile an einem Ende des Meßlineals in $\frac{1}{15}$ der natürlichen Größe. Das obere Lineal PP besteht aus Platin, dem (wie für die Normalmaße, Nr. 123) beim Gusse 10 Prozent Iridium zugesetzt wurde. Es ist 4 Meter und 10^{cm} lang, 21^{mm} breit und 5^{mm} dick.*) Unter ihm liegt in einem Abstande von 6^{mm} ein ebensolches Lineal MM von Messing. Beim Halbierungspunkte ihrer Länge sind drei kleine elliptische Cylinder von Kupfer darunter, dazwischen und darüber geschoben. Durch ihre Enden, die an beiden Seiten ein wenig hervorragen, sind Preß-Schrauben gezogen, und dadurch werden die beiden Lineale an dieser Stelle fest miteinander

---

*) Die Figur und die Angaben stammen aus der sehr ausführlichen Beschreibung in dem Werke der spanischen Generale Ibañez und Saavedra: Expériences, faites avec l'appareil à mesurer les bases, appartenant à la Commission de la carte d'Espagne. Traduit de l'espagnol par A. Laussedat. Paris, librairie militaire, J. Dumaine, 1860. (210 Seiten und 147 Seiten Anhänge.)

verbunden. Sie ruhen auf einer schmiedeeisernen Bank. Dieselbe ist zusammengesetzt aus einer 5^{mm} dicken wagerechten langen Platte EE und aus einer in ihrer Mittellinie senkrecht stehenden BB von gleicher Dicke. Auf letzterer werden die beiden Metall-Lineale mittels 14 Träger, F...F, gehalten. In diesen stecken mit Stahlachsen 1) übereinander zwei 5^{mm} dicke Messingwalzen, welche, quer unter einem Lineale fortgehend, dieses tragen, und, um es am seitlichen Verschieben zu verhindern, 2) zwei Paar stehende Walzen, in ihren Hälften von ungleichen Durchmessern, so daß jedes Paar mit seinem dickeren Cylinder nur das eine Lineal berührt. Jede Hälfte der beiden Lineale kann also zwischen und über den Rollen hin seine Ausdehnung durch die Wärme ungehindert vollziehen.

Alle diese Träger F haben oben in der Mitte eine rechteckige Öffnung, um zwischen irgend zwei benachbarten die beiden Füße der Libelle L einstecken zu können. Dieselbe giebt, nachdem durch Drehen an der Höhen-Schraube h die Luftblase in die Mitte gebracht ist, an dem Gradbogen bb den Neigungswinkel des Platinlineals an, für welchen der Vernier v die Ablesung von 10 zu 10 Sekunden liefert. Da man es stets so einrichtet, daß der Neigungswinkel i



Figur 58. Apparat zur Grundlinienmessung.
($^{1}/_{15}$ der natürlichen Größe.)

sehr klein wird, so kann die zu bestimmende horizontale Projektion der Länge p des Platinlineals nicht aus p cos i berechnet werden. Deshalb giebt man an, um wieviel sie kürzer ist, als p

$$p(1 - \cos i) = 2p\sin^2 \tfrac{1}{2} i$$

und wenn i kleiner als $\frac{1}{2}$ Grad ist, so nimmt man den Bogen und hat die Verminderung $\frac{1}{2}p(i'' \sin 1'')^2$.

Zum Tragen der Bank dienen zunächst zwei starke Dreifüße aus Eichenholz (der eine ist D). Auf jeden kommt ein mit drei Stellschrauben versehener Untersatz U, dessen Höhe vergrößert oder verkleinert werden kann durch Umdrehen der Schraube Z. Mit einem an ihrer Spindel festsitzenden Kranze steht sie auf dem Boden des Hohlcylinders, in welchem die Säule des Untersatzes steckt. (Dies ist in der Figur, als ob die Teile durchsichtig seien, punktiert angedeutet.) In die Säule dringt die Spindel ein. Dreht man die Schraube Z rechts herum, so daß die Spindel sich tiefer einbohrt, so senkt sich die Säule langsam; sie steigt empor bei entgegengesetztem Drehen. Der aus Schichten zusammengesetzte Teller des Untersatzes hat als höchsten Teil eine von vorn nach hinten gehende Messingwalze. Das eine Ende ihrer stählernen Achse wird in dem Lager α sichtbar. Man macht sie mittels der Stellschrauben des Untersatzes horizontal nach den Angaben der von vorn nach hinten gehenden Röhrenlibelle l, von welcher in der Aufriß-Figur nur die Rückwand gesehen werden kann. Rechts von der Walze α sind zwei Seitenleisten (auch die vordere wird in der Figur verdeckt durch den Knopf K); zwischen sie wird die Bank, welche an dieser Stelle eine Messingplatte JJ unter sich hat, gesetzt und mit der Klemmschraube K festgestellt. Zum Weitertragen und Hinaufsetzen der Bank sind an ihrer Grundplatte EE 4 Handgriffe (einer ist G) befestigt. Die auf der einen und der andern Walze α ruhende Bank steht dann in der Querrichtung schon horizontal. Ihr Neigungswinkel in der Längsrichtung wird vermindert nach Angabe der Libelle NN durch Drehen der Bodenschraube Z. Der Standort der Bank kann in der Längsrichtung durch die Mikrometerschraube X am Teller des Untersatzes, und durch ebensolche auf der Hinterseite der Figur auch in der Querrichtung verbessert werden, da der Teller aus drei Platten besteht, von denen die beiden oberen zwischen Schienen in Richtung der zugehörigen Mikrometerschraube beweglich sind. Solche Schraube, wie X, hat am Fußende eine Stahlkugel, welche von den fast halbkugelförmig ausgehöhlten Hälften eines kleinen festen Würfels umspannt wird. Da der Fuß gebunden ist, so schreitet beim Drehen des Kopfes X der Haken mit der zweiten Schiebeplatte langsam an der Spindel fort. Durch zweckmäßiges Handhaben beider Schrauben kommen die Ablesestellen des Platinlineals genau unter die aufgestellten Mikroskope (A).

Das Platinlineal hat, $4\frac{1}{2}^{cm}$ von jedem Ende anfangend, einen rechteckigen Ausschnitt, 7^{cm} lang und 7^{mm} breit. In diesen ragt hinein eine starke Platinplatte, getragen von einem Messingstück, welches auf dem darunterliegenden Teile des Messinglineals festsitzt. Damit letzteres der Wärmeausdehnung ungehindert folgen könne, läßt die Platinplatte an den kleinen Seiten des rechteckigen Ausschnitts je 2^{mm} freien Spielraum. An einem der langen Ränder jedes Ausschnitts sind 6^{cm} des Platinlineals durch eine Teilmaschine in Zehntelmillimeter geteilt. Die Teilstriche im Platin, welche ein Diamantsplitter unter dem Drucke eines kleinen Gewichtes zieht, haben nur $0{,}01^{mm}$ Dicke. Vom Null-Striche der ersten bis zum letzten Striche der Teilung am andern Ausschnitte sind 4^{m}. Dieser Zählung entsprechend, sind die Nummern von 5 zu 5 Millimetern, nur $0{,}3^{mm}$ groß, an den beiden geteilten Stellen eingraviert. Die obere Fläche jener eingeschalteten Platinplatte, welche mit der Deckfläche des Lineals genau eine Ebene bildet, damit beide zugleich im Mikroskope deutlich gesehen werden, hat neben jener eine ganz ebensolche Teilung, nur fangen ihre Nummern, um Verwechselungen beim Ablesen zu vermeiden, nicht mit Null, sondern mit 10 an, gehen also auf der andern Platte bis 410. Ihre Beleuchtung wird geregelt durch je einen drehbahren Spiegel SS, welcher zugleich als Deckel zum Schutze dieser Stelle dient.

128. Die Ablese-Mikroskope. Zum Ablesen auf der äußerst feinen Teilung dienen zwei mikrometrische Mikroskope mit 60facher Vergrößerung. Der 28^{cm} lange Tubus eines solchen, A, steckt in einem Rohr RR, in welchem er sich auf- und abwärts bewegen läßt mittels des Schraubenkopfes V mit Trieb und Zahnstange. Das Rohr R hat eine Querachse QQ, mit welcher es, durch zwei Seitenständer, wie das Fernrohr eines Theodoliten (Nr. 23), auf einem geteilten Grundkreise steht. Durch eine weite kreisrunde Öffnung in der Mitte, welche unten der Hohlcylinder O mit dem in ihm steckenden hohlen Centralzapfen des Kreises umschließt, geht das Rohr RR frei hindurch. Der Teller CC unter dem beweglichen Grundkreise sitzt auf einer starken Platte YY, die $7\frac{1}{2}^{cm}$ breit ist und 19^{cm} weit nach hinten geht. Ihr Ende ist oben auf eine Säule a geschraubt, die in der Figur nur punktiert wurde, um anzudeuten, daß sie hinten steht. Die nun folgenden unteren Teile des Stativs entsprechen dem oben beschriebenen Untersatze UU (nur fehlt die Verlängerung des Cylinders mit der Höhenschraube Z). Auf dem höheren eichenen Dreifuße H wird eine der drei Stellschrauben links hinter der Bank B sichtbar. An einem Ende der obersten der drei rechteckigen Deckplatten steht, festgeschraubt, jene Säule a, und am andern trägt sie ein cylinderförmiges Gewicht gg, welches hinreichend groß ist, um dem weit hervortretenden Mikroskope als Gegengewicht zu dienen. Eine Röhrenlibelle l, in der gezeichneten Stellung von vorn nach

hinten nahe beim Rohre R vorbeigehend, befindet sich auf dem drehbaren Grundkreise; eine zweite empfindlichere Libelle ii, hinter dem Rohre R, wird durch zwei von vorn nach hinten liegende kleine Hebelstangen getragen und durch zwei vorn befindliche Gegengewichte pp im Gleichgewichte gehalten. Die Füße unter den Stützpunkten der Hebel gehen durch die Deckflächen der Achsenträger und stehen auf der Achse QQ, so daß diese genau horizontal gestellt werden kann.

Das Fadenmikrometer mm des Mikroskops ist so eingerichtet, wie das in Nr. 24 beschriebene, nur hat es außer jenen beiden parallelen Spinnewebfäden FF (Figur 21 c) noch einen, sie in ihrer Mitte rechtwinklig kreuzenden Längsfaden. Die Mikrometerschraube hat außer dem gewöhnlichen Schraubenkopfe noch einen Knopf am äußersten Ende für schnelle Umdrehungen. Die Trommel T der Schraube ist hier in 100 gleiche Teile zerlegt, numeriert von 10 zu 10. In dem durch das Objektivglas hervorgerufenen stark vergrößerten Bilde der Teilung des Platinlineals kommt das Fadenpaar durch einmalige Umdrehung der Mikrometerschraube von Strich zu Strich. Diesen Abstand zerlegt die Trommelteilung in 100 Teilchen. Da nun die Striche auf dem Platin Zehntel-Millimeter angeben, so werden an der Trommel bei der Marke W (vergl. Figur 21 a in Nr. 24) Tausendstel-Millimeter abgelesen.

129. Vergleich der Meßlineale mit dem Normalmaße und Bestimmung der Ausdehnungs-Koefficienten. Beim internationalen Bureau für Maße und Gewichte zu Paris (Breteuil) sind in einem hölzernen Häuschen in einem Abstande von 4 Metern zwei solche mikrometrische Mikroskope aufgestellt, und zwar, zur vollkommensten Unbeweglichkeit, jedes auf einem tief fundamentierten Aufbau von großen Quadersteinen. Vor ihnen befindet sich ein $4\frac{1}{2}$ m langer Zinktrog, umgeben von einem Polster, als schlechtem Wärmeleiter. Er steht, mit Untersätzen (wie UU) für die genaue Einstellung, auf einem besonderen Mauerwerke. Die Dielen des Zimmers berühren die Steine nicht. Die Enden der Balken, welche den Fußboden tragen, ruhen auf der Grundmauer, die im Erdboden fern von den Fundamenten ist. So kann also das Umhergehen der Beobachter die Instrumente nicht erschüttern oder verschieben. Damit die Sonnenstrahlen die Temperatur des Zimmers möglichst wenig verändern, hat das Häuschen keine Fenster. Lampen erleuchten, nur zur Zeit der Beobachtung, die Ablesestellen.

In den Trog wird die beide Meßlineale tragende Bank gesetzt und der übrige Raum mit Eisstücken ausgefüllt. Vier Thermometer, in Zehntelgrade geteilt, kommen in gleichen Abständen mit ihren Quecksilberbehältern unmittelbar neben die Lineale. Erst wenn ihre Angaben nur noch kaum um einen Zehntelgrad von einander ab-

weichen, wird beobachtet. Bei der nun vorhandenen Temperatur von 0° mißt man mit dem Fadenmikrometer der Mikroskope den Abstand des Nullstriches für das Messinglineal von dem auf dem Platinlineale, und ebenso drüben den der beiden Endstriche. Die Summe der Ablesungen ist die Größe $m_0 - p_0 = d_0$. (Nr. 126.) Die Fäden der beiden Mikroskope bleiben nun in ihrer Einstellung auf den Anfangs- und Endstrich des Platinlineals, also in dem gegenseitigen Abstande p_0, ruhig stehen. Nach Beseitigung des Eises wird die Bank aus dem Troge gehoben und an Stelle des Platinlineals kommt unter die Mikroskope das 4^m lange geodätische Normalmaß aus Iridium-Platina. (Nr. 123 am Ende.) Ist seine Temperatur durch Eis auf 0° gebracht, so werden aus der aufgeschriebenen Stellung die Fäden auf die beiden Grenzstriche des Normalmaßes eingestellt. Der Unterschied der jetzigen Trommel-Ablesung und der vorhin notierten Fadenstellung giebt den Fehler der Länge des Platin-Meßlineals an. Man kennt also nun die Länge p_0 und durch d_0 auch m_0.

Nachdem das Normalmaß und das Eis aus dem Troge genommen sind, wird die Bank wieder hineingesetzt und in den Trog durch Röhren Petroleum eingelassen, welches draußen in einem Kessel auf reichlich über 15° C. erwärmt ist.*) Damit dasselbe die Platinteilungen nicht überflute und unlesbar mache, hat man vorher diese Stellen mit Tierblase abgebunden, deren Rand auf dem nun aufzulegenden Deckel des Troges befestigt wird. Nahe den Enden gehen vom Deckel in den Trog hinab zwei unten rechtwinklig nach außen umgebogene breite Eisenstangen, als Halter einer Vorrichtung zum Umrühren des Öles, da dieses den Trog und die Bank erst erwärmen muß. Dieselbe besteht in einer, viele senkrechte Brettchen tragenden, straffen endlosen Kette, in deren Glieder die Zähne zweier horizontalen Räder greifen. Die mit einer Kurbel versehene Achse solches Rades steht auf einem der beiden eisernen Halter. Beim Drehen wandern die Brettchen an allen vier Seitenwänden des Troges entlang. Ist die Temperatur des Bades (nach etwa 1½ Stunden) überall gleich geworden, so werden die Fäden der Mikroskope aus der aufgeschriebenen Trommel-Stellung, bei welcher ihr gegenseitiger Abstand, von der letzten Beobachtung her, genau 4^m betrug, hinübergeschraubt auf die Endstriche des nach Angabe der 4 Thermometer t Grad (etwa 15°) warmen Platinlineals. Der so gemessene Zuwachs an Länge giebt die Ausdehnung des Iridium-Platin-Lineals für t° C. an, und aus dieser Größe für $t\pi p_0$ erhält man den Ausdehnungskoefficienten π. Hierauf führt man die Fäden weiter bis zu den Endstrichen für das Messinglineal. Der neue Zuwachs ist $t\mu m_0 - t\pi p_0$

*) Petroleum ist warmem Wasser deshalb vorzuziehen, weil Wasserdampf auf den Gläsern der Mikroskope sich niederschlagen und diese blind machen würde.

oder, nach der Bezeichnung in Nr. 126, $t\delta$; also kennt man δ. Auch kann man noch aus der Differenz, da ihr Subtrahend vorher gefunden ist, den nicht erforderlichen Koefficienten μ berechnen.

Um zu sehen, wie weit die Ergebnisse für π und μ zuverlässig sind, wird das Petroleum abgelassen und, auf wenig über 50° C. erwärmt, wieder eingeführt. Da der Abstand der unverändert gebliebenen Fadenstellungen aus der letzten Beobachtung bekannt ist, so findet man zu der höheren Temperatur t_1 die Größen für $t_1 \pi p_0$ und $t_1 \mu m_0$, also Kontrollwerte für π und μ.

Die auf solche Weise genau festgestellten Größen p_0 und π des zurückgesandten Meßapparates geben beim Messen der Grundlinie den Abstand der Striche auf dem Platinlineale im Augenblicke der Beobachtung

$$p = p_0 + t \pi p_0$$

wo t jedesmal aus der Mikrometerablesung d hervorgeht. (Nr. 126.)

130. Das Messen der Grundlinie. Die Länge der Grundlinie nimmt man zwei bis drei Kilometer. Vor Bessels Messung bei Königsberg (im Jahre 1834) wählte man die Grundlinie 2- bis 4 mal so groß. Mit der Länge wächst aber die Möglichkeit zufälliger Messungsfehler und die jetzige Vollkommenheit der Theodoliten gestattet diese Verkürzung.*)

Man sucht eine hindernisfreie Stelle, an welcher der Erdboden nicht wellig ist, gleicht kleine Unebenheiten durch Wegräumen und Ausfüllen aus, so daß die Steigungen und Senkungen unter 3° bleiben. Dann werden zwei Punkte, welche die Endpunkte der Grundlinie sein sollen, in folgender Weise festgelegt. Auf einer quadratischen starken Kupferplatte von etwa 8^{cm} Seite hat man die beiden Diago-

*) Dies hat Bessel dargelegt Seite 36 bis 38 in „Gradmessung in Ostpreußen". Von der Richtigkeit überzeugte man sich bei der Messung der Hauptgrundlinie in Spanien. Im Jahre 1858 wurde bei Madridejos (100^{km} südlich von Madrid) eine Grundlinie von $14^2/_3{}^{km}$ Länge in 5 Teilen gemessen und dann der mittlere, $2^3/_4{}^{km}$ lange Teil, noch einmal. Dazu waren $4^1/_2$ Monate erforderlich. Im folgenden Jahre wurden dann auf jeder Seite der Grundlinie bei der Mitte 2 Punkte, mit Abständen von 1,5 bis $5{,}7^{km}$, markiert und von jedem der nun vorhandenen 10 Punkte die Winkel zwischen den Richtungen nach allen anderen aufgenommen. Aus ihnen und dem mittleren Teile berechnete man die ganze Strecke zu $14662{,}889^m$, während die Messung selbst $14662{,}885^m$, also nur 4^{mm} weniger, gegeben hatte. Man würde also, mit einer Genauigkeit von $3^2/_3$ Millionen zu 1, die ganze Strecke erhalten haben, wenn man nur den mittleren Teil von $2766{,}604^m$ gemessen und durch Winkelaufnahme die große Entfernung berechnet hätte. Seite 300 in: Ibañez, Base centrale de la triangulation géodésique d'Espagne. Traduit de l 'espagnol par Laussedat. Madrid, 1865. (300 + 272 Seiten.) Diese äußerst mühevolle und sehr kostspielige Arbeit hat Bessels Meinung bestätigt.

nalen scharf eingerissen; ihr Durchschnittspunkt soll den Anfangs- oder den Endpunkt bezeichnen. Die Kupferplatte wird in der Deckfläche eines Quadersteines fest eingebleit. Der Stein kommt, von einem starken Mauerwerke umgeben, so tief in die Erde, daß die Platte 1^m tief unter dem Erdboden sich befindet. Nach Beendigung der Messung wird eine zu Tage tretende Steinsäule darüber gestellt, um den Ort der Grundlinie zu kennzeichnen, damit es möglich sei, in späteren Jahren die Grundlinie nachzumessen. Hierin hat man ein vorzügliches Mittel, um die Größe der in verschiedenen Ländern gebrauchten Meßstangen miteinander zu vergleichen. Es messen die fremden Beobachter mit ihrem Apparate auch diese Grundlinie. Ist m die Länge des Maßes und n die Anzahl, wie oft es beim Messen der Strecke hingelegt werden mußte, so weiß man aus $n_1 m_1 = n_2 m_2$ mit höchster Genauigkeit, wie groß das eine Maß im Vergleich zum andern ist.

Über dem Endpunkte errichtet man ein Signal (Stangen als Kanten eines hohen Tetraeders) und bringt dessen Spitze durch ein Senklot genau über den festgelegten Punkt.

Damit man leicht arbeiten könne, braucht man zu der Bank mit den Meßlinealen 4 Untersätze mit Stellschrauben, ferner 4 Mikroskopträger, 2 Mikroskope, ein Tiefen- und ein Richtfernrohr und dazu zwei Kreuzziele. Ein solches wird gebildet von zwei sich rechtwinklig kreuzenden Metallfäden, die innerhalb eines Ringes von 3^{cm} innerem Durchmesser schräg ausgespannt sind. Derselbe ist in einem ihm koncentrischen größeren Ringe von 5^{cm} äußerem Durchmesser drehbar und, zum Schutze der feinen Fäden, mit Glasplatten an beiden Seiten verschlossen. Der größere Ring ist das Mittelstück einer Achse, die genau so gearbeitet ist, wie die Querachse der Mikroskope, an deren Stelle sie in die Träger eingesetzt werden kann.

Als Unterlagen für 8 eichene Dreifüße sind große Steinplatten, etwa 130^{kg} schwer, in mindestens doppelter Anzahl erforderlich. Man legt sie, einer in der Richtung der Grundlinie ausgespannten langen Schnur folgend, in den nötigen Abständen, die auf einer Latte in Farben angegeben sind, eine Strecke weit im voraus auf den Erdboden horizontal und unbeweglich hin, damit die Dreifüße völlig fest stehen.

Da die Sonnenstrahlen das Platinlineal stärker erwärmen würden, als das in dessen Schatten liegende Messinglineal, so wird das Messen vollzogen unter einem für zwei Lagen ausreichenden tragbaren Schutzdache. Seine möglichst leichten Grundbalken ruhen nicht nahe bei den Steinplatten auf dem Erdboden.

Beim Anfangspunkte der Grundlinie wird auf das bis zur Erdoberfläche aufgemauerte Fundament der erste hohe Dreifuß H gestellt, und auf ihn ein Mikroskopträger. Da der Anfangspunkt, ein

Meter tief unter dem offenen Erdboden, zu fern ist, um mit dem Mikroskope wahrnehmbar zu sein, so wird es mit seiner Querachse QQ herausgenommen und durch ein kleines Fernrohr von geringer Brennweite ersetzt, dessen Querachse vollkommen gleich gearbeitet ist. Es soll der Mittelpunkt des Kreises CC senkrecht über den Anfangspunkt gebracht werden. Während der Beobachter durch das Tiefenfernrohr ihn ansieht, verbessert er den Standort durch die Mikrometerschrauben des Trägers, wie X am Untersatze U und die rechtwinklig gegen sie gehende an der Hinterseite der obersten Platte. Hat er den Mittelpunkt des Fadenkreuzes zum Zusammenfallen mit dem Bilde des Anfangspunktes gebracht, so prüft er die Stellung des Fernrohrs, indem er den beweglichen Kreis auf dem Teller CC um 180° und um 90° herumdreht. War die optische Achse des Fernrohrs vollkommen lotrecht, so muß bei diesem Drehen das Bild des Anfangspunktes mit dem Kreuzpunkte der Spinnwebfäden immer in Deckung bleiben. Ist dies erreicht, so steht der Kreis CC richtig. Seine Stehfestigkeit ist groß; denn das Instrument wiegt 22 kg. Man darf also an ihm mit Vorsicht fortarbeiten, ohne daß eine Störung seines Standortes zu befürchten wäre.

Nun wird das Tiefenfernrohr herausgenommen und durch das Richtfernrohr ersetzt. Sein Objektiv hat 40 cm Brennweite. Auch bei ihm stimmt die Querachse mit der des Mikroskopes A ganz überein. Der Beobachter stellt den senkrechten Faden des Fadenkreuzes ein auf das Signal, welches über dem Endpunkte der Grundlinie errichtet ist. Da der Grundkreis durch die Druckschraube (D in Figur 19 zu Nr. 23) nun unbeweglich wurde, so kann er das Fernrohr, ohne die Richtung zu verlieren, in die horizontale Lage senken, um die Grundkreismittelpunkte der drei anderen Mikroskopträger genau senkrecht über die Richtung der Grundlinie zu bringen. Gehilfen haben die Träger auf die hohen Dreifüße H, sowie auch die 4 Untersätze auf die niedrigen Dreifüße D für die beiden ersten Lagen der Bank, gesetzt und zwar möglichst in die zu erwartende Stellung, und haben bei jedem mit den Stellschrauben die Säule senkrecht gemacht nach den Angaben der Libelle 1. Nun setzt man in den zweiten und dritten Mikroskopträger die beiden Kreuzziele ein. Der Beobachter am Fernrohr*) läßt einen Gehilfen den nächsten Kreuzziel-Träger quer gegen die Richtung der Grundlinie durch die Mikrometerschraube

*) Das Objektivglas des Fernrohrs, welches eben auf das ferne Signal gerichtet war, würde von dem sehr nahen Kreuzziele ein Bild außerhalb des Rohres geben, und man müßte das Okularstück weit herausschrauben. Das lange währende Drehen könnte der festen Stellung des Instrumentes nachteilig sein. Es wird bei diesem Fernrohre dadurch sehr vermindert, daß die Sammellinse, welche mit der Okularlupe gewöhnlich fest verbunden wird, ersetzt ist durch eine bewegliche achromatische Linse. Sie hat nur 5 cm Brennweite und sitzt am Okular-Ende eines kurzen Rohres, welches mit Zahnstange und Trieb im Tubus

an der obersten Platte so lange fortbewegen, bis der Mittelpunkt des Kreuzzieles hinter dem senkrechten Spinnwebfaden des Fernrohrs erscheint. Dann hat dort der Mittelpunkt des Grundkreises die verlangte Stellung. Das nun herausgenommene Kreuzziel kommt auf den vierten Mikroskopträger, und man bringt den dritten und vierten ebenso in die Richtung.

Darauf wird die eiserne Bank auf die beiden ersten Untersätze, deren Walzen α bereits wagerecht sind, gehoben und auch in Richtung der Grundlinie möglichst horizontal gemacht durch die Höhenschraube Z. Indessen ist mit größter Vorsicht, um die Stellung über dem Anfangspunkte nicht zu stören, das Richtfernrohr aus dem ersten Träger genommen und durch ein Mikroskop ersetzt; das andere hat der zweite Beobachter in den zweiten Mikroskopträger eingefügt. Man bewegt sie in ihren Rohren RR durch den Trieb V auf- und abwärts, bis die feine Teilung auf dem Platinlineal deutlich zu sehen ist. Die Achse des Rohres R steht senkrecht; es kann aber die optische Achse des Mikroskopes noch eine kleine Seitenabweichung haben. Deshalb dreht man den beweglichen Grundkreis auf dem Teller CC um 180° herum. Hat dann das Bild der Teilungen sich gegen die Spinnwebfäden verschoben, so steckt das Mikroskop etwas schief im Rohre R und ist zu berichtigen am unteren Ende durch die Stellschraube e, welcher auf der Hinterseite eine Gegenschraube gegenüber steht. Nun wird die Stellung der Bank durch die Querschrauben noch so verbessert, daß beim Längsfaden des Mikrometers mm an der einen Seite die Teilung auf dem Platinlineale und an der andern die auf der Platinplatte des Messinglineals erscheint. Dann ist die Bank in der Richtung der Grundlinie. Jetzt lesen die beiden Beobachter durch die Mikroskope die Stellung des Nullpunktes der Sägeeinschnitte im Mikrometer (O auf M in der Figur 21 c zu Nr. 24) gleichzeitig in der Teilung auf dem Platinlineale ab und schreiben die Zahl bis auf Tausendstel-Millimeter in die Beobachtungstabelle ihres Notizbuches; darauf lesen sie gemeinsam die Stellung jenes Nullpunktes für die Platinplatte des Messinglineals ab und setzen die Zahl neben die erste. Die Differenzen derselben geben zusammen die Größe d, welche die gegenwärtige Temperatur der Stangen bestimmt. [Nr. 126.]*)

---

leicht vorbewegt wird durch Drehen an einem Schraubenkopfe, wie V am Mikroskope A der Figur 58 in Nr. 127. Nähert man die Sammellinse dem Objektive, so folgt ihr schnell das entstehende Bild und gelangt in die Brennweite der Okularlupe, so daß das Einstellen für die Nähe durch wenig Drehen bewirkt wird.

*) Zur Erhöhung der Sicherheit der Messung werden je 3 Fadeneinstellungen gemacht, die sich nur in den Tausendstel-Millimetern wenig unterscheiden. Dann dreht man den Grundkreis des Mikroskopes um 180° und führt mit dem Fadenmikrometer von der andern Seite her noch 3 Einstellungen aus für jedes der beiden Lineale.

Währenddessen hat ein dritter die Luftblase der Libelle L auf dem Platinlineale durch Drehen der Höhenschraube h in die Mitte gebracht und dann am Gradbogen bb durch den Vernier v den Neigungswinkel des Lineals abgelesen und aufgeschrieben. Damit ist die Beobachtung für die 1. Lage des Meßlineals vollzogen.

Die Bank wird auf die beiden folgenden Untersätze gebracht und so gestellt, daß ihr hinteres Ende, welches unter dem ersten Mikroskope war, nun unter das zweite kommt. Das erste Mikroskop wird vom zweiten Beobachter in den dritten Mikroskopträger eingesetzt. Der erste tritt an das zweite Mikroskop, dessen Stellung unverändert geblieben ist. Durch solches Fortschreiten hat der erste Beobachter in seinem Hefte alle Subtrahenden, der zweite die Minuenden, deren zugehörige Differenzen die gemessenen Hypotenusen sind.

Nachdem die Gehilfen die Bank möglichst horizontal gemacht haben, wird sie genau unter die Längsfäden der Mikrometer, also in die Richtung der Grundlinie gebracht. Die Ablesung jeder Teilung findet wieder gleichzeitig statt, nur in umgekehrter Ordnung, erst für das Messing-, dann für das Platinlineal. Denn nimmt ihre Temperatur zur Zeit fortwährend zu, so wurde d_1 zu groß und d_2 zu klein gefunden. Mithin erlangt man durch dies Verfahren Grenzen für die Temperaturbestimmung.

Der frei gewordene erste Mikroskopträger wurde indessen mit seinem Dreifuße auf die fünfte Stelle gesetzt und seine Säule senkrecht gemacht. Der Mittelpunkt seines Grundkreises wird nachher vom vierten aus, während die Bank noch in der zweiten Lage blieb, mittels des Fernrohrs in die Richtung der Grundlinie gebracht, und im Anschlusse daran der zweite Träger auf der sechsten Stelle. So geht es paarweise fort. Sind Beobachter, Gehilfen und Diener auf die ihnen zugewiesenen Arbeiten gut eingeübt, so kommt man stündlich um 8 Lagen vorwärts.

Wenn nur noch 7 oder 8 Lagen vor Beendigung eines Tagewerks zu erledigen sind, läßt man an der mit der Latte abgemessenen Schlußstelle einen 70 bis 90^{cm} hohen Stein eingraben, in dessen gut geebnete Deckfläche eine quadratische Kupferplatte von 7 bis 8^{cm} Seite mit Blei eingelötet ist. Ihre Mitte wird mittels eines von einem Dreifuße herabgelassenen Senklotes in die Richtung der Grundlinie gebracht; dann stampft man das den Stein umgebende Erdreich fest. Kommt man beim Weitermessen hierher, so setzt ein Beobachter, nachdem ein Mikroskopträger dort seine richtige Aufstellung erhalten hat, in ihn zunächst das Tiefenfernrohr senkrecht ein und läßt auf der Kupferplatte an der anvisierten Stelle mittels eines stählernen Kreuzstempels ein Linienkreuz einschlagen, welches den Ruhepunkt markiert. Auf diesen stellt er die senkrechte Achse des Fernrohrs ein. Dann wird die Bank untergeschoben und auf

der Platinteilung die Schlußstellung mit dem in den letzten Träger wieder eingesetzten Mikroskope abgelesen. Die in die Hefte geschriebenen Beobachtungen werden abends in die Tabellen des Tagebuches eingetragen.

Am folgenden Tage beginnt die Arbeit, wie am vorhergehenden, mit der Beobachtung des Ruhepunktes. Nach je 400 Metern wird ein Teilpunkt der Grundlinie festgelegt in derselben Weise wie die Ruhepunkte.

Ist die erste Messung der Grundlinie beendet, so erfolgt die zweite rückwärts, wobei man die Ruhepunkte der ersten Messung wieder benutzt.

Nachdem vom Messungs-Tagebuche eine Abschrift angefertigt ist, müssen zwei Beamte (wegen der Rechen-Kontrolle), unabhängig von einander, für jede Lage aus der Temperatur die wahre Länge des messenden Linealstücks, sowie aus dem Neigungswinkel die Verkürzung für die Projektion, berechnen und die Größen für die einzelnen Grundlinien-Abschnitte summieren. Aus der Übereinstimmung der beiden Messungen der Abschnitte gewinnt man eine Sicherheit für die Erkenntnis der Güte der Gesamtmessung.*)

§ 8. Die Berliner Grundlinie und ihr Dreiecksnetz.

131. Ort und Größe der Grundlinie. Im Jahre 1846 wurde bei Berlin eine Grundlinie mit dem Besselschen Apparate gemessen.**) Eine auch in Hinsicht auf die anzuschließende Dreiecksaufnahme sehr geeignete Stelle hatte man 11 km südlich von Berlin, unmittelbar an der nach Zossen führenden Chaussee, zwischen den Dörfern Mariendorf und Lichtenrade gefunden. Drei Pfeiler wurden errichtet: der erste am Anfangspunkte A der Grundlinie (Figur 59), der zweite an dem etwa in der Mitte liegenden höchsten Punkte B der Strecke, der dritte an ihrem nördlichen Endpunkte C. Die Grundplatten sind zur dauernden Bezeichnung der Punkte A, B und C im Erdboden verblieben. Die Messung fing am 10. Juni beim südlichen Endpunkte A an. Die ganze Ausführung hat von Ende Mai bis Anfang August gedauert.

*) Die in der ersten Note zu Nr. 130 angegebene Messung der Grundlinie bei Madridejos zeigt, wie genau mit solchem Brunnerschen Meßapparate gearbeitet werden kann.

**) J. J. Baeyer, die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie. Berlin, Ferd. Dümmlers Buchhdlg, 1849. (Seite 27 u. f.)

Der südliche Teil der Grundlinie ist*)

nach der ersten Messung	1147,0407^{m}
nach der zweiten Messung	1147,0437^{m}
also eine Abweichung von	3,0^{mm};

dies ist rund $\frac{1}{380000}$ der Länge.

Demnach ist das arithmetische Mittel

$$AB = 1147{,}0422^{m}.$$

Für den nördlichen Teil geht hervor

aus der ersten Messung	1189,3451^{m}
aus der zweiten Messung	1189,3475^{m}
Abweichung	2,4^{mm};

das ist fast nur $\frac{1}{500000}$ der Länge.

Das arithmetische Mittel ist

$$BC = 1189{,}3463^{m}.$$

---

*) In dem General-Berichte über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1863 (Berlin, G. Reimer, 1864) wird Seite 22 mitgeteilt, daß bei der Bestimmung der Länge der Meßstangen im Jahre 1846 in Berlin gegen die erste Ermittelung im Jahre 1834 in Königsberg sich größere Abweichungen herausstellten, als man [in Hinsicht auf die mögliche eigene Veränderung der Eisenstangen] erwarten konnte. Schon bei der Ausführung habe man erkannt, daß das Zimmer, in welchem die Stangen in ihren Kasten durch heißes Wasser erwärmt wurden, zu klein sei; der nahe Ofen habe die hölzernen Kasten wohl schon so weit sich werfen lassen, daß eine Einwirkung auf die Stangenlänge durch Biegen vielleicht doch begonnen habe. Dieser Verdacht sei als begründet erkannt bei der dritten Bestimmung ihrer Länge im Jahre 1854 in Brüssel.

Dort fand man die mittlere Länge der vier Stangen

	1729,1125	Linien der Toise	[= 3,9005820^{m}]	
während in Berlin	1729,0999	„ „ „	[= 3,9005536^{m}]	
sich ergeben hatte, also	0,0126	Linien	= 0,0284^{mm}	zu wenig.

Diese Verbesserung scheint bei einer Stangenlänge fast nichts zu sein: bei der ganzen Grundlinie, die nun auch um

$$\frac{126}{17290999} = 0{,}0000072870$$

ihrer zuerst gefundenen Länge vergrößert werden muß, tritt die Veränderung als 17^{mm} deutlich hervor. Bei dem daraus hervorgehenden Erdradius aber wird [wie hier voraus angegeben werden möge] dadurch ein Zuwachs schon von 46^{m} herbeigeführt; und das ist so viel, wie die Höhe der Grundlinie über dem Meeresspiegel, also eine Größe, auf die es sehr wohl ankommt.

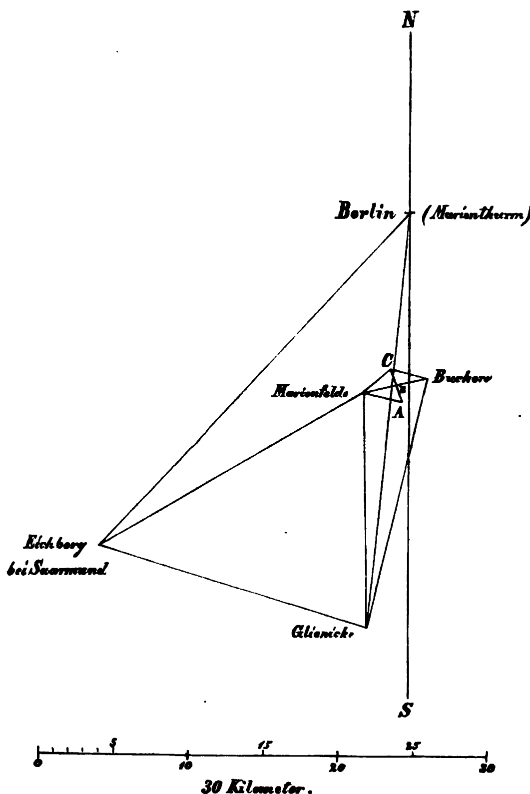
Nachdem die Ergebnisse der Messung, die in jenem Werke von Baeyer in Toisen angegeben sind, seiner Aufforderung gemäß verbessert waren, wurden diese Größen in Meter übertragen. Von der Zahl, welche die Länge einer Toise in Metern angiebt, ist der zehnstellige

Logarithmus = 0,2898199300.

Die oben im Texte stehenden Längen-Angaben sind diese verbesserten Ergebnisse.

Es war $AB = 1{,}147\,0422^{km}$
und $BC = 1{,}189\,3463^{km}$
giebt Grundlinie $AC = 2{,}336\,3885^{km}$.

132. Das Dreiecksnetz der Berliner Grundlinie. Von den Endpunkten der Grundlinie AC aus wurde nach den in der Figur 59 angegebenen Punkten visiert, und von diesen nach den folgenden, wie es die Verbindungslinien zeigen. Der dazu gebrauchte Theodolit hatte einen Grundkreis von 39^{cm} Durchmesser, mit 4 Verniers, die unmittelbar 2 Sekunden angaben. (Derselbe wurde später für Mikrometer-Ablesung eingerichtet. Die Kreisteilung hatte Striche von 4 zu 4 Minuten. Ein Schraubengang entsprach sehr nahe einer Minute; der Schraubenkopf war in 120 gleiche Teile geteilt, so daß nun



Figur 59. Die Berliner Grundlinie und ihr Dreiecksnetz.
Maßstab $\frac{1}{500\,000}$ der natürlichen Größe.

halbe Sekunden abgelesen werden konnten.) Zahlreiche Einstellungen (die behufs Ausgleichung der Kreisteilungsfehler wiederholt wurden, nachdem der Grundkreis ein wenig um die Vertikalachse gedreht war, so daß an andern Stellen des Grundkreises abgelesen wurde) ergaben für die horizontalen Winkel die arithmetischen Mittel, welche die folgende Tabelle unter der Überschrift „gemessene Winkel“ angiebt.*) Links davor steht der Name der Winkelspitze in dem betreffenden Dreiecke. Der „trigonometrische Punkt“ „Berlin“ ist die Turmspitze der Marienkirche.

Die Summe der Winkel beträgt in jedem dieser 5 Dreiecke mehr als 180°, und zwar um so mehr, je größer das Dreieck ist. (Vergleiche auch die Tabelle in Nr. 133.) Dies ist ein neuer Beweis, daß die Erdoberfläche keine Ebene ist.

Man hat zunächst den dritten Teil des sphärischen Excesses von jedem der Winkel abzuziehen [wie es der Legendresche Lehrsatz**) fordert], um jedes Dreieck als ein ebenes berechnen zu können. Die ausgeglichene Anzahl der Sekunden ist in der Tabelle beigefügt. Wir rechnen der größeren Genauigkeit wegen mit einer überschüssigen Decimalstelle, die durch einen Punkt von den völlig zuverlässigen Stellen getrennt wird. Neben der Tabelle sind die Logarithmen der Übergangsseiten angegeben zum Vergleich bei der nun auszuführenden Berechnung der Seite Berlin-Eichberg.

---

*) In dem bereits angegebenen Werke von Baeyer, „die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie“ stehen S. 361 bis 364 die auf den Stationen am Horizontalkreise beobachteten Richtungen, aus welchen die Größe der Winkel für die Dreiecke Nr. 1 bis 6 abgeleitet wurde. Die für Nr. 7 bis 11 (in Nr. 133) sind veröffentlicht S. 42 bis 46 im „General-Bericht über die europäische Gradmessung für das Jahr 1872“; Berlin, G. Reimer, 1873. Die Richtungsangaben finden sich auch, und zwar für die Dreiecke 1 bis 6 S. 283 bis 288 und für die Dreiecke 7 bis 11 S. 439 bis 441, in: Die Königlich Preußische Landes-Triangulation. Haupt-Dreiecke. II. Teil. Herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation. Berlin, 1874. Im Selbstverlage.

**) Dieser Lehrsatz gilt für sphärische Dreiecke, deren Seiten im Vergleich zum Kugelradius sehr klein sind. Der Bogen des Kreises vom Radius Eins, welcher ebenso wenige Minuten und Sekunden hat, wie der Bogen b auf der Kugel vom Radius r, hat die Länge $\frac{b}{r}$. Bei der Kleinheit dieses Bruches sind die Potenzen, welche den fünften Grad übersteigen, zu unterdrücken, und deshalb beschränken sich Newtons Reihen für Sinus und Kosinus hier auf

$$\sin b = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{3!\,r^3} + \frac{b^5}{5!\,r^5} \quad \text{und} \quad \cos b = 1 - \frac{b^2}{2!\,r^2} + \frac{b^4}{4!\,r^4}.$$

Dadurch geht hervor aus

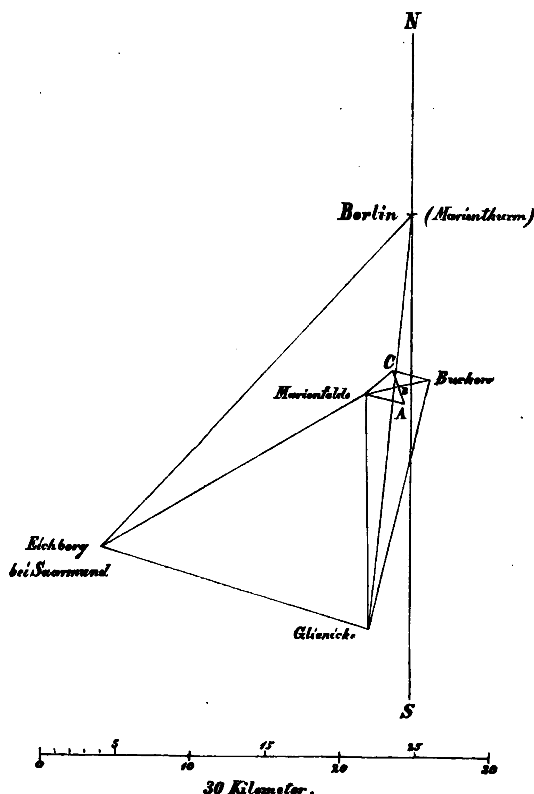
$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

nach dem Ausmultiplizieren

Es war AB = 1,147 0422 km
und BC = 1,189 3463 km

giebt Grundlinie AC = 2,336 3885 km.

132. Das Dreiecksnetz der Berliner Grundlinie. Von den Endpunkten der Grundlinie AC aus wurde nach den in der Figur 59 angegebenen Punkten visiert, und von diesen nach den folgenden, wie es die Verbindungslinien zeigen. Der dazu gebrauchte Theodolit hatte einen Grundkreis von 39 cm Durchmesser, mit 4 Verniers, die unmittelbar 2 Sekunden angaben. (Derselbe wurde später für Mikrometer-Ablesung eingerichtet. Die Kreisteilung hatte Striche von 4 zu 4 Minuten. Ein Schraubengang entsprach sehr nahe einer Minute; der Schraubenkopf war in 120 gleiche Teile geteilt, so daß nun



Figur 59. Die Berliner Grundlinie und ihr Dreiecksnetz.

Maßstab $\frac{1}{500000}$ der natürlichen Größe.

halbe Sekunden abgelesen werden konnten.) Zahlreiche Einstellungen (die behufs Ausgleichung der Kreisteilungsfehler wiederholt wurden, nachdem der Grundkreis ein wenig um die Vertikalachse gedreht war, so daß an andern Stellen des Grundkreises abgelesen wurde) ergaben für die horizontalen Winkel die arithmetischen Mittel, welche die folgende Tabelle unter der Überschrift „gemessene Winkel" angiebt.*) Links davor steht der Name der Winkelspitze in dem betreffenden Dreiecke. Der „trigonometrische Punkt" „Berlin" ist die Turmspitze der Marienkirche.

Die Summe der Winkel beträgt in jedem dieser 5 Dreiecke mehr als 180°, und zwar um so mehr, je größer das Dreieck ist. (Vergleiche auch die Tabelle in Nr. 133.) Dies ist ein neuer Beweis, daß die Erdoberfläche keine Ebene ist.

Man hat zunächst den dritten Teil des sphärischen Excesses von jedem der Winkel abzuziehen [wie es der Legendresche Lehrsatz**) fordert], um jedes Dreieck als ein ebenes berechnen zu können. Die ausgeglichene Anzahl der Sekunden ist in der Tabelle beigefügt. Wir rechnen der größeren Genauigkeit wegen mit einer überschüssigen Decimalstelle, die durch einen Punkt von den völlig zuverlässigen Stellen getrennt wird. Neben der Tabelle sind die Logarithmen der Übergangsseiten angegeben zum Vergleich bei der nun auszuführenden Berechnung der Seite Berlin-Eichberg.

---

*) In dem bereits angegebenen Werke von Baeyer, „die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie" stehen S. 361 bis 364 die auf den Stationen am Horizontalkreise beobachteten Richtungen, aus welchen die Größe der Winkel für die Dreiecke Nr. 1 bis 6 abgeleitet wurde. Die für Nr. 7 bis 11 (in Nr. 133) sind veröffentlicht S. 42 bis 46 im „General-Bericht über die europäische Gradmessung für das Jahr 1872"; Berlin, G. Reimer, 1873. Die Richtungsangaben finden sich auch, und zwar für die Dreiecke 1 bis 6 S. 283 bis 288 und für die Dreiecke 7 bis 11 S. 439 bis 441, in: Die Königlich Preußische Landes-Triangulation. Haupt-Dreiecke. II. Teil. Herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation. Berlin, 1874. Im Selbstverlage.

**) Dieser Lehrsatz gilt für sphärische Dreiecke, deren Seiten im Vergleich zum Kugelradius sehr klein sind. Der Bogen des Kreises vom Radius Eins, welcher ebenso wenige Minuten und Sekunden hat, wie der Bogen b auf der Kugel vom Radius r, hat die Länge $\frac{b}{r}$. Bei der Kleinheit dieses Bruches sind die Potenzen, welche den fünften Grad übersteigen, zu unterdrücken, und deshalb beschränken sich Newtons Reihen für Sinus und Kosinus hier auf

$$\sin b = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{3!\,r^3} + \frac{b^5}{5!\,r^5} \quad \text{und} \quad \cos b = 1 - \frac{b^2}{2!\,r^2} + \frac{b^4}{4!\,r^4}.$$

Dadurch geht hervor aus

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

nach dem Ausmultiplizieren

Namen der Dreiecksspitzen	Gemessene Winkel	Sekunden, ausgeglichen	Ergebnisse der Rechnung	7 stellige Logarithmen	5 stellige Logarithmen
1. A	57° 46′ 17,9185″	17,91″	log AC	0,368 5450.6	0,368 54.4
C	67 54 53,9834	53,98			
Marienfelde	54 18 48,1123	48,11	C=Marienfelde	0,386 2057.3	0,386 20.6
	180° 0′ 0,0142″	0,00″			
2. C	126° 50′ 40,3295″	40,33″			
Marienfelde	27 8 21,1859	21,18			
Buckow	26 0 58,4967	58,49	Marienfelde=Buckow	0,647 3454.3	0,647 34.6
	180° 0′ 0,0121″	0,00″			
3. Marienfelde	102° 3′ 2,0066″	1,95″			
Buckow	63 33 8,6013	8,54			
Glienicke	14 23 49,5648	49,51	Marienfelde=Glienicke	1,203 7622.2	1,203 76.1
	180° 0′ 0,1727″	0,00″			
4. Marienfelde	60° 13′ 33,0289″	32,787″			
Glienicke	72 12 52,2481	52,007			
Eichberg	47 33 35,4478	35,206	Glienicke=Eichberg	1,274 2307.4	1,274 23.0
	180° 0′ 0,7248″	0,000″			
5. Glienicke	78° 31′ 35,3668″	34,93″			
Eichberg	64 23 15,9667	15,53			
Berlin	37 5 9,9781	9,54	Berlin=Eichberg	1,485 1375.4	1,485 13.5
	180° 0′ 1,3116″	0,00″			

Berlin=Eichberg = 30,55889^{km} (30,5589^{km}).

Durch die Dreiecksaufnahme ist als Ausgangsseite für die folgende Dreieckskette eine Linie gewonnen, die 13mal so groß ist, als die gemessene Grundlinie.

$$\cos\alpha = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,r^2} - \frac{b^4+c^4-a^4+6\,b^2c^2}{24\,r^4}}{\frac{b\,c}{r^2}\left(1-\frac{b^2+c^2}{6\,r^2}\right)}.$$

Multipliziert man (zur Beseitigung des Nenners) Nenner und Zähler mit $1+\frac{b^2+c^2}{6\,r^2}$, so muß im Nenner $\frac{b\,c}{r^2} - \frac{b\,c\,(b^2+c^2)^2}{36\,r^6}$ das zweite Glied wegen der sechsten Potenz fortgelassen werden und man hat nach der Zusammenziehung

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c} - \frac{2\,(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-a^4-b^4-c^4}{24\,b\,c\,r^2}.$$

Das ebene Dreieck, dessen Seiten ebensolang sind, wie a, b und c, habe die Winkel α_1, β_1 und γ_1. In ihm ist $\cos\alpha_1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,b\,c}$ und wenn man diesen Ausdruck einsetzt in $\sin^2\alpha_1 = 1-\cos^2\alpha_1$, so findet man, daß die letzte Gleichung bedeutet

§ 9. Dreieckskette am Berliner Meridian.

133. Die Hauptseiten zwischen den Endstationen. Wir berechnen zunächst die Logarithmen der Teile der in der Figur 60 stärker gezeichneten gebrochenen Linie Berlin-Strauch.*)

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1 - \frac{b\,c\sin^2\alpha_1}{6r^2}$$

oder mit dem Inhalte Δ des ebenen Dreiecks

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1 - \frac{1}{3}\frac{\Delta}{r^2}\sin\alpha_1.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß α nur sehr wenig größer ist, als α_1. Setzt man daher $\alpha = \alpha_1 + x$, so ist in der Entwicklung von $\cos(\alpha_1 + x)$ für $\cos x$ 1 und für $\sin x$ der Bogen x zu setzen, also

$$\cos\alpha = \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1 \cdot x.$$

Der Vergleich beider Ausdrücke für $\cos\alpha$ ergiebt diesen kleinen Überschuß $x = \frac{1}{3}\frac{\Delta}{r^2}$.

Deshalb hat man

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{1}{3}\frac{\Delta}{r^2}$$

und entsprechend

$$\beta = \beta_1 + \frac{1}{3}\frac{\Delta}{r^2}$$

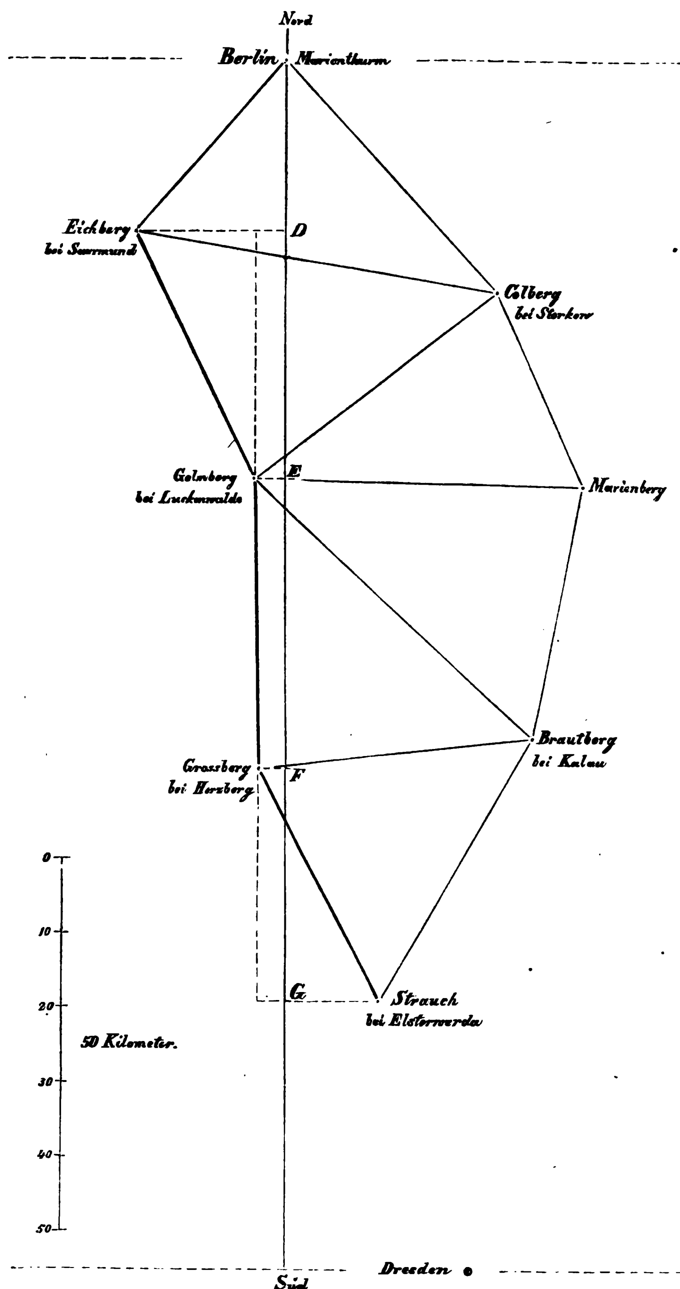
$$\gamma = \gamma_1 + \frac{1}{3}\frac{\Delta}{r^2}$$

Ihre Summe liefert den sphärischen Exceß $E = \frac{\Delta}{r^2}$, also war $\alpha = \alpha_1 + \frac{1}{3}E$ oder $\alpha_1 = \alpha - \frac{1}{3}E$ und $\beta_1 = \beta - \frac{1}{3}E$, $\gamma_1 = \gamma - \frac{1}{3}E$, und somit lautet der Legendre'sche Satz: Die Seiten eines sphärischen Dreiecks, welche im Vergleich zum Kugelradius sehr klein sind, berechnet man als die ebenso großen Seiten eines ebenen Dreiecks, in welchem jeder Winkel um den dritten Teil des sphärischen Excesses kleiner ist, als im sphärischen Dreiecke.

Dieser Lehrsatz ist für die Geodäsie (Erdmeßkunst) von großer Bedeutung; denn er ermöglicht, die Seiten der sphärischen Dreiecke zu berechnen, ohne den Zahlenwert des Erdkugelradius zu kennen.

Legendre, Professor der Mathematik, geb. 1752, gest. 1833, lebte in Paris.

*) Um die Vorstellung von der Länge der Linie „Berlin-Strauch" zu verdeutlichen, ist in der Figur 60 unten noch die Lage von Dresden angegeben. Die Figur ist in dem millionsten Teile der natürlichen Größe gezeichnet. — Nebenbei läßt sie ahnen, was für eine überwältigend große Zahl eine Million ist. Wollte man nämlich die Figurentafel quer abschneiden bei den mit „Berlin" und „Dresden" bezeichneten Stellen, so würde eine Million solcher Blätter, hintereinander gelegt, von Berlin bis Dresden kommen, — zu welcher Strecke der Eilzug drei Stunden, der schnellste Personenzug vier Stunden braucht.



Figur 60. Dreieckskette am Berliner Meridian.

Maßstab $\frac{1}{1\,000\,000}$ der wahren Größe.

Namen der Dreieckspitzen		Gemessene Winkel	Sekunden, ausgeglichen	Ergebnisse der Rechnung	7stellige Logarithmen	5stellige Logarithmen
6.	Berlin	83° 14′ 11,2103″	10,13″	1) Berlin-Eichberg	1,485 1375.4	1,485 13.5
	Eichberg	58 27 2,6247	1,55			
	Kolberg	38 18 49,3928	48,32	Eichberg-Kolberg	1,689 7386.4	1,689 72.9
		180° 0′ 3,2278″	0,00″			
7.	Eichberg	54° 41′ 12,332″	11,092″	2) Eichberg-Golmberg	1,565 7113.8	1,565 70.1
	Kolberg	47 19 9,084	7,844			
	Golmberg	77 59 42,304	41,064	Golmberg-Kolberg	1,611 0331.9	1,611 02.2
		180° 0′ 3,720″	0,000″			
8.	Kolberg	76° 39′ 17,620″	16,66″			
	Golmberg	39 7 22,736	21,78			
	Marienberg	64 13 22,522	21,56	Golmberg-Marienberg	1,644 6651.3	1,644 64.8
		180° 0′ 2,878″	0,00″			
9.	Marienberg	80° 11′ 3,081″	1,81″			
	Golmberg	41 51 18,749	17,47			
	Brautberg	57 57 41,993	40,72	Golmberg-Brautberg	1,710 0229.3	1,710 00.5
		180° 0′ 3,823″	0,00″			
10.	Brautberg	48° 50′ 24,406″	23,20″	3) Golmberg-Großberg	1,588 3121.0	1,588 29.8
	Golmberg	46 1 35,115	33,91			
	Großberg	85 8 4,100	2,89	Großberg-Brautberg	1,568 7158.5	1,568 70.3
		180° 0′ 3,621″	0,00″			
11.	Brautberg	53° 33′ 28,109″	27,08″			
	Großberg	68 39 0,524	59,50			
	Strauch	57 47 34,444	33,42	4) Großberg-Strauch	1,546 7826.4	1,546 76.9
		180° 0′ 3,077″	0,00″			

134. Berechnung der Meridianabschnitte. Auf dem Marienturme in Berlin ist das Azimut des trigonometrischen Punktes auf dem Eichberge 221° 23′ 14,55″. Daher kann man Berlin-D, die Projektion von Berlin-Eichberg auf den Meridian, berechnen. Ferner findet man aus den beobachteten Winkeln der Dreiecke Nr. 6 bis 11

den Winkel Berlin-Eichberg-Golmberg = 113° 8′ 14,957″;

also aus jenem Azimut

Winkel Eichberg-Golmberg-Nord = 25° 28′ 30,493″;

dann

Winkel Großberg-Golmberg-Ost = 89° 31′ 28,411″;

endlich

Winkel Strauch-Großberg-Süd = 26° 41′ 26,965″.

Daraus erhält man die Größe der 4 Meridianabschnitte

Berlin-D =	22,92701 km	(22,927 km)
DE =	33,21158	(33,211)
EF =	38,75227	(38,751)
FG =	31,46659	(31,466); folglich

Meridianbogen Berlin-G = 126,35745 km (126,355 km).

§ 10. Berechnung des Erdkugelradius.

135. Radius des Meridianbogens. Auf dem Marienturme in Berlin liegt der trigonometrische Punkt in der Lotlinie des die Turmspitze bildenden Kreuzes. Für ihn ist die Polhöhe

$$52^0\,31'\,19{,}06''.^{*)}$$

Auf dem trigonometrischen Punkte Strauch wurde im September 1870 beobachtet die Polhöhe

$$51^0\,23'\;\;7{,}72''.^{**)}$$

Die Differenz dieser geographischen Breiten giebt für den Meridianbogen

$$\text{Berlin-G}\;\;1^0\,8'\,11{,}34''$$

oder, in Sekunden ausgedrückt, $\alpha = 4091{,}34''$. Bezeichnet man die (Nr. 134) gefundene Länge dieses Bogens mit s, so ist sein Radius

$$r = \frac{648\,000}{\pi} \cdot \frac{s}{\alpha}.$$

Mit dem genauen $\log \frac{648\,000}{\pi} = 5{,}31442513$ ergiebt sich

*) J. J. Baeyer (Astronomische Bestimmungen. Leipzig, W. Engelmann, 1873. Seite 125) setzt die Sekunden der Polhöhe des Marienturmes auf 19,60. Diese Angabe ist durch Triangulation berechnet aus der Polhöhe der Berliner Sternwarte, für welche er, und später auch Dr. Sadebeck, mit ihrem Theodoliten von 39 cm Grundkreisdurchmesser 52° 30′ 17,22″ erhielt. Dieser Wert ist gegen Enckes Bestimmung im Berliner astronomischen Jahrbuche für 1839, 52° 30′ 16,68″, um 0,54″ zu groß. Letztere Zahl ist wohl zuverlässiger, da sie mit den viel größeren Instrumenten der Sternwarte als deren Hauptkonstante aufs genaueste ermittelt ist. Die demgemäß oben in den Text gesetzte Zahl ist in Übereinstimmung mit der Angabe

Berlin (Marienturm) Breite 52° 31′ 19,062″,

welche Seite 621 steht in dem Werke: Die Königlich Preußische Landes-Triangulation. Haupt-Dreiecke. II. Teil. Berlin, 1874. Herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation.

**) Mitteilung des Herrn Prof. Dr. Sadebeck, Abteilungschef des geodätischen Instituts in Berlin; von ihm selbst mittels Zenitdistanzen gemessen.

$$r = 6\,370{,}308^{km} \quad (6\,370{,}1^{km}).^{*)}$$

(Rechnet man bei fünfstelligen Logarithmen mit dem ungenauen log 648 000 = 5,81158, dessen letzte Stelle wegen einer folgenden 5 erhöht ist, so kommt r ≐ 6 370,2 km.)

Der Meridianbogen Berlin-G liegt aber nicht in der Erweiterung des Meeresspiegels, sondern über derselben in der Höhe der gemessenen Grundlinie AC. [Nr. 256.] Um diese Höhe zu ermitteln, wurde von der Ostsee bei Swinemünde nach Berlin (205 km) und bis zur Grundlinie nivelliert.

136. Trigonometrisches Nivellement. Das Nivellieren kann auf zwei Weisen ausgeführt werden. Man nivelliert trigonometrisch, indem man an dem Höhenkreise eines Theodoliten Höhen- oder Tiefen-Winkel mißt. An benachbarten Hauptstationen einer Dreieckskette (in Figur 60 würden es diejenigen Dreieckspunkte sein, welche durch die stärker gezeichneten Linien verbunden sind) stellt jeder der beiden Beobachter das Fernrohr seines Theodoliten ein auf das Sonnenlicht, welches ihm vom andern mittels eines kleinen Spiegels (Heliotrop) zugeworfen wird. Dann liest er am Höhenkreise den Neigungswinkel dieser Richtung gegen die durch den Mittelpunkt des Theodoliten gehende horizontale Ebene ab. Liegt die Richtung über dieser Ebene, so liefert die Beobachtung einen Höhenwinkel α, läuft sie unter derselben fort, einen Tiefenwinkel $-\alpha$. Man erhält den Höhenunterschied der beiden Stationen, deren Entfernung s aus der Dreieckskette bekannt ist, als $s \tan \alpha$. Die algebraische Summe der ganzen Reihe der Höhenunterschiede wird dann die gesuchte Höhe des Endpunktes der Kette über dem Anfangspunkte.

Das gleichzeitige gegenseitige Beobachten an beiden Nachbarstationen ist deswegen erforderlich, weil der Lichtstrahl in der atmosphärischen Luft keine vollkommen gerade Linie bildet. Da die Dichtigkeit der Luft nach oben abnimmt, so wölbt sich ein wenig der Strahl über der geraden Verbindungslinie, so daß man sowohl auf der höheren, als auch auf der tieferen Station die andere etwas zu hoch erblickt. Die Stärke der Krümmung des Lichtstrahls nimmt an jedem Tage vom Morgen gegen den Mittag hin ab und wächst vom Mittage gegen den Abend; denn die unteren Luftschichten werden wärmer als die oberen, und so wird durch Wärmeausdehnung die Verschiedenheit der Dichtigkeit mehr ausgeglichen. Auch hat die Beschaffenheit des

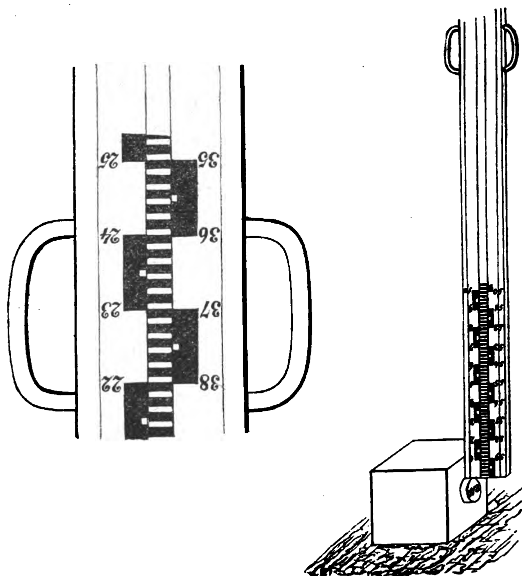
*) Nimmt man mit Baeyer die Polhöhe des Marienturmes um 0,54″ größer, so erhält man für den Radius nur 6 369,467 km, also 0,841 km weniger. Man sieht also, einen wie starken Einfluß die Bestimmung der Polhöhe auf die Zahl für den Erdradius hat, wenn der gemessene Bogen nur 126 km lang ist, da hier ein Unterschied von einer halben Sekunde den Radius schon um fast 1 km verändert.

Bodens, über welchen der Strahl hinstreicht, namentlich wenn er über Wälder geht, auf die Strahlenbrechung veränderlichen Einfluß, so daß man an mindestens zwei Nachmittagen beobachten muß. Vormittags und bis Nachmittag um 4 Uhr ist das Beobachten selten möglich, weil das Heliotropenlicht zittert, indem es in jedem Augenblicke seinen Weg ändern muß wegen des Durcheinandergehens von warmer und kalter Luft. Es wird nämlich besonders über kahlem Erdboden die Luft schneller warm und steigt auf, und wird durch herabkommende kältere Luft ersetzt. Aber auch bei ziemlich ruhigem Licht, am frühen Morgen und gegen Abend, haben die Ergebnisse der wiederholten Beobachtungen öfters nicht die Übereinstimmung, welche man bei großen Höhenkreisen (von 21 cm Durchmesser) für Entfernungen unter 20 km erwarten muß. (Hierüber noch in Nr. 144.)

Die andere Weise zu nivellieren giebt ein

137. Geometrisches Nivellement. Ein mit Fadenkreuz versehenes Fernrohr, auf welchem eine Röhrenlibelle parallel der optischen Achse sitzt, wird genau horizontal gestellt. Auf dem zu nivellierenden Wege (man benutzt dazu die Chausseen und die Eisenbahnkörper) in 100 Schritt Entfernung*) hält ein Gehilfe senkrecht

*) Dazu die Anmerk. bei Nr. 142.



Figur 61. Eine Nivellierlatte.
1/5 der natürlichen Größe. | 1/20 der natürlichen Größe.

eine Nivellierlatte; das ist ein 3^{m} langer Maßstab, auf welchem der Abstand je zweier Centimeterstriche in der unteren Hälfte weiß, in der oberen schwarz ausgefüllt ist, weil bei großer Entfernung feine Teilstriche eines Maßstabes schwer gesehen werden können. Man liest durch das Fernrohr ab, wie hoch über dem Standpunkte der Latte die horizontale optische Fernrohrachse hinstreicht. Dann wendet man das Fernrohr herum nach der folgenden in der Fortsetzung des Weges senkrecht gehaltenen Nivellierlatte und liest die dortige Höhe der Horizontalebene, welche die Fernrohrachse beim Wenden beschrieb, ab. Die Differenz beider Ablesungen giebt an, um wieviel der Standpunkt der zweiten Latte höher oder tiefer liegt, als der der ersten. Während das Fernrohr und die erste Latte auf der Chaussee weiter getragen werden, bleibt der zweite Gehilfe stehen. Mit seinem Standpunkte wird dann der vom ersten nun eingenommene dritte Standort verglichen, und so fort.

Damit der Maßstab vom Gehilfen wirklich senkrecht gehalten werde, ist auf der Rückseite der Latte in 1,2^{m} Höhe eine Dosenlibelle so befestigt, daß ihre Grundebene rechtwinklig zur Latte ist. Auf dem Maßstabe kann nicht an jedem Centimeterstrich seine Nummer gesetzt werden, weil diese viel zu klein zu schreiben wäre, als daß sie auf 100 Schritt durch das Fernrohr gelesen werden könnte. Deswegen werden je 5 Centimeter abwechselnd rechts und links durch ein schwarzes Feld verbunden (Figur 61). Sein Ende markiert deutlich den Centimeterstrich, welchem die in großer Schrift beigesetzte Zahl zukommt. Die Zahlen stehen auf dem Kopfe, weil das Fernrohr das Bild umgekehrt liefert. Der Abstand der Zahlen beträgt ½ Decimeter; sie gehen also auf der 30 Decimeter langen Latte von 1 bis 60, und sind für die Kontroll-Ablesung noch einmal rückwärts angeschrieben. Man liest durch das Fernrohr zunächst von oben her ab (in Wirklichkeit also vom Fußende der Latte an) die dem Querfaden nächste Zahl; es sei 28. Dann zählt man die weißen und schwarzen Mittelfelder, welche der Faden über sich frei läßt; es seien 6 (dabei leistet die weiße Marke mitten auf der schwarzen Klammer ihre Dienste). Endlich schätzt man nach Zehnteln der Höhe den Teil des siebenten Feldes, welcher über dem Querfaden hervorragt; dies seien 3. Hierauf macht man es ebenso von unten her. Hat man dabei erhalten 31,37, so ist kein Lesefehler vorgekommen, weil diese Zahl die erste (28,63) zu 60 ergänzt. Die kontrollierte Zahl 28,63 bedeutet in dieser Schreibweise halbe Decimeter; beim Notieren läßt man aber das Komma fort, und hat dann 2863 halbe Millimeter. Die gesuchte Höhe beträgt daher 1431,5^{mm}.*)

---

*) Nach jeder der beiden Ablesungen wird die Stellung der Luftblase unter den Teilstrichen auf der Röhrenlibelle des Fernrohrs beobachtet und mit aufgeschrieben. Diese verläßt nämlich den Nullpunkt während der Arbeit, wenn die Sonne auf das Stativ scheint. Von der hieraus hervorgehenden Verbesserung

Um später durch Nachmessen einzelne Teile prüfen zu können, und um den Nutzen durch Anschließen von Nebennivellements dauernd zu erhöhen, sind auf den Chausseen vor dem Nivellieren in Entfernungen von je 2 Kilometern Granitprismen, deren Deckfläche ein Quadrat von etwa 20^{cm} Seite ist, ein Meter tief fest eingesetzt, so daß nur der obere Teil 20 bis 30^{cm} hoch hervorragt. (Figur 61.) In diesem ist horizontal ein gußeiserner Bolzen mit Blei oder Cement befestigt. Auf den aus dem Steine hervorstehenden cylindrischen Kopf, dessen Kreisfläche die Nummer des Nivellementsbolzens angiebt, wird die Nivellierlatte gestellt. Der höchste Punkt des Kopfes ist dann der seiner Höhe nach bestimmte feste Punkt. Zwischen je zwei solchen Steinen wird zweimal (hin und her) nivelliert. Weichen dann die beiden Ergebnisse um mehr als 3^{mm} voneinander ab, so ist durch eine dritte Messung der Fehler zu beseitigen.

Den Nullpunkt aller Höhen der preußischen Nivellements hat das Bureau der Landestriangulation im Jahre 1878 am Gebäude der Berliner Sternwarte festgelegt. Auf einer Tafel von Milchglas trägt ein horizontaler schwarzer Strich die Inschrift: „37 Meter über Normal-Null." Der 37^{m} senkrecht unter diesem Strich im Erdboden liegende Normal-Null-Punkt ist in gleicher Wasserfläche mit dem Nullpunkte des Amsterdamer Pegels.*) Für ihn hat das bis dahin beobachtete Mittelwasser der Nordsee den Stand — 0,144^{m}. Durch diese Bestimmung werden die Nivellementshöhen zu Seehöhen.

Um ein Urteil über die Güte eines ganzen Nivellements zu erhalten, nivelliert man stets Schleifen, d. h. man kehrt auf anderem Wege zum Ausgangspunkte zurück. Dann müßte die Summe aller Höhenunterschiede Null ergeben. Auf solche Weise hat man auch untersucht, welche Art zu nivellieren ein genaueres Ergebnis liefert. Man ließ drei Schleifen sowohl geometrisch als trigonometrisch doppelt nivellieren. Der Vergleich der Erfolge sprach sehr zu

---

kommen dann in die veröffentlichten Ergebnisse andere Endziffern, die sonst nur 0 oder 5 Zehntelmillimeter lauten könnten.

*) Um den Normalstrich genau in der gewünschten Höhe anzubringen, wurden aus der Mauer des Gebäudes Steine herausgenommen und durch einen Syenitblock ersetzt, in welchen die Tafel von Milchglas eingelassen war. Nach den Höhen zweier im Garten angebrachten Nivellementsbolzen wurde die Höhe mit dem Nivellierfernrohre eingerichtet und die Grundfläche des Syenitblocks so lange abgeschliffen, bis jener Strich scharf an die verlangte Stelle kam. Auf der Milchglasplatte sind über und unter dem Normalstrich 10 Centimeter in Millimeter geteilt, damit man in künftigen Jahren bei einem von hier aus beginnenden Nivellement, nach Fortnehmen der metallnen Deckplatte, bequem anfangen könne.

gunsten des geometrischen Nivellements.*) Deshalb wird in Preußen von seiten des geodätischen Instituts und der Königlichen Landes-triangulation seit 1867 nur geometrisch nivelliert. Die Arbeiten sind so genau, daß der mittlere Fehler auf ein Kilometer nur $1{,}3^{mm}$ beträgt.

138. Verkürzung des Radius des Meridianbogens bis zur Erweiterung des Meeresspiegels. Durch das trigonometrische Nivellement vom Jahre 1835 fand man die mittlere Höhe über dem Nullpunkte des Pegels zu Swinemünde für den südlichen Teil der Berliner Grundlinie, AB, $46{,}78^{m}$, und für den nördlichen, BC, $47{,}36^{m}$. Also ist die mittlere Höhe der ganzen Grundlinie $47{,}07^{m}$. Diese Angabe ist nach dem geometrischen Nivellement vom Jahre 1873 zu vermehren**) um $0{,}16^{m}$; also $47{,}23^{m}$. Nach dem Mittel aus 27 jährigen Beobachtungen (1848 bis 1874) ist die Höhe des Mittel-wassers (d. h. des Jahresdurchschnitts der täglichen Wasserstands-beobachtungen) am Pegel zu Swinemünde***) bei $+1{,}05^{m}$. Mithin liegt die Grundlinie $46{,}18^{m}$ über dem Mittelwasser der Ostsee. Diese 46 Meter sind von dem Radius des Meridianbogens, $6\,370{,}308^{km}$, abzuziehen, um den Radius der Meeresfläche zu erhalten. Derselbe ist demnach

$$6\,370{,}262^{km}.$$

(Es zeigt sich, daß für dieses Übertragen des Ergebnisses auf die Meereshöhe die mit fünfstelligen Logarithmen erhaltene Größe des Bogens Berlin-G nicht ausreichend genau ist; denn der Meridian-radius ergab sich schon kleiner, als die auf den Meeresspiegel ver-kürzte Länge.)

Wir rechnen den

Erdkugelradius = 6370,26 Kilometer.

Bemerkung. Zu einer Vorstellung von der Länge des Erd-radius kann gelangen, wer auf der Eisenbahn fährt zwischen

Berlin und Frankfurt a. M., über Halle	537^{km}, 12 mal,
Berlin und Hamburg,	286^{km}, 22 mal,
Berlin und Dresden,	174^{km}, 36 mal.

[Der Leser führe solche Rechnung aus für einen ihm genau bekannten langen Weg.]

---

*) Nivellements und Höhenbestimmungen der Punkte erster und zweiter Ordnung. Ausgeführt vom Bureau der Landestriangulation. I. Band. Berlin, 1870. Im Selbstverlage. Seite 108.

**) Nivellements und Höhenbestimmungen .... III. Band. Berlin, 1875. Seite 136.

***) Daselbst III. Band. Seite 139.

139. Höhe der Gebirge auf der Erdkugel. Wie groß müßte man den Durchmesser eines Erdglobus machen, damit der höchste Berg der Erde, der 8840^{m} hohe Everest, in entsprechender Größe ein halbes Millimeter hoch werde?

Antwort. 72^{cm}. Die Gebirge stören nicht den Eindruck der Kugelgestalt, welchen ein Beobachter von der Erde erhielte, selbst in einer Entfernung von nur wenigen Erddurchmessern.

§ 11. Stärke der Krümmung der Erdoberfläche.

140. Wölbungshöhen. 1) Wie hoch ist die Wölbung einer 1^{km} langen Strecke über der Mitte der Sehne, die ihre Endpunkte verbindet?*)

Auflösung. Die Sehne, welche den Halbierungspunkt des Bogens mit einem seiner Endpunkte verbindet, ist eine 500^{m} lange Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse ein Erddurchmesser ist.

Ergebnis. Die Wölbung auf einer so kurzen Strecke ist schon 2^{cm} hoch. Diese Höhe wächst bei einem 4^{km} langen See auf 31^{cm}, bei einem 6^{km} langen schon auf 71^{cm}.**)

2) Wie hoch wölbt sich der Spiegel des Kaspischen Sees mitten über der Sehne eines Meridians, welche die Nordküste mit der Südküste verbindet? Die Endpunkte haben $47^{0}24'$ und $36^{0}34'$ nördlicher Breite.

Ergebnis. Mit dem Breitenunterschiede $\alpha = 10^{0}50'$ erhält man

$$x = 2r\sin^2\tfrac{1}{4}\alpha.$$

Die Höhe der Wölbung beträgt $28{,}446^{km}$. (Die Eisenbahn von Berlin nach Potsdam ist 26^{km} lang.)

Anmerkung. Die Meerestiefen sind nur Verminderungen der Krümmung der Erdrinde. Denn die größte gemessene Tiefe, 8513^{m}, ist nur klein gegen solche Wölbungshöhe. Die größte Tiefe

---

*) Die Straße „Unter den Linden" in Berlin, vom Standbilde Friedrichs des Großen bis zum Brandenburger Thore, ist nur wenige Meter länger als 1^{km}.

**) Zur Anschauung solcher Flächen werde aus der Umgegend Berlins angegeben: die Breite des Tegeler Sees ist 1^{km} (auch die Strecke von der Dampfschiffstation bis hinüber zu den Berliner Wasserwerken). Der Wannsee ist 1^{km} breit und mit der Havel bis Neu-Kladow 4^{km} lang. Die Länge des Müggelsees (von West nach Ost) beträgt 4^{km}, die des Schwielow-Sees (südwestlich von Potsdam) $5^1/_2{}^{km}$.

wurde im nördlichen Stillen Ozean, 44° 55′ nördlicher Breite und 152° 26′ östlicher Länge von Greenwich, mit zuverlässigem Tieflot-Apparate 1874 vom Dampfer der Vereinigten Staaten „Tuscarora" aus gemessen.*)

141. Länge der Grade, Minuten und Sekunden größter Kugelkreise. 1) Wie lang ist 1 Grad auf der Erdoberfläche?

Antwort. 111^km^. Die Rechnung ergiebt 111,18^km^.**)
Die Länge des Kaspischen Sees ist demnach 1200^km^.

Bemerkung. 1000^km^ kürzesten Weges sind auf der Erdoberfläche ein Bogen von 9 Graden. (Genau genommen von 8° 59′ 39″.)

1000^km^ reichen vom Nord-Ende der Insel Rügen bis zum Nord-Ende des Adriatischen Meeres. Denn der Leuchtturm auf Kap Arkona hat 54° 40′ 54″ nördlicher Breite und Triest (Turm im Kastell) schon 45° 38′ 37″. Als Maß zum Schätzen der Entfernungen auf der Landkarte merke man:

Deutschlands Mittellinie von Norden nach Süden (durch Berlin) ist 1000^km^.***)

2) Wie weit muß man nach Norden oder Süden gehen, damit die Polhöhe sich um 1 Minute ändere?

Antwort. Nur 1853^m^ weit. Die Seefahrer nennen eine Bogenminute auf der Meeresfläche eine Meile.†)

Die Friedrichstraße in Berlin ist 3240^m^ lang. Sie hat die Richtung der Magnetnadel. An ihrem Nord-Ende ist mithin die Polhöhe (und die geographische Breite) schon um 1¾ Minuten größer, als an ihrem Süd-Ende. Zieht man durch den Fußpunkt der senkrechten Kante des ersten Hauses eine Parallele mit der auch lotrechten Kante des letzten Hauses, so bildet diese Parallele demnach mit der ersten Kante einen Winkel von 1¾ Minuten. Sind nun diese Häuser bis zum Dache 20^m^ hoch, so treten die Lotlinien des ersten und des letzten Hauses oben schon 1^cm^ auseinander. (Der Abstand zwischen der Parallele und der ersten Kante wird als

*) Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie. Herausgegeben von der Kaiserlichen Admiralität. Berlin. 7. Jahrgang, 1879. Seite 104.

**) Für Kopfrechnen, zum Abschätzen von Entfernungen auf der Erde, läßt sich, gemäß der im Jahre 1800 in Paris festgesetzten Größe des Meters, als des zehnmillionsten Teiles vom Viertel eines Erdmeridians, 1 Grad nehmen als $^1/_9$ von tausend Kilometern.

***) Millionmal ein Meter geradeaus abzutragen, erfordert eine Strecke von der Ostsee bis zum Adriatischen Meere. (Vergl. Note zu Nr. 133.)

†) Die Charlottenstraße in Berlin ist bis zur Sternwarte 1825^m^ lang. Sie giebt also eine Vorstellung von der Größe einer Meile (auf der See).

Kreisbogen vom Radius 20^{m} berechnet.) Wie die Lote, so sind auch die Berührungsebenen der Endpunkte gegen einander geneigt. Auf der am Nord-Ende kommt man, je 20 Meter weiter nach Norden, immer 1 Centimeter tiefer unter die Berührungsebene des Süd-Endes. Über der in solcher Weise stärker nach Norden sich senkenden Berührungsebene scheint die Sonne um die Zeit des längsten Tages schon 11 Sekunden lang, wenn sie für die Berührungsebene des Süd-Endes erst aufgeht. (Nr. 84, IV.)

3) Rückte ein Astronom sein Fernrohr um 3^{m}, also innerhalb desselben Zimmers, nach Norden oder Süden, fort, so würde er die Zehntelsekunden seiner Polhöhe ändern.

142. Abbiegen von einer Berührungsebene. Rundung der größten Kreise. In welcher Entfernung ist der Rand des Meeresspiegels, den man erblickt, wenn man unmittelbar am Ufer steht, so daß das Auge sich 2^{m} über dem nächsten Wasser befindet?

Antwort. Nur 5^{km} weit. Die Kleinheit der Entfernung wird dadurch bestätigt, daß man die weißen Kämme der Wellen auch in der Ferne deutlich sehen kann. 5^{km} reichen in Berlin vom Denkmal Friedrichs des Großen, auf der Charlottenburger Chaussee hin, bis zum Knie, dem Anfange der Berliner Straße in Charlottenburg; so daß also die Fußpunkte dieser Häuser unter dem Horizonte des am Denkmal stehenden Beobachters liegen. Ihm würde ein bei Charlottenburg fahrendes Boot noch nicht „auf der Höhe" erscheinen. (Nr. 107.) [Der Leser stelle solche Betrachtung an für die Umgebung seines Wohnortes.]

Das Ergebnis läßt sich auch so aussprechen: Von einer Berührungsebene der Erdkugel biegt sich ihre Oberfläche in der Weise ab, daß 5^{km} weit vom Berührungspunkte ringsherum der Meeresspiegel sich schon um 2^{m} gesenkt hat.

Zur Vervollständigung der Vorstellung die Angabe: Ringsherum

beträgt die Senkung	2^{cm}	8^{cm}	$\frac{1}{2}^{m}$	1^{m}	2^{m}	5^{m}
in der Entfernung	500^{m}	1^{km}	$2\frac{1}{2}^{km}$	$3\frac{1}{2}^{km}$	5^{km}	8^{km}.

Anmerkung. Würde man beim Nivellieren 500^{m} weit visieren, so läge der anvisierte Teilstrich der Nivellierlatte 2 Centimeter über der Niveaufläche des Fernrohrmittelpunktes. — Man muß also erheblich kleinere Abstände nehmen. Bei dem vorgeschriebenen Abstande von 100 Schritt (Nr. 137) = 80^{m} beträgt der Überschuß 0,5^{mm}. Man liest also stets $^{1}/_{10}$ der kleinsten Unterabteilung der Nivellierlatte zu hoch ab. Aus den in größerer Weite schnell wachsenden Überschüssen geht beim Fortnivellieren nur dann kein Fehler hervor, wenn man das Nivellierfernrohr hinter der

Latte in nahezu gleicher Entfernung aufstellt. — Seine erste und letzte Stellung muß recht nahe beim Anfangs- und beim Endpunkte der zu nivellierenden Strecke gewählt werden.

143. Biegung unserer Parallelkreise. Die Richtung von einem festen Punkte nach Ost oder West streicht über einem größten Kreise hin. Schreitet man aber in jedem Augenblicke ostwärts fort, so geht man, da man mit jedem Schritte auf einem andern Meridiane ist, auf einem Parallelkreise. Daß diese Wege schon nach wenigen Kilometern erheblich voneinander abweichen, wollen wir durch Rechnung nachweisen.

Hat man das horizontal liegende Fernrohr eines Theodoliten aus der Richtung der Mittagslinie um 90° auf dem Grundkreise herumgedreht, so giebt seine Visierlinie den Lauf der Tangente an, welche im Standorte den Parallelkreis berührt. Denkt man in der Visierrichtung in 1^{km}, 2^{km}, 3^{km} Entfernung Stangen senkrecht in die Erde gesteckt, so befinden sich dieselben in der Ebene, welche durch die Tangente und den Erdmittelpunkt geht. Es ist also ein größter Kreis, welchen die Richtung, vom Standpunkte genau nach Ost und nach West, verfolgt. Der Parallelkreis tritt von ihm nordwärts zurück (auf der südlichen Erdhalbkugel südwärts).

Die a Kilometer lange Tangente trifft die Stange in der Höhe y, welche, als äußeres Stück einer Sekante, ist $y = \frac{a^2}{2r + y}$. Das y im Nenner fällt für die Rechnung fort bei den von uns zu betrachtenden mäßigen Entfernungen. Die gerade Linie, welche vom oberen Endpunkte der Höhe y nach dem Mittelpunkte des Parallelkreises läuft, bildet mit y einen Winkel, gleich der geographischen Breite φ, und dringt in den Erdboden in dem Abstande x vom Fußpunkte der Höhe y. Es ist also $x = y \operatorname{tg} \varphi$ zu berechnen aus

$$x = \frac{a^2}{2r} \operatorname{tg} \varphi.$$

Für $a = 1^{km}$ wird bei $\varphi = 51^0 52' 18''$ x_1 genau 1 Decimeter. Da das Quadrat von a als Faktor in der Formel steht, so kommen für x bei 2^{km}, 3^{km}... die Quadratzahlen 4, 9, 16, 25..., welche Decimeter bedeuten. Der Parallelkreis tritt also in recht merklicher Weise von der festgelegten West-Ost-Richtung zurück. Schon nach 100 Metern ist die Abweichung 1^{mm}.*)

*) In Berlin läuft der mitten durch das Denkmal Friedrichs des Großen gehende Parallelkreis von dem geradeaus gehenden größten Kreise am Ende der Straße „Unter den Linden" (1^{km}) 1 Decimeter breit rechts ab, beim „großen Stern" (3^{km}) schon 1 Meter, und mehr als $2^1/_2$ Meter am Knie, dem Ende der Charlottenburger Chaussee (5^{km} weit).

Bei $\varphi = 54^0 29' 26''$ kommt für $a = 1^{km}$ zu jenem x_1 1^{cm} hinzu, und bei $\varphi = 56^0 48' 44''$ wieder 1^{cm}. Also braucht man nur die Quadratzahlen als Centimeter jenen Decimetern hinzuzufügen. Verfolgt man die südlich von dem zuerst betrachteten Parallelkreise liegenden, so tritt, weiter südlich, als vorher nördlich, bei dem von $\varphi = 48^0 54' 29''$ Verminderung um 1^{cm} ein, und erst bei $\varphi = 45^0 32' 45''$ noch um 1^{cm}. Die Unterschiede in der Biegung dieser Parallelkreise schreiten also bei den ersten ganzen Kilometern fort nach den Quadratzahlen als Centimeter.

Demnach gewinnt man eine Anschauung von der Krümmung der Parallelkreise im mittleren Europa durch folgende Übersicht:

Geogr. Breite	Differenz	Parallelkreis	Abweichung des Parallelkreises von einer vom Anfangspunkte geradeaus gehenden Linie in der Entfernung 1km	2km	3km	4km	5km	... 10km	20km
56,8°		Dundee-Riga	12cm	48cm	108cm	1,92m	3m	.... 12m	48m
	2,3°								
54,5		Belfast-Danzig	11	44	99	1,76	2,75	 11	44
	2,6								
51,9		Oxford-Wittenberg	**10cm**	**40cm**	**90cm**	**1,60m**	**2,50m**	.... **10m**	**40m**
	3,0								
48,9		Paris-Regensburg	9	36	81	1,44	2,25	 9	36
	3,4								
45,5		Lyon-Triest	8	32	72	1,28	2	 8	32

144. Tiefenwinkel von der Höhe h aus. Irdische Strahlenbrechung. Ein Beobachter habe seine Augen h Meter über dem Meeresspiegel. Die gerade Linie, welche vom Auge als eine Tangente an die Erdkugel läuft, senkt sich unter die durch das Auge wagerecht nach derselben Himmelsgegend gehende gerade Linie. Der von beiden Geraden am Auge gebildete Tiefenwinkel α ist (wie aus einer Durchschnittsfigur sofort ersichtlich wird) gleich dem Centriwinkel γ auf dem von der Tangente überstrichenen Bogen. Je 1853 Meter des Bogens liefern eine Bogenminute. (Nr. 141, 2.) Die Länge des Bogens ist aus $\sqrt{2rh}$ zu berechnen, da die Tangente $\sqrt{(2r+h)h}$ kaum länger ist, und man hat, weil der überraschend geringe Unterschied zwischen Tangente und Bogen*) auf das Ergebnis der Division durch 1853

*) Bei genauer Berechnung hat auf der Erdkugel ein Bogen von 14 Minuten die Länge

$$s = 14 \cdot \frac{\pi}{10800} r = 25942{,}47^m$$

und die zugehörige Tangente

$$t = r \tang 14' \quad = 25942{,}62^m.$$

Das giebt $t - s = 0{,}15^m$. Also bei einem Bogen von 14 Minuten (der fast 26^{km} lang ist, wie die Eisenbahn von Berlin bis Potsdam) ist die Tangente nur 15^{cm} länger. Hierzu gehört die Höhe $h = 52{,}825^m$. Aber auch bei einer Seehöhe, wie die der Schneekoppe, $h = 1604^m$, giebt der Überschuß der Länge

ohne Einfluß bleibt,

$$\gamma = \frac{\sqrt{2rh}}{1853} \text{ Bogenminuten.}$$

Allein wegen der irdischen Strahlenbrechung in der mit zunehmender Höhe dünner werdenden Luft beschreibt der vom Berührungspunkte der Tangente zum Auge gehende Lichtstrahl über der Tangente einen sehr flachen Bogen. (Vergl. Figur 46 in Nr. 108.) Er nimmt vom Tiefenwinkel α unten den kleinen Winkel der irdischen Strahlenbrechung, ϱ, fort. Den Winkel ϱ hat man bei trigonometrischen Nivellements berechnet.

Es sei Z das Zenit der h^m hoch gelegenen Station A, von welcher aus man nach der Station B, deren Seehöhe $h_1{}^m$ beträgt, visiert. Die mit einem Heliotropen von B nach A geworfenen Lichtstrahlen geben in A für B die scheinbare Zenitdistanz z, während die wahre Zenitdistanz $ZAB = z + \varrho$ ist. Gleichzeitig erhält der Beobachter in B von A den Winkel z_1 statt $Z_1BA = z_1 + \varrho_1$. Die Vertikallinien ZA und Z_1B geben, abwärts verlängert, am Erdmittelpunkte den Winkel $ACB = \gamma$, dessen Bogen s zwischen den Höhenfußpunkten von A und B aus der Triangulation bekannt ist. Aus der Winkelsumme des Dreiecks ABC

$$180^0 = \gamma + 180^0 - (z + \varrho) + 180^0 - (z_1 + \varrho_1)$$

hat man

$$\varrho + \varrho_1 = \gamma - (z + z_1 - 180^0).$$

Diese Gleichung wurde durch γ dividiert, und es zeigte sich in jedem Falle, daß, mochte γ klein oder groß sein, die rechte Seite immer eine Zahl k ergab, die nur durch den wechselnden Zustand der Luft geringe Änderungen erfährt. Man erhielt den Koefficienten der Strahlenbrechung k in der Nähe der See 0,1292 und im Inlande $k_1 = 0{,}1175$.*) Aus $(\varrho + \varrho_1) : \gamma = k$ kennt man

$$\varrho + \varrho_1 = k\gamma.$$

Sind die Seehöhen h und h_1 der Stationen A und B wenig

---

der Tangente für die Division durch 1853 so gut wie nichts. Denn $t = 142962{,}8^m$ liefert, durch $\operatorname{tg}\gamma = \frac{t}{r}$, $\gamma = 1^0\,17'\,8{,}26''$ und den Bogen $s = 142938{,}8^m$; und die 24^m längere Tangente gäbe bei der Division durch 1853 nur 0,78″ zu viel. Die 24^m kommen zum Bogen selber hinzu, wenn man die Höhe der Schneekoppe um 54 Centimeter größer ansetzt. Die Unsicherheit in der Angabe der Berghöhen ist aber weit beträchtlicher, als $1/_2{}^m$. Man hat also nach obiger Angabe zu rechnen. (Die Seehöhe der Schneekoppe ist 1604^m nach S. 32 in: Baeyer, Astronomische Bestimmungen für die europäische Gradmessung. Leipzig, 1873.)

*) Seite 134 in: Nivellements und Höhenbestimmungen der Punkte erster und zweiter Ordnung. Ausgeführt vom Bureau der Landestriangulation. I. Band. Berlin 1870. Im Selbstverlage.

voneinander verschieden, so wird ϱ_1 nahe gleich ϱ sein, und man kann um so weniger Bedenken tragen, unvollkommen genau

$$\varrho = \tfrac{1}{2} k \gamma$$

zu rechnen, als der Wert von k im Laufe des Tages nicht unerheblich schwankt. (Vergl. Nr. 136.)

Hiernach haben wir für unsere Bestimmung des Tiefenwinkels i, unter welchem von der Höhe h aus der Horizont erscheint,

$$i = \alpha - \varrho = \gamma - \tfrac{1}{2} k \gamma = (1 - \tfrac{1}{2} k) \gamma$$

und, wenn wir obigen in Sekunden verwandelten Ausdruck für γ einsetzen,

$$i = \frac{(1 - \frac{1}{2} k) \cdot 60 \sqrt{2rh}}{1853},$$

dies giebt, mit $k = 0{,}1292$ ausgerechnet,

$$i = 108 \sqrt{h} \text{ Bogensekunden.*)}$$

145. Scheinbarer und wahrer Horizont. Kimmtiefe. In der durch diese einfache Formel ausgedrückten Weise hängt der Tiefenwinkel, unter welchem der Horizont erscheint, von der Standhöhe h des Beobachters ab. Von den an demselben Orte in ungleichen Höhen stehenden Beobachtern hat also jeder seinen scheinbaren Horizont mit der Zenitdistanz $90^0 + i$, während dem wahren Horizonte 90^0 Zenitdistanz zukommt. Hat jeder von ihnen (wie der Seemann es thun muß) mit einem Sextanten von seinem Horizonte aus die scheinbare Höhe desselben Sternes gemessen, so muß jeder seinen Winkel i von der abgelesenen Sternhöhe abziehen, um die wahre Höhe des Sternes zu finden. Dann erhalten alle dieselbe Sternhöhe, wie sie ein im Mittelpunkte der Erde gedachter Beobachter sehen würde. Folglich ist als der wahre Horizont eines Ortes derjenige Durchschnittskreis der Himmelskugel zu nehmen, welchen die im Erdmittelpunkte auf der Vertikallinie des Ortes rechtwinklige Ebene liefert. (Hierdurch ist nun die vorläufige Angabe in Nr. 2 genauer bestimmt.)

Der Seemann nennt den Horizont die Kimm (aus der holländischen Sprache); der Tiefenwinkel der Kimm heißt die Kimmtiefe.

Obige Formel i giebt

für die Höhe h =	2^m	4^m	5^m	8^m	11^m	15^m	20^m	25^m
die Kimmtiefe i =	2′ 33″	3′ 36″	4′	5′	6′	7′	8′	9′.

*) Es kommt $i = 108{,}11 \sqrt{h}$ und mit $k_1 = 0{,}1175$ $i_1 = 108{,}78 \sqrt{h}$, so daß abzurunden ist, wie oben geschah.

Ein Beobachter, dessen Augen nur 20^m über dem Meeresspiegel sich befinden, sieht den scheinbaren Horizont schon um den vierten Teil des scheinbaren Sonnendurchmessers unter dem wahren Horizonte. Das Hinabrücken des scheinbaren Horizontes kommt für den Gipfel des Brockens, $h = 1143^m$, auf 1^0 und für die Schneekoppe, $h = 1600^m$, auf $1^0 12'$. — Obige Reihe zeigt, daß die Kimmtiefe sich am schnellsten ändert bei geringer Augenhöhe. Wegen der daraus hervorgehenden Unzuverlässigkeit empfiehlt es sich, bei Messung von Gestirnhöhen über dem Meereshorizont (Nr. 68 Note) einen hohen Standpunkt auf dem Seeschiffe (6 bis 9^m) zu wählen.

146. Sonnenaufgang auf einem Berge. Den auf einem Bergesgipfel stehenden Reisenden geht die Sonne mehrere Minuten später unter und früher auf, als den Leuten unten in der Ebene. Bei der Berechnung der Zeit des Sonnen-Auf- oder Unterganges für den Bergesgipfel mit der Seehöhe h^m ist der Zenitabstand des Sonnenmittelpunktes (Nr. 84) nicht $90^0 + \beta$, sondern als $90^0 + i + \beta$ anzusetzen, wo β die astronomische Strahlenbrechung bedeutet für den Weg des vom Sonnenmittelpunkte ankommenden Strahles bis zu dem an der scheinbaren Grenze der Erdoberfläche sichtbaren Berührungspunkte.

Beispiele. 1) Die Kreidewand Stubbenkammer auf der Insel Rügen ist $128{,}4^m$ hoch.*) Wieviel Zeit sieht ein oben stehender Beobachter, dessen Augen $h = 130^m$ über der Ostsee sind, die Sonne früher über dem Meere aufgehen, als ein anderer unten an der Küste, dessen Augen 2^m über dem Wasser sich befinden? und zwar a) am 24. Juni und b) am 1. Dezember. Die geographische Breite ist $\varphi = 54^0 34' 30''$. Die Deklination der Sonne für die Aufgangszeit ist in Nr. 84 ermittelt.

2) Dieselbe Frage für den $h = 3320^m$ hohen Gipfel des Ätna und einen in derselben geographischen Breite $\varphi = 37^0 42'$ an der Küste stehenden Beobachter.

Antwort. Die Zeit des Sonnenaufganges (angegeben in mittlerer Zeit) ist nach der genauen Rechnung (Nr. 84)**)

*) v. Klöden, Handbuch der Erdkunde, II (3. Auflage) S. 318.

**) Bei der abgekürzten Rechnung (Nr. 84, Ergebnis V) findet man die Aufgangszeit zu spät um folgende Anzahl von Sekunden:

		am 24. Juni	am 1. Dezember
1) Stubbenkammer,	oben	$4{,}60^s$	$3{,}58^s$
	unten	4,58	3,54
2) Ätna,	oben	$4{,}00^s$	$4{,}66^s$
	unten	3,91	4,52

Vergl. Spalte 12 der Tabelle in Nr. 84 nach der geographischen Breite mit Beachtung der Seehöhe.

		a) am 24. Juni	b) am 1. Dezember
1) Stubbenkammer,	oben	$3^h 22^m 47,1^s (47,1^s)$	$7^h 57^m 45,6^s (45,5^s)$
	unten	3 25 42,0 (42,2)	8 0 24,1 (23,9)
	oben früher	$2^m 55,0^s (55,1^s)$	$2^m 38,5^s (38,4^s)$.
2) Ätna,	oben	$4^h 29^m 55,6^s (55,9^s)$	$6^h 47^m 56,9^s (56,9^s)$
	unten	4 39 55,7 (56,4)	6 57 29,9 (29,7)
	oben früher	$10^m\ 0,1^s (0,5^s)$	$9^m 33,0^s (32,8^s)$.

Anmerkung. Aussichtsweite von Bergen. Dem Beobachter in A auf einem h Meter hohen Berge werden, durch den schwach gekrümmten Lauf der Lichtstrahlen über die Tangente BA hinweg, noch Gegenstände hinter dem Berührungspunkte B sichtbar, die ein wenig unter seinem Horizonte liegen. Der äußerste sichtbar werdende Punkt D der Erdoberfläche ist derjenige, dessen Tangente mit der Sekante AD einen Winkel einschließt, der gleich dem Winkel ϱ der irdischen Strahlenbrechung wird. Der Centriwinkel BCD ist als das x fache des Winkels $ACB = \gamma$ zu bestimmen. Aus dem Dreieck ACD liefert der Sinussatz

$$\frac{r}{r+h} = \frac{\sin(\gamma + x\gamma + 90^0 - \varrho)}{\cos\varrho}.$$

Der links stehende Bruch bedeutet $\cos\gamma$ und der Nenner $\cos\varrho$ ist $= 1$ zu nehmen, und man hat

$$\cos\gamma = \cos(\gamma + x\gamma - \varrho),$$

woraus

$$x\gamma = \varrho = \tfrac{1}{2}k\gamma$$

also

$$x = \tfrac{1}{2}k$$

hervorgeht. Die Verschiedenheit der oben angegebenen Werte von k, 0,1292 und 0,1175, nötigt abzurunden

$$x = 0,06.$$

Demnach bewirkt die irdische Strahlenbrechung, daß man von einem Berge aus um 0,06 des eigentlich nur zu überblickenden Bogens, also um 6 Prozent weiter sieht. Da nun die Länge des Bogens, wie oben gezeigt wurde, aus $\sqrt{2rh}$ zu berechnen ist, so hat man die Aussichtsweite

$$w = 1,06\sqrt{2rh}.$$

Nach dieser kurzen Formel ist immer zu rechnen, auch bei sehr hohen Bergen. Denn die Unsicherheit in der Größe von h, welche aus den Angaben verschiedener Beobachter für denselben Berg hervorgeht, ergiebt bei der nicht so einfachen strengen Rechnung viel

bedeutendere Abweichungen von dem wahrscheinlichsten Werte, als die Näherungsformel w.*)

	Höhe	Aussichtsweite in Kilometern	Aussichtsweite in Bogenminuten
1. Stubbenkammer	128^m	43^{km}	23′
2. Brocken	1143	128	69
3. Schneekoppe	1604	152	82
4. Ätna	3320	218	118
5. Montblanc	4810	262	142.

Um eine Vorstellung von der Größe dieser Aussichtsweiten zu gewinnen, messe man im Atlas (auf Karten in gleichem Maßstabe) von jedem der 5 Berge aus die Entfernung ringsherum mit dem Zirkel ab. Am besten dazu sind die Karten im Maßstabe 1 : 1853000; denn da wird (nach Nr. 141, 2) jede Bogenminute 1^{mm} (und $\frac{1}{2}^{mm}$ bei denen von 1 : 3700000.)

§ 12. Größe und Lage kürzester Linien auf der Erdkugel.

147. Bogen Köln-Königsberg. Wieviel Kilometer beträgt die Entfernung vom Kölner Dom bis zum Königlichen Schlosse in Königsberg? Der Dachreiter des Domes, senkrecht über dem Mittelpunkte des Kirchenschiffes, hat die geographische Breite $\varphi = 50^0\,56'\,33{,}34''$ und ist in Zeit $25^m\,45{,}055^s$ westlich vom Kuppelcentrum der Berliner Sternwarte.**) Die Königsberger Sternwarte (und

*) Obige Angabe der Höhe des Ätna, 3320^m, ist das arithmetische Mittel aus 4 Höhenangaben: 3304^m (Stielers Atlas), 3315^m (v. Klöden, Erdkunde), 3322^m (Brockhaus, Konversations-Lexikon) und 3339^m (Seydlitz, Schul-Geographie). Bei der genauen Rechnung mit $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{(2r+h)h}}{r}$ liefert die um 16^m geringere erste Höhe die Weite 526^m kleiner, die um 19^m höhere letzte 622^m größer, als die bei 3320^m kommende Weite $217{,}955^{km}$, über welche die Rechnung nach der Näherungsformel w nur um 51^m hinausgeht. (S. die erste Note zu Nr. 144.)

**) Die Angaben sind entnommen den Arbeiten des Berliner geodätischen Instituts aus den Jahren 1871 bis 1876. Die Projektion der Spitze des Dachreiters auf dem Kölner Dome ist ein trigonometrischer Punkt. Die Längendifferenz zwischen diesem Punkte und dem Centrum der Berliner Sternwarte setzt sich zusammen aus

Köln (T. P.) westlich von Bonn (Sternwarte)	$33{,}514^s$ (in Zeit),
Bonn westlich von Mannheim (Sternwarte)	$5^m\,27{,}170^s$
Mannheim westlich von Leipzig (Sternwarte)	$15^m\,43{,}481^s$
und Leipzig westlich von Berlin (Sternwarte)	$4^m\,0{,}890^s$
folglich Köln (T. P.) westlich von Berlin (Kuppelcentrum der Sternwarte)	$25^m\,45{,}055^s$ in Zeit.

zwar ihr Repsoldscher Meridiankreis) befindet sich in $\varphi_1 = 54^\circ 42' 50{,}6''$ nördlicher Breite, in Zeit $28^m 24{,}21^s$ östlich vom Centrum der Berliner Sternwarte*), und (in einer ebenen Figur abgesondert zu zeichnen) $1{,}043^{km}$ vom Turme des Königsberger Schlosses in etwa westnordwestlicher Richtung, so, daß der Winkel Sternwarte-Schloßturm-West $19^\circ 7' 35''$ beträgt.**) Nachdem man die Richtung, in welcher der Bogen von Köln zur Königsberger Sternwarte kommt, berechnet hat, werde auf die gerade Linie, welche durch die Projektion der Schloßturmspitze mit jener Richtung parallel zu ziehen ist, der nur $1{,}043^{km}$ betragende Abstand der Sternwarte projiziert. Die Projektion wird zu dem vorher gefundenen Bogen addiert, um die gesuchte Entfernung Köln-Königsberg zu erhalten.

Auflösung I. Für das sphärische Dreieck PDS (Pol-Dom-Sternwarte) liefern die Neperschen Analogien

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(S + D) = \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}P \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi)}$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(S - D) = \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}P \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi)}$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}x = \mathrm{cotg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi) \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(S + D)}{\cos\frac{1}{2}(S - D)}$$

dann wird

$$DS = x'' \sin 1'' \cdot r.$$

$$\angle S = 109^\circ 14' 26{,}567'' \quad (109^\circ 14' 27{,}53'')$$
$$\angle D = 59^\circ 56' 49{,}875'' \quad (59^\circ 56' 49{,}35'')$$
$$DS = 999{,}340^{km} \quad (999{,}333^{km})$$

dazu die Projektion

$$p = 0{,}818^{km},$$

giebt die Entfernung

$$y = 1000{,}158^{km} \quad (1000{,}151^{km})$$

Auflösung II. (Bei den hier in die Rechnung tretenden Zahlen werden die Ergebnisse weniger genau, als in Auflösung I.)

Durch den Hilfswinkel w aus

$$\mathrm{tg}\, w = \mathrm{cotg}\,\varphi_1 \cos P$$

(den kleineren Winkel φ statt φ_1 zu nehmen, würde für die Zahlen-

*) Seite 81 des Generalberichtes über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1865. Berlin, G. Reimer, 1866.

**) Nach Bessels Messungen in „Gradmessung in Ostpreußen“ (Berlin, 1838, Ferd. Dümmlers Buchhdlg.) Seite 213.

werte ungünstig sein) liefert der Kosinussatz

$$\cos x = \sin \varphi_1 \cdot \frac{\sin (\varphi + w)}{\cos w}$$

$$DS = x'' \sin 1'' \cdot r;$$

dazu kommt

$$\sin S = \frac{\sin P}{\sin x} \cos \varphi \qquad \text{und} \qquad \sin D = \frac{\sin P}{\sin x} \cos \varphi_1,$$

wo bei der Bestimmung der Winkel darauf zu achten ist, daß die Summe der Dreieckswinkel größer als 180° werden muß.

$$DS = 999{,}342^{km} *) \qquad (999{,}707^{km})*)$$
$$\angle S = 109^0\ 14'\ 27{,}67'' \qquad (109^0\ 17'\ 52{,}5'')$$
$$\angle D = 59^0\ 56'\ 49{,}18'' \qquad (59^0\ 54'\ 39{,}0'')$$

Nach Hinzulegen der Projektion

$$p = 0{,}818^{km}$$

hat man die Entfernung

$$y = 1000{,}160^{km} \qquad (1000{,}525^{km}).$$

Ergebnis. Vom Mittelpunkte des Kölner Domes anfangend, schließt der kürzeste Weg nach Königsberg sein tausendstes Kilometer ab mitten in der Stadt, kurz vor dem Schloßturme.

Für das Schätzen der Entfernungen beim Anblick der Karte von Deutschland oder von Europa merke man außer der von Norden nach Süden gehenden Mittellinie Deutschlands (Nr. 142) die quer gegen sie gelegene Entfernung

Köln-Königsberg 1000^{km}.

148. Erdumfang. Erst nachdem hierdurch die Vorstellung von einem größeren Längenmaße, Tausend Kilometer, gewonnen ist, geben wir von einem größten Kreise der Erdkugel die Länge des Umfanges an, nämlich

Erdumfang = **40** Tausend Kilometer.

Die Rechnung ergiebt

$$2\pi r = 40025{,}53^{km} \quad (40025{,}3^{km}).$$

149. Wie lang ist der kürzeste Weg für die englischen **transatlantischen Telegraphenkabel,** welche die Insel Valentia bei Ir-

*) Wenn der Hilfswinkel durch φ bestimmt wird, kommt

$$DS = 999{,}338^{km} \qquad (999{,}810^{km})$$
$$\angle S = 109^0\ 14'\ 25{,}48'' \qquad (109^0\ 18'\ 52{,}5'')$$
$$\angle D = 59^0\ 56'\ 50{,}49'' \qquad (59^0\ 54'\ 9{,}0'').$$

land mit Neu-Fundland verbinden? Die Endpunkte, Foilhommerum auf Valentia, 51° 55′ nördlicher Breite, und Hearts Content (ein Teil der Trinity-Bai) auf Neu-Fundland, 47° 42′ nördlicher Breite, haben eine Längendifferenz von 42° 59′ 8,1″.*)

Es ergiebt die aus dem Kosinussatz hervorgehende Rechnung (die genauer ausfällt, wenn man bei Bestimmung des Hilfswinkels die größere geographische Breite nimmt)

3073,561^{km} (3073,56^{km})

und die aus den Neperschen Analogien

3073,562^{km} (3073,57^{km}).

Letztere liefert den Winkel

bei Valentia $V = 81^\circ 29' \ 9{,}68''$ (9,2″)
und den bei Neu-Fundland $N = 65^\circ \ 0' \ 38{,}52''$ (38,8″).

Es beträgt die Kabellänge a) bei dem 1865 und 1866 gelegten 3512,52^{km}, b) bei dem zuerst vollendeten vom Jahre 1866 3428,89^{km}, c) bei dem vom Jahre 1873 3483,91^{km} und d) bei dem vom Jahre 1874 3407,43^{km}.**) Die beim Legen entstandenen

---

*) Ihr Zeitunterschied wurde von Gould im Jahre 1866 telegraphisch bestimmt $2^h \, 51^m \, 56{,}54^s$ und der zwischen Foilhommerum und Greenwich $0^h \, 41^m \, 33{,}29^s$.

Nach den verunglückten Versuchen in den Jahren 1856 und 1857 legte man 1865 ein starkes Kabel. Als auf einer Strecke von 1940^{km} bereits 2220^{km} Kabel abgewickelt waren, riß es und versank in die Tiefe. Mittels Schlepp-Anker gehoben, brach es wiederholt ab, und man mußte nach vierzehntägigem Abmühen das Unternehmen für dieses Jahr aufgeben. Die Legung eines neuen Kabels gelang vom 13. bis 27. Juli 1866. Darauf fuhr das Schiff von Neu-Fundland zurück, und man suchte nach der Notiz über die Unglücksstelle (51° 35′ nördlicher Breite und 37° 52′ westlicher Länge von Greenwich) jenes Ende wieder auf. Nachdem es beim Heben mehrmals wieder gerissen war, hatte man mit Verlust von 150^{km} es endlich auf dem Deck des Riesenschiffes, verband das Kabel mit dem noch übrigen Vorrate und führte die Legung vom 2. bis 9. September 1866 glücklich zu Ende bis Neu-Fundland, dessen telegraphische Verbindung mit dem Festlande bereits hergestellt war.

**) Die Kabellängen sind mit 1 engl. Seemeile = 1,851852^{km} übertragen aus den amtlichen Angaben im Journal télégraphique, publié par le Bureau international des administrations télégraphiques. III, Nr. 29. Berne, 25. Mai 1877. Neben der tabellarischen Zusammenstellung steht die Bemerkung bei Kabel a von 1865—66: „Seit 3 Jahren unterbrochen", und bei b vom Jahre 1866: „Gegenwärtig unterbrochen." Diese beiden fehlen in dem amtlichen Verzeichnisse vom Mai 1887; sie sind also unbrauchbar geworden. Nomenclature des cables formant le réseau sous-marin du Globe, dressée d'après des documents officiels par le Bureau international des administrations télégraphiques. 3e édition: Mai 1887. Berne, 1887. (32 Quartseiten.) Diese Zusammenstellung giebt zwischen Europa und Amerika zehn Kabel in Betrieb an: die obigen c) und d) von 1873 und 1874, 3) vom Jahre 1880 auch von Valentia nach Hearts-Content, 3493,20^{km} lang; dann 2 von Frankreich aus, von Minou bei Brest über die Insel St. Pierre, südlich von Neu-Fundland, nach Duxbury bei Massachusetts, nämlich 4) vom Jahre 1869, 4904,57^{km} (bis

Abweichungen vom Laufe der kürzesten Linie und besonders die aus dem nicht zu straffen Abwickeln hervorgegangenen Krümmungen des Kabels vergrößern die Länge über die berechnete Entfernung weit mehr, als Wechsel in der Meerestiefe. (Kosinus des Neigungswinkels.) Die größte Tiefe ist 4433^{m}. Man hat also beim ersten Legen über 14 Prozent, beim letzten noch fast 11 Prozent Zuschuß verbraucht.

150. Lauf eines kürzesten Weges von Ost nach West. Der kürzeste Weg von Lissabon nach New-York wendet sich über die Erdkugelwölbung in nördlicher Richtungsabweichung bis zu welchem Parallelkreise und berührt diesen auf welchem Meridiane? Die nördliche Breite von New-York ist $\varphi_1 = 40^{\circ} 42' 40''$, die von Lissabon $\varphi = 38^{\circ} 42' 24''$; New-York liegt $74^{\circ} 1' 6''$ und Lissabon $9^{\circ} 8' 28''$ westlicher Länge (von Greenwich).

Auflösung. Nachdem in dem Dreiecke LNP (Lissabon, New-York, Pol) der Winkel L gefunden ist, hat man die geographische Breite b des nördlichsten Punktes H der Grundlinie aus

$$\cos b = \cos \varphi \sin L$$

und die Zahl z seiner Längengrade, die zu der Länge von Lissabon zu addieren sind, aus

$$\operatorname{cotg} z = \sin \varphi \operatorname{tg} L.$$

Es ergiebt sich $\angle L = 65^{\circ} 50' 53{,}94''$ (53,6''). Man muß also anfangs $1^{\circ} 39'$ nördlich bei WNW steuern, diese Abweichung allmählich vermindern und erst dann eine Zeitlang rein westlich

---

1887 das längste aller Seekabel) und 5) von 1879, 4152,54^{km} lang; dann 6) von Ballinskellig Bay (im SW. Irlands) nach Tor Bay (Neu-Schottland) 1874—75, 4487^{km}, und von dort nach Rye Beach (New-Hampshire in den Vereinigten Staaten) 1037^{km}; ferner 2 von Sennen Cove bei Penzance (im SW. Englands) nach Dover Bay bei Canzo (Neu-Schottland), nämlich 7) vom Jahre 1881, 4687^{km}, und 8) von 1882, 4770^{km}; endlich 9) und 10) 2 Handelskabel (Sitz der Verwaltung in Paris) von Waterville (Irland) nach New-York, beide 1884 gelegt, 4352,52^{km} und 4422,87^{km} lang.

Das älteste aller durch das Meer gehenden Kabel ist das im Jahre 1851 von Calais nach Dover gelegte, von 46^{km} Länge. Bis 1865 stieg die Summe aller Kabellängen auf 2700^{km}, das sind $^3/_4$ der Länge des ersten transatlantischen Kabels. Mit dem Legen der Kabel von Europa nach Amerika im Jahre 1866 beginnt die staunenswert großartige Ausbreitung des Telegraphennetzes in den 20 Jahren bis 1886. In zweien von diesen Jahren kamen so viele und so große Kabel hinzu, daß ihre Summe den halben Erdumfang übertraf, nämlich 1870 22321^{km} und 1884 25265^{km}, und in zwei andern wurde der halbe Erdumfang fast erreicht: 1874 19076^{km} und 1879 19568^{km}. Nach dem amtlichen Verzeichnis beträgt von den 950 Seekabeln der Erde, welche im Mai 1887 in Betrieb waren (also ohne die Land-Leitungen) die Gesamtlänge 208654 Kilometer, und diese Länge ist so groß, daß sie fünfmal rings um die Erde gehen würde.

fahren, wenn man fast sechs Grad nördlicher als Lissabon sich befindet, nämlich bei dem Parallelkreise von

$$b = 44^{0}\,35'\,53{,}13''\ (57{,}5'')\ \text{nördlicher Breite},$$

also nicht ganz bis zu dem Parallel von Bordeaux.

Es darf aber jener Parallelkreis erst erreicht werden, wenn mehr als die Hälfte der zu befahrenden Grade der Länge zurückgelegt sind, nämlich

$$z = 35^{0}\,38'\,34{,}71''\ (35{,}8'')$$

also erst bei $44^{0}\,47'\,2{,}71''$ (3,8″) westlicher Länge (von Greenwich) oder $-\,2^{h}\,59^{m}\,8^{s}$ in Zeit. Dieser kürzeste Weg ist 5423^{km}.

Der kürzeste Weg LHN schneidet irgend einen Meridian in M. Die geographische Breite von M und den Durchschnittswinkel bei M, welcher die Kursrichtung bestimmt, findet der Seemann aus dem rechtwinkligen Dreiecke PHM durch die berechnete Höhe PH und den Winkel HPM, welcher die gewählte Längendifferenz d ist, mittels

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg} b \cos d \qquad \text{und} \qquad \cos M = \sin b \sin d.$$

Anmerkung. Der Leser lege auf die alle Erdteile in Mercators Projektion darstellende Karte seines Atlas ein Lineal von Lissabon nach New-York, um ein Urteil darüber zu gewinnen, wie weit das in Nr. 122 mitgeteilte Verfahren, wenn ein Seemann es blindlings befolgt, bei großen Reisen von Ost nach West ihn vom kürzesten Wege abführt.

151. Dieselben Fragen für den kürzesten Weg von **San Franzisko** nach **Tokio** (früher Yedo). Das Fort von San Franzisko hat $\varphi_1 = 37^{0}\,48'\,30''$ nördlicher Breite und $122^{0}\,28'\,26''$ westlicher Länge und das Kap King (Awa) vor dem Hafen von Tokio $\varphi = 34^{0}\,45'$ nördlicher Breite und $140^{0}\,23'$ östlicher Länge (von Greenwich).

Ergebnis. Bei dieser bedeutend größeren Längendifferenz von 97 Graden wendet sich der kürzeste Weg, wiewohl Anfangs- und Endpunkt südlicher liegen, noch weiter nach Norden, nämlich bis zu

$$b = 48^{0}\,1'\,56{,}59''\ (53{,}1'')\ \text{nördlicher Breite}$$

und trifft diesen Parallelkreis auf dem Meridiane

$$168^{0}\,13'\,11{,}42''\ (9{,}7'')\ \text{westlicher Länge (von Greenwich)},$$

so daß der Weg in kaum 5^{0} Entfernung an den Alëutischen Inseln hinzieht und zum Kap King fast aus Nordost (mit nur $9\frac{1}{2}^{0}$ östlicher Abweichung) ankommt. Seine Größe beträgt $8\,273{,}375^{km}$ ($8\,273{,}32^{km}$).

§ 13. Entfernung und Größe des Mondes.

152. Abstände des Mondes vom Erdmittelpunkte. (Figur 62.) Am 23. Februar 1752 beobachtete*) Lalande in Berlin bei der Kulmination des Mondes die Deklination des unteren Randes $\delta = + 20^\circ 26' 25{,}2''$ und Lacaille am Kap der guten Hoffnung die Deklination des für ihn oberen Randes (also desselben Randes) $\delta_1 = 21^\circ 46' 44{,}8''$. Die geographische Breite des alten Observatoriums von Berlin ist $\varphi = 52^\circ 31' 13''$ und die der Sternwarte am Kap der guten Hoffnung $\varphi_1 = 33^\circ 56' 3''$ südlich. Der Längenunterschied der Beobachtungsorte ist so gering, daß beide, als auf demselben Meridiane liegend, genommen werden können; so daß alle Linien der Figur in einer Ebene sich befinden. Da nun die Meridian-Zenitdistanz für Berlin $z = \varphi - \delta$, dagegen für das Kap $z_1 = \varphi_1 + \delta_1$ ist, so läßt sich hieraus der Abstand der visierten Stelle des Mondrandes vom Mittelpunkte der Erde (ausgedrückt in Erdradien) berechnen. — Zu dieser Entfernung des Mondes gehört der scheinbare Halbmesser $\varrho = 16' 8{,}4''$; der kleinste ist $\varrho_1 = 14' 43{,}87''$ und der größte $\varrho_2 = 16' 26{,}57''$. Hierdurch erhält man aus dem Ergebnisse der Messung auch die größte und die kleinste Entfernung des Mondes und aus beiden den mittleren Abstand des Mondes vom Erdmittelpunkte.

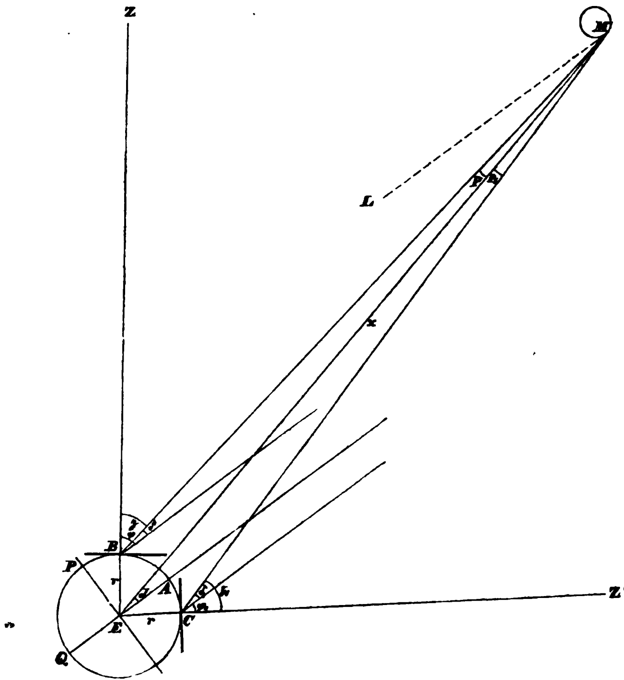
Auflösung. Besser als die Entwicklung, bei welcher man zunächst die Sehne BC berechnet, ist folgende. Das Verhältnis x : r, auf zwei Weisen ausgedrückt, giebt eine Proportion zwischen vier Sinus, aus welcher man zur Bestimmung der Winkel $CME = p_1$ und $BME = p$ durch Subtrahieren und Addieren ableitet

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(p_1 - p) = \mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{2}(z_1 + z)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(z_1 - z)\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}(p_1 + p).$$

Da in vorliegendem Falle $\tfrac{1}{2}(p_1 - p) < \tfrac{1}{2}^\circ$ wird, muß man statt dieser Tangente den Bogen nehmen. Ferner ist $p_1 + p = \delta_1 - \delta$, was man sofort erkennt, wenn man ML parallel EA zieht. Des-

*) Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie. Berlin, Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung, 1862. Zweite vermehrte Ausgabe Seite 400. (6. Abschn., Nr. 3.)

Von der Pariser Akademie der Wissenschaften war zu diesem Zwecke Lalande 1751 nach Berlin gesandt (wo die in der Dorotheenstraße 1711 eröffnete Sternwarte, nachdem ihr Astronom 1751 nach Petersburg berufen war, einige Jahre verwaist stand), während Lacaille von 1751 bis 1754 am Kap der guten Hoffnung war. Lacaille (1713—1762) war Lalandes Lehrer. Lalande, geboren 1732, wurde 1753 in die Akademie aufgenommen und bekleidete von 1761 bis zu seinem 1807 erfolgten Tode mit großem Erfolge die Professur der Astronomie am Collège de France.



Figur 62. Entfernung des Mondes.

halb ist zu rechnen nach

$$\tfrac{1}{2}(p_1 - p)'' = \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}(z_1 + z) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(z_1 - z) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\delta_1 - \delta) \cdot \frac{648\,000''}{\pi}$$

und

$$x = \frac{\sin z}{\sin p} \cdot r = \frac{\sin z_1}{\sin p_1} \cdot r.$$

Drückt man schließlich die wirkliche Länge des Mondradius r_1 auf zwei Weisen aus und nimmt bei der Kleinheit von ϱ und ϱ_1 die Bogen statt der trigonometrischen Funktionen, so erhält man den größten Abstand x_1 aus

$$\varrho_1 x_1 = \varrho x.$$

Es ergiebt sich

die gemessene Entfernung	$x = 58{,}09130\,r$	$(58{,}0916\,r)$
„ größte „	$x_1 = 63{,}64695\,r$	$(63{,}6469\,r)$
„ kleinste „	$x_2 = 57{,}02143\,r$	$(57{,}0207\,r)$

folglich ist der mittlere Abstand

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 60{,}33419\,r \quad (60{,}3338\,r).^{*})$$

Die Entfernung des Mondes ist (**60 ± 3**) Erdradien.

153. Größe des Mondes. Der Mond hat beim mittleren Abstande den scheinbaren Halbmesser $\varrho = 15'\,32{,}4''$. Man berechne das Verhältnis der Radien, der Oberflächen und der Rauminhalte von Mond und Erde.

Auflösung. Wir fanden $x_3 = k \cdot r$ und haben nun für den Radius r_1 des Mondes, wenn wir statt $\sin\varrho$ den Bogen einführen,

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\pi}{648\,000}\,\varrho\,k.$$

Dies kann man auch so entwickeln. Beschreibt man mit dem Abstande des Mondes $x_3 = kr$ um den Erdmittelpunkt einen Kreis, so gehen auf dessen Peripherie so viele Mondkugeln, wie Perlen auf eine Schnur, als 2ϱ Sekunden in der Zahl der Sekunden der Kreisperipherie enthalten sind. Die Länge dieses Kreisumfanges, auf zwei Weisen ausgedrückt, giebt

$$\frac{1\,296\,000}{2\,\varrho} \cdot 2\,r_1 = 2\,\pi \cdot k\,r,$$

woraus obiger Ausdruck hervorgeht.

Man findet

$$\frac{r_1}{r} = 0{,}2727349 \quad (0{,}27273).$$

Der Mondradius ist also nur wenig größer, als $\frac{1}{4}$ des Erdradius, sehr genau $\frac{3}{11}$ desselben. (Denn das Ergebnis kommt sehr nahe einem Decimalbruche mit der Periode 27.) Demnach ist das Verhältnis der Oberflächen $\frac{9}{121}$ oder $\frac{1}{13{,}4}$. Die Oberfläche des Mondes ist noch nicht $\frac{1}{13}$ von der der Erde. Das Verhältnis der Rauminhalte wird $\frac{27}{1331}$ oder $\frac{1}{49{,}3}$. Aus der Erde würden 49 Kugeln von der Größe des Mondes sich formen lassen.

Der Erddurchmesser ist also $3\frac{2}{3}$ des Monddurchmessers. Denken wir uns beim Anblicke des Vollmonds zwei auf einander senkrechte

*) Um eine Vorstellung zu bekommen von der erheblichen Verschiedenheit des größten und kleinsten Mondabstandes, zeichne man eine Figur, der Wirklichkeit entsprechend, indem man für den Erdradius $3^2/_3$ mm nimmt, [dann wird der Mondradius 1 mm (nach Nr. 153)] und stelle „Mond in Erdferne" und „in Erdnähe" auf dieselbe Seite der Erde. Die Figur geht auf die Diagonale eines Quartblattes hin.

Durchmesser desselben um ein Drittel verlängert, an jeden Endpunkt noch eine Vollmondscheibe angesetzt und um die ganze Figur einen Kreis gelegt, so erhalten wir durch diese mondhell leuchtend gedachte Kreisfläche eine Vorstellung von dem Anblick, welchen die Erde, vom Monde aus gesehen, (zur Zeit des Neumonds) darbietet. [Man zeichne diese Figur.]

Europa hat 10, die Erdoberfläche 510 Millionen Quadratkilometer. Europa nimmt also $\frac{1}{51}$ der Erdoberfläche ein. So viel beträgt auch $\frac{1}{4}$ der Mondoberfläche. Vom Monde im ersten oder letzten Viertel, sehen wir eine Größe wie Europa. Die Vollmondscheibe ist ebensogroß.

III. Kapitel.

Bewegung der Erde.

A. Umdrehung.

§ 14. Wahrscheinlichkeitsgründe.

154. Einleitung. Die Erscheinung der Achsendrehung der Himmelskugel kann entweder wirklich stattfinden, oder sie ist zu erklären aus einer in derselben Zeit erfolgenden Umdrehung der Erde in entgegengesetzter Richtung, nämlich von West über Süd nach Ost.

Daß in letzterem Falle die Erscheinung des Auf- und Untergehens der Gestirne genau ebenso auftritt, ist in folgender Weise leicht wahrzunehmen. Man denke sich seinen Kopf als Mitte eines großen Uhrzifferblattes, dessen Peripherie durch einen festen Punkt, etwa die Ecke an der Decke des Zimmers, geht. Das Zifferblatt sei mit dem Kopfe fest verbunden, so daß, wenn er sich dreht, es mit herumgeht und die Zahl 12 immer gerade vor Augen bleibt. Man wende den Kopf zur rechten Schulter. Der angenommene feste Punkt, die Ecke, befindet sich jetzt bei der Zahl 9 des Zifferblattes. Dreht man nun den Kopf langsam herum nach der linken Schulter, so sieht man die Ecke bei der 10, der 11, dann bei der 12, 1, 2, bis sie bei der 3 verschwindet, wenn der Kopf sich bis zur linken Schulter herumgewandt hat. Es schien hierbei so, als ob der feste Punkt, die Ecke, wie der Zeiger der Uhr von 9 über 12 nach 3 herumgegangen wäre; während doch die Ursache dieses Fortrückens die Drehung des Kopfes gewesen ist, die von der rechten zur linken Schulter ging, d. h. entgegengesetzt der scheinbaren Bewegung

der Ecke, die von links nach rechts (9, 12, 3) stattfand. Der Kopf stellte die Erde vor, die Ecke die Sonne.

Bei Wiederholung dieses Versuches denke man, statt des Zifferblattes, die Erweiterung der Stirn als die Ebene des Horizontes für einen Beobachtungsort, die Augen. Der feste Punkt kommt links zum Vorschein; über dem Gesichtsfelde steigt er auf; er erreicht, wenn er gerade vor Augen ist, über dieser Ebene seinen höchsten Stand, sinkt wieder tiefer zu ihr hinab und geht rechts unter, wenn der Kopf ganz zur linken Schulter gewandt ist. Für das (eine Erdhalbkugel darstellende) Gesicht ist das linke Ohr im Osten, das rechte im Westen. Der beobachtete feste Punkt ging also bei dieser Drehung des Kopfes im Osten auf und im Westen unter, wie Sonne und Sterne es uns zeigen. Die Achsendrehung des Kopfes war dabei von der rechten zur linken Schulter, von West nach Ost, also dem scheinbaren Laufe des festen Punktes entgegengesetzt.

155. Sinnestäuschung. a] 1) Wenn man über ein Brückengeländer in einen schnell fließenden breiten Fluß sieht, glaubt man bald mit der Brücke in entgegengesetzter Richtung fortzuschwimmen. 2) Stehen wir am Ufer eines breiten, schnellströmenden Flusses, z. B. am Rheine, so daß der Strom quer vorbeizieht, so überkommt uns unwiderstehlich das Gefühl, als ob wir mit den uns umgebenden Dingen am Ufer stromauf trieben. 3) Sitzt man in einem von zwei nebeneinander haltenden Eisenbahnzügen auf einer Begegnungsstation und sieht man zum andern hinüber, so glaubt man abzufahren, wird aber plötzlich gewahr, daß man noch stillhält, wenn der letzte Wagen des wirklich fortgehenden anderen Zuges vorbei ist. — Dies lehrt: Sind wir in Ruhe, so übertragen wir fremde Massenbewegung auf uns. —

b] 1) Fahren wir auf der Eisenbahn, so sehen wir Bäume und Telegraphenstangen in entgegengesetzter Richtung an uns vorbeieilen, trotzdem wir durch Schwanken und Stoßen des Eisenbahnwagens an die eigene Bewegung erinnert werden. Fällt dies fort, wie bei ruhig gehenden Dampfschiffen, so ist die Täuschung vollkommen. 2) Wird man in einen Schacht senkrecht hinabgelassen (z. B. in das 333^{m} tiefe Salzbergwerk zu Staßfurt bei Magdeburg), so sieht man die Wände des Schachtes in rasender Eile emporschießen. 3) Alle Luftschiffer sagen, daß die eigene Bewegung vollkommen unbemerkbar sei. Als Flammarion, Astronom in Paris*), auf einer Ballonfahrt (im Mai 1867) beim Schwinden der einhüllenden Wolken über den Rand der Gondel zum Erdboden hinabblickte, sah er mit schrecken=

*) Seite 149 des Buches, welches in der zweiten Note zu Nr. 108 angegeben ist.

erregender Gewalt die Erde auf sich zustürzen; — man warf sofort Sandsäcke über Bord, damit der sinkende Ballon nicht auf den Erdboden stoße. — Also, im Gegenteil von a]: Die eigene Bewegung übertragen wir auf die ruhenden Außendinge. —

Weist uns dies nicht darauf hin, aus der scheinbaren Umdrehung der Himmelskugel schließen zu müssen, daß **wir** uns bewegen? — Den festen Außendingen geben wir die eigene Bewegung in entgegengesetzter Richtung. Aus den Sternen haben wir also abzulesen: wir bewegen uns von West über Süd nach Ost (gegen den Lauf des Uhrzeigers). —

156. Entscheidung durch die Größe der Geschwindigkeit. Wenn die Erde wirklich Achsendrehung besitzt, bei welcher eine Umdrehung in $t = 86164$ Sekunden erfolgt (Nr. 81), wie groß ist dann die Geschwindigkeit eines Ortes von der geographischen Breite φ?

Beispiele.

Ein Ort am Äquator		hat eine Geschwindigkeit von	465^m
München,	$\varphi = 48^0\ 8'$,	hat eine „ „	310^m
Berlin,	$\varphi = 52^0 31'$,	„ „ „ „	283^m
Königsberg,	$\varphi = 54^0 43'$,	„ „ „ „	268^m
Petersburg,	$\varphi = 59^0 56'$,	„ „ „ „	233^m (vergl. Äquator.)

Das große, aus dem Kruppschen Etablissement hervorgegangene Geschütz, die $30\frac{1}{2}$-Centimeter-Kanone, welche bei Kiel aufgestellt ist, erteilt bei guter Pulverladung ihrem Geschosse eine Anfangsgeschwindigkeit von 465^m.*) Das ist gerade die Geschwindigkeit am Äquator.

Die Annahme einer Umdrehung der Erde erfordert also Geschwindigkeiten, die an keinem Orte der Erde größer sind, als die,

---

*) Solche Bestimmungen werden mit Hilfe eines elektromagnetischen Chronoskops ausgeführt. Von den beiden Zeigern des Uhrwerks giebt der eine Zehntel-Sekunden, der andere den hundertsten Teil davon, also Tausendstel-Sekunden an. Die Zähne des letzten Rades streifen an einer Feder hin. Der dadurch entstehende Ton läßt (durch Vergleichen mit einer tönenden Stimmgabel) erkennen, daß die Feder 1000 Schwingungen in einer Sekunde macht. Die Uhr läuft, die Zeiger noch nicht; sie werden von einem Elektromagneten gehalten. Der Leitungsdraht desselben ist vielmals hin- und hergeführt auf einem Rahmen, der 10^m vor der Kanone aufgestellt ist. Weit dahinter steht eine Scheibe, über welche in gleicher Weise der Draht eines zweiten Elektromagneten gezogen ist. Das Geschoß zerreißt den ersten Draht. Das Schwinden des Stromes läßt die Zeiger mit dem Werke laufen. Das Durchschlagen des Scheibendrahtes unterbricht den Strom des zweiten Elektromagneten; sein zurücktretender Anker berührt einen Kontakt und schließt damit eine Leitung zum ersten Elektromagneten; infolgedessen werden die Zeiger wieder angehalten. Die Differenz ihrer vorigen und jetzigen Stellung giebt die Zeit an, während welcher das Geschoß den bekannten Abstand der beiden Rahmen durchflog. Daraus ergiebt sich die Geschwindigkeit für diese Strecke der Flugbahn.

welche man Geschossen zu geben im stande ist. Bei der Himmelskugel aber müßte man Geschwindigkeiten für möglich halten, die um so größer zu denken wären, je weiter man in der Kenntnis der Größe der Himmelskugel fortschreitet. In Nr. 103 sahen wir, daß man durch neue Beobachtungsweisen für die Entfernung der Sterne Zahlen erhalten müßte, die weit über 1000 Millionen Kilometer hinausgehen, und wenn man solche findet [Nr. 174], so bliebe immer die Möglichkeit, auf noch anderen Wegen durch fortgesetzte Beobachtungsvervollkommnung weitere Verlängerungen des Radius hoffen zu können. Mit ihm aber nimmt in gleichem Maße die Geschwindigkeit zu. Wir müßten also zur Erklärung unnatürliche Geschwindigkeiten verlangen, die immer noch größer sein könnten; während die andere Annahme naturgemäß ist.

§ 15. Beweise für die Umdrehung der Erde.

157. 1) **Foucaults Pendelversuch** [zuerst angestellt im Jahre 1851].*) Man habe an einem langen Faden einen schweren Körper (z. B. einen Schlüssel) befestigt und lasse ihn, während man am andern Ende den Faden hält, Pendelschwingungen vollführen. Dieselben gehen in unveränderter Richtung vor sich, mag der Aufhängepunkt an seiner Stelle bleiben, oder mag man ihn ruhig in irgend einer Richtung nach einem neuen Standorte fortbewegt haben. Läßt man dabei die den Faden haltenden Finger an einander hingleiten, so daß der Faden um seine Achse sich dreht, so stört auch diese Nebenbewegung die Richtung der Pendelschwingungen nicht. Unveränderlichkeit der Schwingungsrichtung wird durch diese Versuche dargelegt.

a) Die unveränderliche Bewegungsrichtung eines frei schwingenden Pendels giebt uns ein Mittel, zu prüfen, ob die Erde sich umdreht oder nicht. Ruht sie, so behält die Umgebung ihre Stellung gegen die fortdauernden Schwingungen; dreht sie sich, so nehmen Fußboden und Wände andere Lagen gegen die beständige Schwingungsrichtung ein.

Zu dieser Probe ist ein Pendel erforderlich, welches stundenlang schwingt. Die Weite der Schwingungen wird vermindert durch den Widerstand der Luft. Derselbe wirkt um so erfolgreicher entgegen, je geringer die Masse und je größer die Geschwindigkeit des die

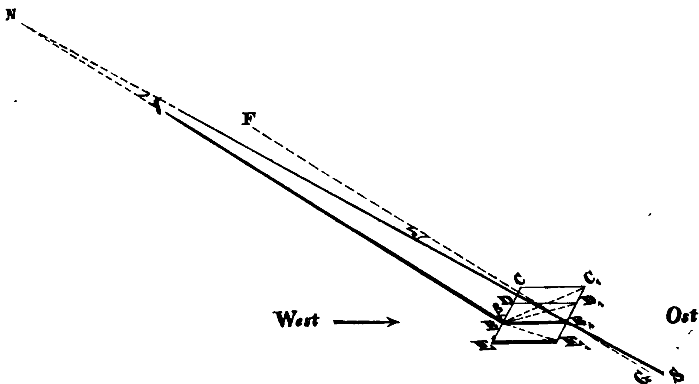
*) Léon Foucault, geb. am 18. September 1819 in Paris, gest. am 11. Februar 1868 in Paris. 1855 Physiker des Pariser Observatoriums, 1865 Mitglied der Pariser Akademie.

Luft verdrängenden Körpers ist. Deshalb muß man eine recht schwere Kugel und einen möglichst langen Faden nehmen.*)

Angenommen, die Erde habe eine Achsendrehung, und zwar von West über Süd nach Ost. Durch sie werde in $\frac{1}{n}$ Sekunde (z. B. in einer Hundertstel-Sekunde) der Mittelpunkt B der schwingenden Kugel nach B_1 geführt. Figur 63.**) [Für die gedachte Zeit wäre also in Deutschland BB_1 etwa 3^m^. (Nr. 156.)] Die eigene Geschwindigkeit der Kugel möge augenblicklich so groß sein, daß sie für sich allein in diesem Zeitteilchen den Punkt B nach C bringen würde. Nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten kommt also B wirklich nach C_1. Der bei B stehende Beobachter ist indessen selber mit nach B_1 versetzt und nimmt deshalb nicht die Ortsveränderung BC_1 wahr, sondern urteilt, daß die Veränderung von B_1 bis C_1 vor sich gegangen sei. Er wußte, daß zu Anfang des Zeitteilchens die

*) Der Nachweis läßt sich auch mit einem kurzen Pendel (von 1 bis 2^m^ Länge und einer Ausschlagsweite von wenigen Centimetern) führen, wenn man nicht weit hinter dem Draht einen Lichtpunkt von großer Helligkeit anbringt. Im Lichtkegel eines Sonnenmikroskops giebt man der ersten Schwingung die Richtung seiner Achse. Der Schatten des Pendeldrahtes erscheint dann an der Wand anfangs in Ruhe, aber nach 1 bis 2 Minuten bemerkt man an ihm eine pendelnde Bewegung, ein Zeichen, daß der Lichtpunkt eine andere Stellung gegen die unveränderte Schwingungsrichtung bekommen hat. Das Pendeln des Schattens wächst in 10 Minuten auf einige Centimeter. Die ungleiche Dicke des schwingenden Schattens und sein ungleichweites Ausschlagen läßt die Richtung der Drehung erkennen. (Angabe von Mauritius in J. C. V. Hoffmanns Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, 8. Jahrgang, 1877, Seite 475 bis 479.)

**) Das Pendel selbst kommt in den Figuren gar nicht vor. Von ihm ist nur sein Schwerpunkt B zu denken. Das Dreieck BNB_1 ist als ein Teil der durch B gehenden Horizontalebene anzusehen.



Figur 63. Zu Foucaults Pendelversuch.

Schwingungsrichtung BC mit der Mittagslinie BN den Winkel CBN $= \beta$ bildete; am Ende desselben sieht er den Winkel C_1B_1N, und dieser ist größer, als der Winkel β. Denn zieht man B_1F parallel BN, so ist $C_1B_1F = \beta$; mithin weicht jetzt die Mittagslinie von der unveränderlichen Schwingungsrichtung um einen Winkel ab, der um $FB_1N = \delta$ größer ist, als vorher. Dieser Zuwachs δ kommt in jeder n tel Sekunde. War nämlich die eigene Geschwindigkeit von B kleiner, so daß B in dem Zeitteilchen nur bis D gelangt wäre, so würde B_1D_1 denselben Winkel δ ergeben. Auch wäre derselbe Erfolg eingetreten, wenn B nach der entgegengesetzten Seite seine Schwingung ausführte; da auch Winkel $E_1B_1S = \beta + \delta$ ist. Dieser in jedem Momente zu β hinzukommende Winkel δ ist gleich dem Winkel $BNB_1 = \gamma$, welchen die beiden Lagen der Mittagslinie bei ihrem auf der Erdachse liegenden Schnittpunkte N bilden. Da nun die Geschwindigkeit der Pendelkugel, selbst im tiefsten Punkte ihrer Bahn sehr gering ist im Vergleich zur Umdrehungsgeschwindigkeit des Beobachtungsortes B, so haben wir uns die Nebenseiten der Parallelogramme stets äußerst klein vorzustellen, so daß ein Punkt wie D_1 unmittelbar bei B_1 und der Winkel B_1ND_1 verschwindend klein ist. Aber selbst dieser Überschuß des Winkels BNB_1 geht nachher beim Summieren heraus, weil beim Zurückschwingen ein Winkel wie B_1NE_1 ihn ausgleicht. Man hat demnach an NB_1 solches sehr lang gestrecktes Dreieck BNB_1 noch einmal angesetzt zu

Figur 64. Zu Foucaults Pendelversuch.

denken in der durch B_1 gehenden Horizontalebene, an die neue Linie NB_2 wieder, und so fort. Alle Dreieckstreifen fügen sich in 1 Sekunde zusammen zu dem Flächenstück BNB_n in Figur 64. Dasselbe ist, da eine Umdrehung $u = 86164$ Sekunden mittlerer Zeit dauert, $\frac{1}{u}$ des Kegelmantels, beschrieben von $BN = s$. Dieser Kegelmantel liefert abgewickelt einen Kreisausschnitt mit dem Radius s und einem Centriwinkel α, und man hat deshalb

$$\frac{\alpha^0}{360^0} \pi s^2 = \pi \varrho s \quad \text{und daraus} \quad \alpha = 360^0 \frac{\varrho}{s} = 360^0 \sin\varphi,$$

weil $\angle JNE = \varphi$, der geographischen Breite des Beobachtungsortes, ist. Es war aber Winkel BNB_n nur $\frac{1}{u}$ von α, mithin ist der Zuwachs zum ursprünglichen Winkel β für jede Sekunde

$$\vartheta = \frac{360^0}{u} \sin\varphi.$$

b) Dem Zuschauer wird es schwer, die Schwingungsrichtung der pendelnden Kugel als unveränderlich im Blick festzuhalten; besonders die ihn umgebenden Wände sind es, welche ihn zu der Vorstellung zurückbringen, das Pendelschwingen wandere herum. Er meint, dieses Herumwandern gehe wie der Lauf des Uhrzeigers vor sich. (Figur 63.) Es würde in entgegengesetzter Richtung ihm vor Augen treten, wenn man annimmt, die Erde drehe sich von Ost über Süd nach West. Denn dann ist in Figur 63 NB_1 die erste Lage der Mittagslinie und $\beta + \delta$ der ursprüngliche Winkel, der nach $\frac{1}{n}$ Sekunde zu β, also kleiner geworden ist; und darum würde er meinen, die Schwingungsrichtung BC gehe an die Mittagslinie heran, also gegen den Uhrzeigerlauf herum.

Die ganze Betrachtung lehrt: Ruht die Erde, so kann keine Veränderung in der gegenseitigen Lage des Fußbodens und der Schwingungsrichtung eintreten. Hat die Erde Achsendrehung, so muß eine Lagenveränderung sichtbar werden, und zwar, wenn sie von West über Süd nach Ost rotiert, so wird die Schwingungsrichtung wie der Uhrzeiger herumzurücken scheinen, bei umgekehrter Drehung aber seinem Laufe entgegengesetzt. Bei Anstellung des Versuchs sieht man, wie das Foucaultsche Pendel Schritt für Schritt herumrückt, und so fortschreitet, wie der Uhrzeiger läuft. Mithin dreht sich die Erde, und zwar von West über Süd nach Ost.

Auf der südlichen Halbkugel muß (und Beobachtungen in Rio Janeiro haben es bestätigt) die scheinbare Drehung des Pendelschwingens in entgegengesetzter Richtung (gegen den Lauf des Uhr-

zeigers) erfolgen. Dies kann man durch eine der Figur 63 entsprechende Zeichnung mit dem südwärts liegenden Punkte S statt N leicht nachweisen.*)

c) Damit bei Beginn des Versuchs das aus der Ruhelage gebrachte Pendel ohne seitlichen Stoß der Fallbewegung folge, legt man um die Kugel genau in ihrem Äquator die Schlinge eines Fadens, dessen nur noch kurzes Ende zu einer Öse geknotet ist, und hängt ihn mit dieser an einen in die Wand geschlagenen Haken. Erst wenn die so zurückgehaltene Kugel ganz in Ruhe ist, brennt man den Faden außerhalb der Schlinge durch. Als Verlängerung des Pendelfadens ist unten in die Kugel eine 15 cm lange Spitze eingeschraubt. Sie läßt erkennen, ob der Ablauf wirklich gut war, denn sie darf durchaus keine sphärische Ellipse beschreiben, weil dann das Pendel eine Eigenbewegung hat.**) Im Verlauf der Zeit zeigt die Spitze den Weg der Schwingung über einer radialen Einteilung des Fußbodens deutlich an.

d) Die Größe der Ablenkung des Meridians von der unveränderten Schwingungsrichtung ist von der geographischen Breite des Beobachtungsortes abhängig. Da der Zuwachs $\delta = \gamma$ war, so wird er mit diesem zwischen den erweiterten Meridianebenen liegenden Winkel BNB_n um so kleiner, je weiter N für kleinere Breiten in der Verlängerung der Erdachse fortrückt. Es wird, wie aus jenem Ausdrucke ϑ für 3600 Sekunden mittlerer Zeit folgt, in

	geogr. Breite	die stündliche Ablenkung
Memel	55° 44′	12,43°
Königsberg	54 43	12,28
Stettin	53 25	12,08
Berlin	52 31	11,94
Köln	50 56	11,68
Nürnberg	49 28	11,43
Wien	48 13	11,22
Bern	46 57	10,99

*) Man sieht, daß die vom Pendelfaden beschriebene Fläche ganz außer Betracht bleibt. Sie durchsetzt in zahlreichen schwach welligen Falten das äußere Stück des Kegelmantels, welcher aus dem zum Aufhängepunkte gezogenen Erdradius bei der Erdumdrehung hervorgeht. (Figur 64.) [Es darf also beim Foucaultschen Pendel von einer „Schwingungsebene" nicht gesprochen werden.]

**) Eine, wenn auch nur geringe seitliche Bewegung würde die hier störende Erscheinung herbeiführen, welche man beobachtet, wenn man an einem Faden einen Körper so schwingen läßt, daß er eine länglich runde Bahn beschreibt. Man sieht dann, daß die Ellipsen-Achsen der Bahn fortwährend andere Lagen erhalten, die sich als ein langsames Herumwandern der großen Achse in der Richtung des Umlaufens darstellen. Daß dieser rechtsherum positive oder bei links gehendem Umlaufe negative Fehler im angestellten Foucaultschen Versuche nicht vorhanden ist, sagt die Kugelspitze, wenn sie frei ist von elliptischer Bewegung.

und so fort. Die Ablenkung wird am Äquator zu Null, um auf der südlichen Halbkugel bei der nun eintretenden Biegung des Meridians zur Erdachse hin in die entgegengesetzte Ablenkungsrichtung überzugehen. Wäre die Erde ein um seine Achse rotierender Cylinder, so würde auf seinem Mantel die Ablenkung überall null sein. Wäre sie ein aus abgestumpften Kegeln zusammengesetzter rotierender Körper, so .... Mithin giebt das an verschiedenen Orten schwingende Foucaultsche Pendel auch eine Bestätigung für die Kugelgestalt der Erde.

Versuche mit mehr als 10^m langen Pendeln angestellt, haben sich in guter Übereinstimmung mit der nach obiger Formel berechneten Ablenkung erwiesen. Das 1852 im Chore des Kölner Domes angebrachte $45{,}5^m$ lange Pendel hatte selbst nach vierstündigem Schwingen noch genauen Gang.

e) Das Foucaultsche Pendel des Königstädtischen Realgymnasiums in Berlin*) ist im Treppenraume aufzuhängen. Die mit Blei ausgegossene, 20^{kg} wiegende Kugel von 77^{mm} Radius wird getragen von einem 1^{mm} dicken Kupferdrahte. Ihr Mittelpunkt befindet sich $18{,}746^m$ unter dem Aufhängepunkte. Bei dieser bedeutenden Länge dauert eine einfache Schwingung über 4 Sekunden.

---

*) Dasselbe ist nach den Angaben des Verfassers des vorliegenden Buches mit größter Genauigkeit gearbeitet von dem durch seine schönen Luftpumpen weitbekannten Mechanikus Wilh. Schultz (Berlin N.), welcher durch Anfertigen chemischer Wagen Kenntnis in der Konstruktion genauer Stahlschneiden besitzt. Der richtige Gang eines Foucaultschen Pendels beruht auf der Güte der Aufhängung. Bei diesem ist die Cardanische Aufhängung der Schiffskompasse, aber mit Schneiden, angewandt. (Man denke an die Ringverbindungen in Bohnenbergers oder in Fessels Rotationsapparat.) Quer über einen starken Messingring ist ein parallelepipedisches Stahlstück aufgeschraubt. Seine über den Rand hervorragenden Enden sind zu dreiseitigen Prismen gearbeitet, so daß die nach unten gerichteten Schneiden beide genau in einer geraden Linie liegen. Ihre stählernen Pfannenlager befinden sich auf einem größeren Messingringe. Dieser sitzt fest auf dem die Aufhängung tragenden stark verankerten Balken, welcher von oben nach unten mit kegelförmig sich erweiternder Öffnung versehen ist. Jenes Stahlstück ist in der Mitte tief ausgefeilt und der Rest in der Weite der Ringöffnung durchbohrt. Rechts und links davon sind auf dem Ringe wieder zwei Stahlpfannen für die Schneide, welche durch einen stählernen Haken oben quer hindurchgeht. Nachdem der Pendeldraht durch den Ring hinabgelassen ist bringt man durch sein Öhr das weit umgebogene drahtfeine Ende des Hakens und setzt dessen Schneide in ihre Pfannen. Bei der Arbeit ist die höchste Sorgfalt darauf verwandt, daß die Schneiden in einer Ebene liegen und recht winklig sich kreuzen. Dadurch ist bewirkt, daß das Pendel wirklich an einem Aufhängepunkte schwingt, nämlich dem Kreuzpunkte der Schneiden. [Durch eine Korkplatte wurden 4 Nadeln gesteckt und ihre Spitzen auf einem Luftpumpenteller genau in eine Ebene gebracht. Durch Aufsetzen dieses Tischchens wurde beim Ausfeilen der Pfannen so lange geprüft, bis ihre Rinnen wirklich in einer Ebene waren.] Das Pendel kostete mit den Nebenapparaten 265 M. (Weitere Angaben stehen in Nr. 242.)

Es erfordern von den weitesten Schwingungen 76 $5^m 30{,}0^s$, 92 $6^m 39{,}5^s$ und 130 $9^m 24{,}5^s$. Bei der ersten dieser Schwingungen ist, von der Ruhelage des Pendels an, die Weite des Ausschlages $1{,}92^m$, bei der letzten $1{,}53^m$. Dies giebt mit der Länge des ganzen Pendels $R = 18{,}973^m$ die Größe der zugehörigen Ausschlagswinkel, und man findet: Von den weitesten Schwingungen, deren Ausschlagswinkel zwischen $5{,}8^0$ und $4{,}6^0$ betragen, dauert eine $4{,}3423^s$.

Bringt man in die verlängerte Schwingungsrichtung einen Theodoliten und stellt den senkrechten Faden des Fadenkreuzes auf die Kugelspitze im Augenblicke des größten Ausschlages ein, so kommt bereits bei der nächsten Rückkehr zu dieser Stelle die Spitze neben den Faden, so daß man die Drehung der Erde schon nach 8 Sekunden sieht.

Um zu prüfen, ob dieses Pendel frei ist von eigenem Gange, ob also seine Angaben übereinstimmen mit der Größe des nach t Sekunden entstandenen scheinbaren Ablenkungswinkels

$$\alpha = t\vartheta, \text{ wo } \vartheta = \frac{360^0}{u} \sin\varphi \text{ ist,}$$

wurde eine mitten auf einer kleinen Kreisscheibe stehende Spitze auf die Pendelgrundfläche*) gestellt und durch ein Galileisches Fernrohr beobachtet, wann die Kugelspitze jene erreichte. Zur Zeitangabe wurde ein Chronometer benutzt. Nachdem dann zur Markierung des Standortes auf der Grundfläche um den Grundkreis des Ständers mit Bleistift herumgezogen war, wurde derselbe zur nächsten Beobachtung weiter gerückt, oder es wurde ein ebensolcher niedrigerer angewandt. Durch den Mittelpunkt des ersten so erhaltenen Kreises wurde, nach Beendigung der 6 Beobachtungen, von dem durch die Ruhelage des Pendels bekannten Lotfußpunkte her ein Seidenfaden ausgespannt, nachdem dies mit dem vom Markierständer angegebenen Ausgangspunkte der ersten Schwingung geschehen war. Auf beiden Fäden wurde ein Radius von 1900^{mm} abgetragen, und die die Endpunkte verbindende Sehne gemessen. Dadurch ist der von den Fäden eingeschlossene Centriwinkel β gefunden. Ebenso wurde die Lage der Anfangsrichtung gegen den Faden für jede folgende Beobachtung erhalten. Man berechne aus den in der folgenden Tabelle

---

*) Die Grundfläche ist zusammengesetzt aus weißen und dunkelgrauen Marmorplatten. Auf den Mittelpunkt einer weißen Kreisscheibe von 20^{cm} Radius weist in der Ruhelage des Pendels die 15^{cm} lange Spitze unter der Kugel in nur 2^{mm} Abstand. Die Kreisscheibe ist rings umgeben von 1^m langen Stücken von Kreisausschnitten, deren Grenzradien so konvergieren, daß sie Centriwinkel von 12^0 bilden, entsprechend dem stündlichen Gange für Berlin. Außen sind, wieder abwechselnd weiß und dunkelgrau, solche Platten von 6^0 Konvergenz, zum Ablesen der halben Stunden.

in Spalte 1 und 2 stehenden Messungen die Winkel α und β. Die geographische Breite des Pendelaufhängepunktes ist

$$\varphi = 52^0\,31'\,19{,}73''.\text{*)}$$

Beobachtung.		Rechnung.		
1. Dauer des Schwingens	2. zum Radius r = 1900mm Sehne s =	3. Der aus der Zeit berechnete Ablenkungswinkel α	4. Der durch die Sehne gemessene Centriwinkel β	5. Abweichung $\beta - \alpha$
$0^h\ 24^m\ 54{,}0^s$	164,1mm	4,953°	4,950°	— 0,003°
0 30 15,5	199,0	6,020	6,004	— 0,016
0 35 27,5	234,0	7,054	7,061	+ 0,007
0 55 43,0	368,8	11,084	11,139	+ 0,055
1 0 38,5	401,2	12,064	12,121	+ 0,057
1 5 51,0	433,0	13,100	13,086	— 0,014

Solche Messungen müssen mit größter Genauigkeit ausgeführt werden; denn durch jeden Hin- und Hergang des Pendels in 8,6846s wächst der Ablenkungswinkel α schon um 0,029°, und eine Unsicherheit von nur 0,1mm beim Messen der Sehne s ändert den Centriwinkel β um 0,003°. Bei solcher Tragweite der Beobachtungsfehler sind obige Abweichungen (Spalte 5) nur ganz gering, und ihr Auftreten mit verschiedenen Vorzeichen lehrt, daß das Pendel genau geht.

Da die Bewegung in der Aufhängung von Reibung frei ist, so bleibt das Pendel ungewöhnlich lange in Thätigkeit. Die scheinbare Ablenkung um 90° nach $7^h\ 32{,}4^m$ ist noch gut zu beobachten, da die Weite des Ausschlages, vom Lotfußpunkte an, dann noch 13cm beträgt. Selbst bei so lange dauerndem Schwingen stimmt der Gang mit der Formel gut überein, wenn Luftzug (welcher der Pendelkugel, trotz ihres großen Gewichtes, die besprochene elliptische Bewegung erteilt, auch wenn er nur sehr schwach ist, aber immerfort wirkt) sorgfältig unterdrückt wurde. Zu dem Zweck bleibt der untere Raum,

*) Dieselbe ist bestimmt aus der Polhöhe des Marienturmes, welche 52° 31′ 19,06″ beträgt. (Nr. 135.) Zunächst wurde durch eine zusammengesetzte trigonometrische Messung ermittelt, daß, wenn K den Fußpunkt der Achse des Beobachtungsturmes des Königstädtischen Realgymnasiums bezeichnet und M den Fußpunkt des Lotes von der Spitze der Marienkirche, der Punkt K von M 1165,766m Abstand hat, und daß in K das Azimut von M 268° 15′ 2,0″ ist. Daraus folgt, daß K 35,589m nördlicher liegt, als M. Diese Strecke hat als Meridianbogen 1,15″ (Nr. 141, 2), und deshalb ist im Mittelpunkte des Turmes des Königstädtischen Realgymnasiums die Polhöhe 52° 31′ 20,21″. Hiervon sind, da der Aufhängepunkt des Pendels 14,77m weiter nach Süden liegt, 0,48″ abzuziehen, und so entstand obige Angabe $\varphi = 52^0\,31'\,19{,}73''$.

in welchem die Pendelkugel sich bewegt, mit 2^m hohen Holzrahmen, die mit Papier überspannt sind, während der Zwischenzeit umstellt.

Anmerkung. Obige Formelentwicklung ist die gemeinverständliche Darstellung des Vorganges, wie er bei Anstellung des Versuches zur Erscheinung kommt. Die genaue Behandlung ist eine Aufgabe der Mechanik, welche nur mit Hilfe der höheren Mathematik zu lösen ist.*) Ganz streng genommen passiert nämlich das Foucaultsche Pendel nicht seine senkrechte Ruhelage, sondern schwingt um sie herum als ein sphärisches Pendel, weil sein Schwerpunkt durch die Achsendrehung der Erde beim Beginn des Versuches eine andere Geschwindigkeit besitzt, als die Stelle der Ruhelage.

Der Haken, an welchem zum Ablaufen des Pendels der Faden durchgebrannt wird, sei an der Südseite der Grundfläche und befinde sich von ihrer Mitte aus beim Azimutwinkel β (von Süden an gerechnet). Der Schwerpunkt des dort in schräger Stellung festgehaltenen Pendels habe a Meter rechtwinkligen Abstand von der senkrechten Ruhelage des Pendels. Die Projektion auf die Ebene des Meridians, $a \cos \beta$, giebt den Radius des Parallelkreises, welchen der Schwerpunkt des angehakten Pendels in $u = 86164$ Sekunden beschreiben würde, $\varrho + a \cos \beta \sin \varphi$. (Man betrachte in Figur 64 die Stelle bei J, wo die horizontale Grundfläche in JN rechtwinklig zur Ebene der Figur zu denken ist, und $a \cos \beta$ die Verlängerung von NJ wird.) In der senkrechten Ruhelage des Pendels würde sein Schwerpunkt durch die Achsendrehung der Erde die Geschwindigkeit $\frac{2\pi\varrho}{u}$ haben; da er vor dem Durchbrennen des Fadens auf der Südseite gehalten wird, ist seine Geschwindigkeit größer. Der Überschuß

$$c = \frac{2\pi a \cos\beta \sin\varphi}{u}$$

wirkt beim Ablaufen wie eine nach Osten gerichtete Anfangsgeschwindigkeit, welche den Schwerpunkt eine sehr schmale sphärische Ellipse um die Ruhelage beschreiben läßt, deren zweite Hälfte der ersten nicht mehr kongruent wird, weil der Luftwiderstand die Schwingungsweite vermindert hat und die große Achse inzwischen etwas herumgewandert ist.

Bei dem Foucaultschen Pendel des Königstädtischen Realgymnasiums ist $a = 1{,}94^m$, $\beta = 30^0$ und es wird

$$c = 0{,}000097^m$$

also weniger als ein Zehntel-Millimeter. Die Abweichung der

*) Litteratur-Angaben findet man in der Abhandlung von O. Röthig in der Zeitschrift für Mathem. und Physik, histor.-litter. Abteil., 24. Band, S. 153, und in der von S. Günther in der Zeitschrift „Humboldt", Band I, Heft 9.

sphärischen Ellipse von dem durch die Ruhelage gehenden Kreisbogen bleibt daher völlig unsichtbar, und die Näherungsformel

$$\vartheta = \frac{360^0}{u} \sin\varphi$$

muß sich als sehr zutreffend erweisen.

158. 2) **Seitendruck der Eisenbahnzüge.** Es stelle die für das Foucaultsche Pendel gezeichnete Figur 63 nun die Ebene dar, in welcher eine Lokomotive im jetzigen Augenblicke von B in der Richtung BC in vollem Laufe fährt. Diese Richtung bildet mit der Mittagslinie BN den Winkel $NBC = \beta$. Die Lokomotive würde in 1 Sekunde von B nach C gelangen, wenn die Erde nicht rotiert. Hat die Erde aber Achsendrehung, so besitzt die Maschine in B noch eine zweite, seitwärts gerichtete Geschwindigkeit, die, wenn sie ostwärts geht, dieselbe in 1 Sekunde von B nach B_1 bringen würde. Vereint wollen beide Geschwindigkeiten sie nach der Ecke C_1 des Parallelogramms CBB_1C_1 versetzen. Dies ist in Figur 65 vergrößert wiedergegeben. Figur 64 zeigt, daß die Mittagslinie BN bei stattfindender Achsendrehung der Erde sich um den Punkt N auf der verlängerten Erdachse bewegt. Dabei behalten aber die Schienen den gleichen Winkel β mit der Mittagslinie, die am Ende der Sekunde die neue Lage B_1N erlangt hat, in welcher der Winkel C_1B_1N, wie durch Figur 63 nachgewiesen, größer ist als β. Die Lokomotive wird durch das Geleise gehindert, nach C_1 zu kommen; sie sucht durch den auf der Innenseite sitzenden Spurkranz der rechtsseitigen Räder die rechts liegende Schiene B_1D (Figur 65) in die Lage B_1C_1 zu drängen, welche durch $\angle C_1B_1D$ den Zuwachs zu $\angle\beta$ angiebt. Der Überschuß des Winkels C_1B_1N über β, der in Figur 63 nach $^1/_n$ Sekunde $\delta = \gamma$ war, beträgt nach einer ganzen Sekunde (Figur 64) $BNB_n = \vartheta = \frac{360^0}{u} \sin\varphi$. (Nr. 157, a.) Der mit der geographischen Breite veränderliche Winkel ϑ bleibt kleiner als 15 Winkelsekunden, welche Grenze er erst an einem Erdpole erreicht. (In der Tabelle für einige Städte in Nr. 157 d steht das $60 \cdot 60$fache von ϑ; also ist die dortige Benennung „Grade" für ϑ selbst als Winkelsekunden zu lesen.) Deshalb wird die kleine Strecke C_1D durch den Bogen mit dem Radius $B_1C_1 = v$, der Geschwindigkeit der Lokomotive, berechnet

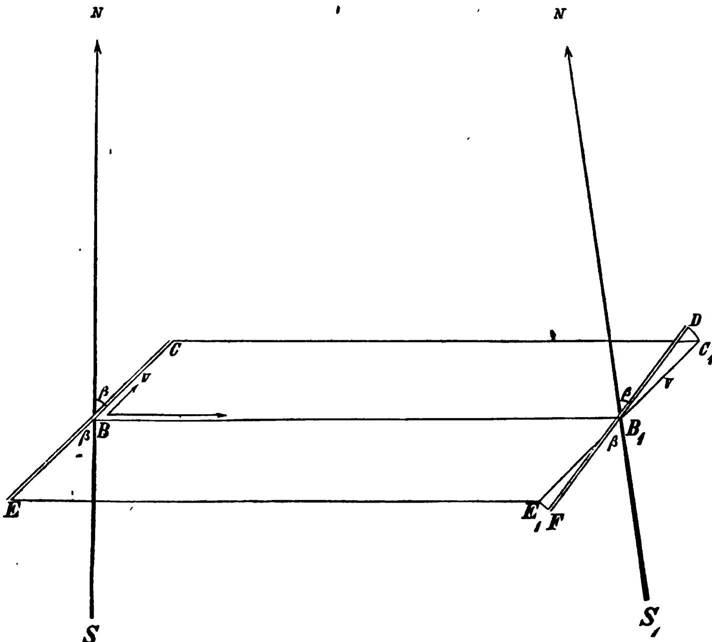
$$d = \vartheta v = \frac{1}{u} \cdot 2\pi v \sin\varphi$$

(wo die Umdrehungszeit $u = 86\,164^s$ ist und der Kreisumfang 2π statt 360^0 eintreten mußte).

Um dies Stückchen sucht nach 1 Sekunde der Spurkranz der rechtsseitigen Räder die Schiene nach rechts zu drücken. Fährt die Maschine in entgegengesetzter Richtung, von B nach E, so würden die zur Linken des Lokomotivführers laufenden Räder nach dem Eckpunkte E_1 des Parallelogramms der Geschwindigkeiten kommen; sie werden aber durch das Geleise nach F gebracht dadurch, daß die vom Lokomotivführer aus rechts liegende Schiene durch den Spurkranz der rechtsseitigen Räder (in der Figur 65 zur Linken des Lesers) die Maschine um die kleine Strecke $E_1F = d$ weiter drängt. Mag die Lokomotive in der einen oder in der andern Richtung fahren, in beiden Fällen ist zur Rechten ein Druck vorhanden, wenn die Erde sich ostwärts dreht. Auf der südlichen Halbkugel bewirkt solche Umdrehung der Erde Druck auf der linken Seite. [Nr. 157, b) am Ende.]

Die in der ersten Richtung erstrebte, in der zweiten bewirkte Verschiebung d ist scheinbar sehr gering; aber die gewaltige Masse der Lokomotive fordert von der rechten Schiene eine erhebliche Widerstandsarbeit. Als das Produkt aus dem in Metern ausgedrückten Wege d und dem in Kilogrammen angegebenen Gewichte p der Lokomotive ist die Widerstandsarbeit der rechten Schiene

$$w = dp \text{ Meterkilogramm.}$$



Figur 65. Seitendruck der Eisenbahnzüge.

Bei dem Gewicht einer Eilzug- oder Personenzuglokomotive von 33000 kg und dem einer Güterzugmaschine von 36000 kg und für die Geschwindigkeit des Eilzuges $v_1 = 25^m$, des Personenzuges $v_2 = 21^m$ und des Güterzuges $v_3 = 12{,}5^m$ (Note zu Nr. 103) ist der Widerstand der rechten Schiene in der geographischen Breite von

		Danzig $\varphi = 54^0\,21'$	Basel $\varphi = 47^0\,34'$
beim Eilzuge	w_1	$= 48{,}88^{m\,kg}$	$44{,}40^{m\,kg}$
beim Personenzuge	w_2	$= 41{,}06$	$37{,}30$
beim Güterzuge	w_3	$= 26{,}66$	$24{,}22$

also, da $75^{m\,kg}$ eine Pferdekraft genannt werden, $\frac{1}{3}$ bis $\frac{2}{3}$ Pferdekraft.

Der Seitendruck ist, da Winkel β beliebige Größe haben kann, auf jeder Bahn vorhanden. Er fällt nur aus, wenn an einer Stelle durch Abweichung aus der Anfangsrichtung nach rechts die Schiene am Ende von BC gerade um die kleine Größe d seitwärts liegt, so daß zufällig die Bahn selbst durch den Eckpunkt C_1 des Parallelogramms geht. Bei Abweichungen aus der Richtung, die 25^m weit nur Millimeter zu betragen brauchen, wird bei jeder nach links die Widerstandsarbeit der rechten Schiene um obige Größe w vermehrt, bei denen nach rechts die der linken um so viel vermindert. Also ist fortwährend die rechte Seite im Nachteil, falls sich die Erde nach Osten dreht.

a) Die mehr in Anspruch genommene Widerstandsarbeit der rechten Schiene kann wegen der Festigkeit des Materials erst mit der Zeit Spuren ihrer Wirkung vor Augen stellen. Wenn nach längerem Dienste die Räder der Lokomotive an den durch die Kurbel besonders kräftig gebrauchten Stellen so viel Eisenteilchen verloren haben, daß sie von neuem rund gedreht werden müssen, so zeigt sich, daß die rechtsseitigen Räder etwas mehr abgenutzt sind, als die linksseitigen. (Die Eisenbahnwagen erleiden an ihren Rädern der rechten oder der linken Seite nicht ungleiche Abnutzung, weil sie zur Rückfahrt nicht umgewandt werden, so daß nun die andere Seite rechts hinter dem Lokomotivführer läuft.)

b) Bei den doppelgeleisigen Eisenbahnen wird jeder Strang immer nur in derselben Richtung befahren. Durch Reibung lassen die Wagenzüge das Geleise allmählich in der Fahrrichtung mehr und mehr vorrücken. Diesem Wandern der Schienen wird dann nicht genügender Widerstand entgegengesetzt, wenn die Schienen nur durch Hakennägel befestigt sind, die neben der Schiene in die Schwelle geschlagen sind, ohne daß im Schienenfuß an dieser Stelle eine Einbuchtung für den Nagel vorhanden ist. Die Erschütterungen durch den darüber hinrollenden Zug lockern die Nägel, und die mit fortgedrängte Schiene kann nun unter dem sich dabei etwas wendenden Haken hin mit dem

Zuge ein wenig vorgleiten. Bei solcher Bahn müßten auf geradlinigen Strecken die Schienen eines Geleises auf stillstehender Erdkugel allmählich gleich weit vorrücken. Wenn aber trotz gleicher Höhenlage der beiden Schienen durch Achsendrehung der Erde auf einer Seite ein Überdruck vorhanden ist, so müssen an dieser Seite die Schienen weiter wandern, als an der andern.

Ein ungleiches Vorrücken der Schienen tritt auf der Hamburg-Harburger Eisenbahn, bei welcher die Schienen für die Hakennägel keine Einklinkungen haben, sehr deutlich hervor, dadurch begünstigt, daß der Bahnkörper über weichen Moorgrund geht. Von den 4 Schienen des Doppelgeleises schreitet jede äußere, welche für die in der einen oder der andern Richtung fahrenden Züge die rechts liegende ist, in einem Vierteljahre durchschnittlich acht Centimeter weiter vor, als jede innere; nämlich die rechte 15 ^{cm}, jede linke nur 7 ^{cm}. Und dieses Verschieben stellt sich nach jeder Bahnregulierung in etwa 3 Monaten in solcher Größe immer wieder her, so sehr man auch in der Unterbettung der Geleise durch gutes Stopfmaterial dem entgegen zu wirken sucht.*)

Die rechtsseitig stärkere Einwirkung a) auf die Lokomotivenräder und b) auf die Schienenwanderung zeigt an, daß die Erde sich ostwärts umdreht.

Anmerkung. Kanonen, die genau auf das Ziel gerichtet sind, müssen wegen der Achsendrehung der Erde stets rechts vorbei schießen. Die Abweichung, welche nach einer dem obigen Ausdrucke d entsprechenden Formel sich berechnen läßt, ist eine nicht unbeträchtliche Größe. Allein sie ist, nach dem Ausspruche eines Artillerie-Generals, nicht nachweisbar. Der Einfluß der Erdumdrehung wird völlig verdeckt durch andere Störungen, zu denen auch solche gehören, die von Tag zu Tag sich ändern und der Vorherberechnung sich gänzlich entziehen. Die Flugbahn biegt seitwärts um im Sinne der Züge des Kanonenrohrs; excentrische Lage des Geschoßschwerpunktes und Richtung des Windes bewirken vollständige Änderung der Bahn; die Explosionskraft des Pulvers ist sehr abhängig von der Luftfeuchtigkeit. — Nur dadurch, daß er aus einem seiner ganz übereinstimmend gearbeiteten Geschütze 3 oder 4 Probeschüsse abfeuern läßt, lernt der Artillerie-Offizier die Richtung kennen, welche zur Zeit diesen Kanonenrohren zu geben ist, um ein bestimmtes Ziel zu treffen.

159. 3) **Östliche Abweichung im Fallen.****) Eine Metallkugel, welche man in bedeutende Tiefe (innerhalb eines hohen Turmes oder

*) Obige Zahlenangabe lieferte der Betriebsinspektor im Jahre 1877. In neuerer Zeit hat man dort die rechts liegenden Schienen bedeutend stärker befestigt, als die linken.

**) Daß eine kleine östliche Abweichung eintreten müsse, darauf wies Newton 1679 hin.

eines Bergwerkschachtes) hinabfallen lassen will, hat an der Abfallstelle, wenn die Erde Umdrehung besitzt, eine seitliche Geschwindigkeit, welche größer ist als die des Aufschlagbodens, da dieser der Erdachse näher ist. (Nr. 156.) An einem Orte von der geographischen Breite φ beträgt bei der Fallhöhe s der Unterschied der Geschwindigkeiten

$$d = \frac{1}{u} \cdot 2\pi s \cos\varphi .$$

Derselbe ist bei hinlänglich großer Zahl für s eine nicht allzu geringe Größe. Bei den Fallversuchen, die Reich in einem Schachte bei Freiberg (südwestlich bei Dresden) in der geographischen Breite $\varphi = 50^0 53' 23''$ mit einer Fallhöhe von $158{,}54^m$ anstellte, war der Unterschied $d = 7{,}3^{mm}$. Dieser Überschuß an Geschwindigkeit bewirkt, daß die fallende Kugel ein wenig über den Fußpunkt des vorher von der Abfallstelle hinabgelassenen Lotes hinaus auf den Boden schlägt. Eine nicht rotierende Erde kann solche Abweichung nicht herbeiführen; bei vorhandener Umdrehung muß das Voreilen sich zeigen. Die mit großen Fallhöhen angestellten Versuche haben Abweichung nachgewiesen, und zwar eine östliche. Mithin dreht die Erde gen Ost sich um.

Die mit der erforderlichen Genauigkeit ausgeführten Versuche sind:

a) Benzenberg*) erhielt (im Jahre 1802) im Michaelisturme zu Hamburg bei einer Fallhöhe von $76{,}3^m$ als das arithmetische

---

*) Joh. Fr. Benzenberg, Versuche über das Gesetz des Falls, über den Widerstand der Luft und über die Umdrehung der Erde. Dortmund, Mallinckrodt, 1804. (442 Seiten.) — Die Fallversuche sind mit der höchsten Genauigkeit durchzuführen. Von den Erfahrungen, welche Benzenberg dabei machte, möge hier folgendes aufgezählt werden. Die Kugeln müssen sorgfältig gedreht, geschliffen und poliert sein. Schwimmenlassen auf Quecksilber lehrt nicht eine excentrische Lage des Schwerpunktes, weil die Reibung der (nur hierzu gefirnißten) Kugelfläche zu groß ist. Selbst die geringste Zugluft muß unterdrückt werden. Die Kugeln hatten $4{,}3^{cm}$ Durchmesser und bestanden zu gleichen Teilen aus Blei und Zinn; in jede war ein Loch von 1^{cm} Tiefe und 3^{mm} Weite eingebohrt; hierin wurde ein Seidenfaden mit einem Knoten durch zwei halbrunde hölzerne Keilchen befestigt. Mit ihm wurde die Kugel eingehängt in den an der Abfallstelle festgeschraubten zangenartigen Apparat, so daß der höchste Punkt der Kugel nur $^1/_2{}^{cm}$ unter der von der Zange ergriffenen Stelle sich befand, und unmittelbar über letzterer wurde dann der Faden abgeschnitten. Erst wenn die Kugel völlig still hing (nach etwa $^1/_4$ Stunde), wurde die Zange durch kurzen Druck geöffnet. Wich die eingekniffene Stelle des Fadens von der lotrechten Lage ab, so ließ die schiefe Spannung der Fasern die Kugel sich verirren. Die Zange öffnete sich bei der ersten Hälfte der Versuche nach Süden, bei der zweiten nach Norden. Das Abloten des Fußpunktes muß oft wiederholt werden, weil der Turm sich biegt wegen der einseitigen Erwärmung durch die Sonnenstrahlen. Nur durch das arithmetische Mittel aus vielen Versuchen kann man der Wahrheit nahe kommen. — Im Michaelisturm wurden die Fallversuche an 8 Tagen angestellt, im Bergwerke zu Schlebusch an 4 Tagen. In dem zur Zeit unbenutzten Schachte waren nicht die Erschütterungen durch vorüberfahrende Wagen;

Mittel aus 31 Versuchen*) eine östliche Abweichung von 9,0 mm. [Die geographische Breite war 53° 33′, die mit einer Tertienuhr beobachtete Fallzeit 4,06 s.]

b) Derselbe fand (im Jahre 1804) in einem Schachte des Kohlenbergwerks zu Schlebusch in der Grafschaft Mark (Provinz Westfalen) bei 85,1 m Fallhöhe als das Mittel aus 29 Kugelangaben die östliche Abweichung 11,5 mm. [$\varphi = 51^{0} 25'$ und Fallzeit $t = 4{,}26^{s}$.]

c) Reich**) bekam (im Jahre 1831) im Dreibrüderschachte bei Freiberg in Sachsen für die Fallhöhe von 158,54 m durch das arithmetische Mittel aus den Eindrücken von 106 Kugeln die östliche Abweichung 28,4 mm. [Dabei war $\varphi = 50^{0} 53' 23''$ und nach Angabe der Tertienuhr $t = 6{,}01^{s}$.]

Anmerkung. Die Ergebnisse dieser drei Messungen befinden sich in guter Übereinstimmung mit dem nach den Gesetzen der Mechanik zu berechnenden Erfolge. Die mathematische Behandlung der Aufgabe ist schwer. Während der kurzen Zeit des Fallens dürfen nämlich hier die Richtungen der Schwerkraft nicht als parallel erachtet werden, da es sich um sichere Bestimmung von Millimetern handelt. Durch den nach und nach ein wenig schräg werdenden Zug der Schwerkraft wird die östliche Geschwindigkeit vermindert und die Kugel fliegt nicht ganz so weit nach Osten, als sie mit der ursprünglichen Geschwindigkeit gekommen wäre. Die Flugbahn ist nicht ein Parabel-, sondern ein Ellipsenbogen, mit dem Ausgangspunkte als Scheitel und dem Erdmittelpunkte als entfernteren Brennpunkt. Ferner ist zu beachten, daß das vom Abfallspunkte hinab-

---

aber das hinabtropfende und zerspritzende Wasser trat zuweilen störend ein. Hier nahm er Kugeln von 3,6 cm Durchmesser, aus 2 Teilen Blei und 1 Teile Zinn mit kleinem Zusatz von Zink, und hing sie an breit geplätteten Pferdehaaren auf. Mit bewundernswerter Ausdauer hat Benzenberg die mühevollen Arbeiten ausgeführt.

*) Das arithmetische Mittel aus den Abständen der Kugeleindrücke von der durch den Lotfußpunkt gelegten Mittagslinie (nebst der Ost-West-Linie) liefert den Schwerpunkt aller Aufschlagspunkte als das Gesamtergebnis.

**) Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie, 29. Band, S. 494. Reich ließ bei der 1., 2., 3. und 6. Versuchsreihe die zinnernen Kugeln von 40,3 mm Durchmesser aus einer Zange, wie Benzenberg, abfallen, bei der 4. und 5. aber aus einem genau horizontal gestellten Ringe, der von solcher Größe war, daß die Kugeln erwärmt nicht, wohl aber kalt hindurchfielen. Die Erwärmung der Kugeln geschah in siedendem Wasser; sorgfältig abgetrocknet wurden sie auf den Ring gelegt. Die Kugeln schlugen auf den horizontalen Querschnitt eines starken Klotzes von Buchenholz. Seine Aufschlagsfläche mit den Mittelpunkten der Kugeleindrücke, nebst Angabe des Meridians und der im Lotfußpunkte auf ihm rechtwinkligen Linie, ist in $^{1}/_{4}$ der natürlichen Größe im 28. Bande der Annalen in Figur 16 auf Tafel V dargestellt. Ihr Anblick ist überraschend. — Reich, Fallversuche über die Umdrehung der Erde, Freiberg 1832.

gelassene Senklot nicht nach dem Erdmittelpunkte hinweist; es weicht unten, wegen der Schwungkraft, nach Süden ab. Die Berechnung der Größe der östlichen Abweichung kann hier nicht durchgeführt werden, weil die dazu nötigen Vorkenntnisse noch fehlen.*)

160. 4) **Die Passatwinde.** Beim Äquator wird die Luft durch die Sonnenstrahlen am stärksten erwärmt, also am meisten ausgedehnt, folglich in jeder Schicht leichter als die Luft in gleicher Höhe über den nördlich und südlich benachbarten Gegenden. Um das gestörte Gleichgewicht im Luftmeere wieder herzustellen, fließt die dichtere Luft dorthin. Wenn die Erde nicht rotierte, müßte dieser Zufluß in der Richtung der Meridiane erfolgen, also auf der nördlichen Halbkugel als reiner Nord-, auf der südlichen als Südwind auftreten. Dreht sie sich aber in 86164 Sekunden um, so haben die dem Äquator näheren Orte größere Umdrehungsgeschwindigkeit, auf dem 30sten Parallelkreise 402^{m}, auf dem 20sten 437^{m}, auf dem 10ten 457^{m}. Mit dem Unterschiede der Geschwindigkeiten läuft dann der Erdboden unter den ankommenden Luftteilchen, die in ihrer geringeren Drehungsgeschwindigkeit beharren, fort und es muß, wenn die Umdrehung von West her stattfindet, eine Windfahne auf der nördlichen Halbkugel Nord-Ost-, auf der südlichen Süd-Ost-Wind angeben; rotiert sie aber von Ost her, so wird die Luftströmung auf der nördlichen Halbkugel als Nord-West-, auf der südlichen als Süd-West-Wind erscheinen.

Nördlich vom Äquator weht etwa vom 30sten bis zum 10ten Parallelkreise beständig der Nord-Ost-Passat, und vom 20sten Grade südlicher Breite bis zum Äquator der Süd-Ost-Passat. Folglich dreht die Erde von West her sich um.

Zwischen den beiden Regionen der Passate liegt die Zone der Windstillen und der veränderlichen Winde, da dort die Luftströme sich aufstauen. Hier nimmt die Luft die Umdrehungsgeschwindigkeit des Äquators, 465^{m}, an, steigt durch die Einwirkung der Sonnenwärme, begleitet von vielem Wasserdunst, empor und fließt in der

*) Die in die Formel tretenden Größen sind oben nach den Beobachtungen alle angegeben. Olbers hat (in Benzenbergs Buch, Seite 378) aus dem Fallgesetze mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung in einfacher Weise entwickelt für die östliche Abweichung den Ausdruck

$$x = \frac{t}{u} \cdot \tfrac{4}{3}\,\pi \cos\varphi\,(s - \tfrac{1}{2}\,\delta).$$

Dabei bedeutet δ die Strecke, um welche der Fall im leeren Raume für die beobachtete Zeit t, $\frac{1}{2}gt^2$, durch den Widerstand der Luft bis auf s vermindert ist. — Ohne höhere Mathematik, aber auf schwierigem Wege, lösen durch die Flugbahn die Aufgabe Schellbach und Arendt (Neue Elemente der Mechanik, Berlin, G. Reimer, 1860, von Seite 270 bis 281), ausgehend von Newtons Gravitationsgesetz und dem ersten und zweiten Keplerschen Gesetze.

Höhe teils nach der nördlichen, teils nach der südlichen Halbkugel ab. Diese oberen Luftströmungen laufen über den Passaten hin in gerade entgegengesetzter Richtung, da ihre große Rotationsgeschwindigkeit sie voreilen läßt. Sie bleiben aber in der Höhe, je nach dem Stande der Sonne im Winter oder im Sommer, nur bis etwa zum 30sten oder 45sten Breitengrade; denn von da an wird das Strombett, wie die nach den Polen zusammenlaufenden Meridiane zeigen, schnell enger. Über der nördlichen gemäßigten Zone drücken die sich zusammendrängenden Luftmassen des Oberstromes an einzelnen Stellen sich ein in den Polarstrom, der zum Äquator will, und kommen zu uns als warmer Südwest-Wind; und beide Strömungen fließen in veränderlichen Betten nebeneinander her. Leistet der Polarstrom dem warmen genügenden Widerstand, so unterdrückt er dessen nördlichen Lauf und macht den Südwest-Wind zum regenbringenden Westwinde; tritt er ihm noch kräftiger entgegen, so wird aus beiden ein Nordwest-Wind, und erst nach gänzlichem Verdrängen kommt trockener Nordwind, der bald bei völlig aufgeklärtem Himmel in Nordost- und Ost-Wind übergeht, weil diese Luft weiter herkommt aus Gegenden, deren Umdrehungsgeschwindigkeit schnell viel kleiner wird: bei 60° der Breite 232^m, bei 70° 159^m, bei 80° nur 81^m, während sie in Berlin 283^m, in München 310^m beträgt. (Nr. 156.) Daß die Luft aus weiterer Ferne kommt, wird im Winter dadurch bestätigt, daß nicht der Nord-, sondern der Nordost- und der Ost-Wind uns die kälteste Luft bringt. — Wird darauf der Äquatorialstrom wieder kräftiger, so schiebt er jenen zurück als Südost-Wind, und tritt nach Übergang durch Süd bald als Südwest-Wind ungestört hervor. Die Änderung der Windrichtungen geht also, wegen der Erdumdrehung, bei uns vor sich in dem Sinne, wie der Uhrzeiger läuft, in der südlichen gemäßigten Zone entgegengesetzt, wie die entsprechende Betrachtung erkennen läßt. Dieses Ergebnis heißt das Dovesche Drehungsgesetz des Windes.*)

Während des Sommers wird die Zone des Nordost-Passates südlich von Asien unterbrochen. Im Winter ist das Meer wärmer als das Festland, und es weht vom Oktober bis März in dem indischen und chinesischen Meere regelmäßig der Nordost-Passat. Aber im Sommer strahlt dieses größte Festland die Sonnenwärme kräftiger zurück als das Meer, und es wird dort die Luft wärmer als über dem Wasser. Deshalb strömt vom April bis September die feuchte Luft vom Meere zum Lande und es folgt ihr die Luft des benachbarten Teiles des Südost-Passates von der südlichen Halbkugel her. Wegen der größeren Umdrehungsgeschwindigkeit am Äquator empfängt das Land den von Süden ausgehenden Luftstrom als

---

*) Heinrich Wilhelm Dove, geb. 1803, Okt. 6 in Liegnitz, gest. 1879, Apr. 4 in Berlin.

Südwest-Wind. Diese halbjährig umsetzenden Winde heißen **Monsune**, vom persischen Namen Monzum, d. h. Jahreszeitenwinde, denn sie bringen die Regenzeit und die trockene Zeit (Sommer und Winter).

[Ein fünfter Beweis für die Umdrehung der Erde kommt in Nr. 239.]*)

§ 16. Umdrehung der Sonne.

161. Sonnenflecke. Wenn man ein Fernrohr, vor dessen Okular zum Schutz für das Auge ein tief dunkles Glas geschraubt ist, auf die Sonne richtet, indem man das Rohr so dreht, daß sein Schatten nur ein Kreis wird, so sieht man auf der Sonnenoberfläche fast immer kleine Flecke, die vereinzelt oder in Gruppen bei einander sind. Man kann dieselben auch mehreren Beobachtern zugleich zeigen, wenn man das Okularstück (ohne das Blendglas) so weit am Rohre herauszieht, bis das vom Objektivglase hervorgerufene Bild nun **vor** der Sammellinse entsteht; dann wirken die beiden Linsen des Okularstücks wie die einer Zauberlaterne und liefern vom Sonnenbilde, wie bei der Laterne von dem Glasbilde, auf einer in geringer Entfernung gehaltenen weißen Papptafel ein objektives Bild. Es ist dasselbe die Umkehrung des umgekehrten ersten Bildes, also ein aufrecht stehendes Bild; da man aber bei seiner Besichtigung der Sonne den Rücken zuwendet, so ist in ihm rechts und links vertauscht. Diese Betrachtungsweise ist auch darum besser, als jene mit dem Blendglase, weil man so auch die Fackeln, heller leuchtende Wolken, sieht, sowie die Granulationen, weiße Fleckchen von körnerartigem Aussehen, mit denen die ganze Sonnenoberfläche bedeckt ist.**)

---

*) Der erste, welcher die tägliche scheinbare Bewegung des Himmels offen und deutlich erklärte durch Achsendrehung der Erdkugel von Westen her, war **Herakleides**, von Herakleia Pontika, seiner Vaterstadt, Pontikos genannt. Er begab sich (um 360 vor Chr.) in seinen Jünglingsjahren nach Athen und wurde einer der berühmtesten Schüler Platons, von dem er wahrscheinlich Anregung dieses Gedankens erhalten hatte. (S. die Note am Ende von Nr. 175.) Dabei hebt er ausdrücklich hervor, daß die Dauer der Erdumdrehung etwas kleiner ist, als ein Sonnentag. (Seite 47 und Beleg 28 auf Seite 99 der historischen Untersuchungen von Schiaparelli [sprich: Skiap.], Die Vorläufer des Kopernikus im Altertum. Ins Deutsche übertragen von Curtze. Leipzig, 1876. Quandt u. Händel. 109 Seiten.)

**) Die objektive Darstellung (schon 1613 vom Pater Scheiner in Ingolstadt angewandt) eignet sich nicht dazu, das Bild auf dem Papierblatte mit Bleistift nachzuzeichnen, weil es mit der Sonne zu schnell fortrückt. Dieses Zeichenverfahren kann nur dann mit gutem Erfolge angewendet werden, wenn man zum Fernrohre ein großes Uhrwerk besitzt, welches dasselbe mit dem an ihm befestigten Zeichenbrettchen in richtiger Geschwindigkeit der Sonne nachdreht.

Der Verfasser hat seine zahlreichen Zeichnungen von der Sonne in folgender

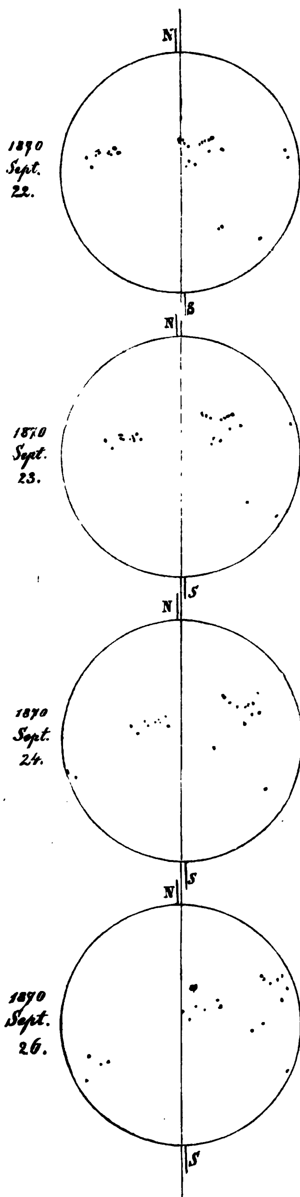
Für die an den folgenden Tagen wieder anzustellende Beobachtung ist daran zu denken, daß die Sonne mit ihren Flecken, wie

Weise angefertigt. In dem Okularstück des in Figur 19 (Nr. 23) dargestellten Theodoliten befindet sich links eine sehr feine Säge, von deren mittelstem Zahne der Querfaden des Fadenkreuzes ausgeht; der vierte Zahn nach oben und unten ist durch ein feines Loch markiert. Richtet man dieses Fernrohr zu Anfang des Frühlings oder des Herbstes auf die Sonne, zu welcher Zeit ihr scheinbarer Durchmesser 32 Bogenminuten beträgt, so reicht ihr senkrechter Durchmesser genau von der Spitze des einen markierten Zahnes bis zu der des andern; folglich bedecken 8 Zacken 32′, von Spitze zu Spitze sind also je 4′, und an den inneren Ecken der Zahneinschnitte denkt man die Nummern 2, 6, 10 .... Mithin liest man mit dieser Einrichtung Bogenminuten ab. — Zur Sonnenbeobachtung wird gegen Mittag das Stativ so aufgestellt, daß 2 Füße rechts und links in gleicher Entfernung von der Mittagslinie stehen, der dritte wird auf der Nordseite in der Mittagslinie hin so weit zurückgezogen, bis die Vertikalachse des Theodoliten der Weltachse parallel läuft; dann verfolgt das am Höhenkreise festgeklemmte Fernrohr beim Drehen der zum Grundkreise gehörigen Mikrometerschraube die in ihrem Parallelkreise fortschreitende Sonne. Da solche Aufstellung nur unvollkommen erreicht wird, beginnt man erst wenige Minuten vor dem Augenblicke der Kulmination, weil dann die Höhen sich so gut wie gar nicht ändern, die Ordinaten der einzelnen Sonnenflecke mittels jener Säge-Einschnitte abzulesen, nachdem man den Querfaden zum horizontalen Durchmesser des Sonnenbildes gemacht hat, und zeichnet sie in einen Kreis ein, der schon vorher durch horizontale Sehnen, entsprechend den Abständen von 4 zu 4 Bogenminuten, eingeteilt ist. Die Abscissen werden darauf mit Hilfe der Zeit bestimmt. Von den letzten 10 Sekunden einer Minute zählt man 5 mit dem Blick auf die Uhr, die anderen, indem man, durchs Fernrohr sehend, mittels derselben Mikrometerschraube den senkrechten Faden zur Tangente des linken Sonnenrandes macht mit Beginn der neuen Minute. Dann zieht im umkehrenden Fernrohre die Sonnenscheibe von rechts nach links hinter dem Vertikalfaden in 128 Sekunden (zu Anfange des Frühlings oder des Herbstes) vorbei. Sobald ein Sonnenfleck hinter den Faden treten will, sieht man auf den Sekundenzeiger und notiert schnell die erhaltene Zahl bei dem gezeichneten Flecke. Ist währenddessen ein Fleck ungesehen vorübergegangen, so nimmt man ihn beim nächsten Durchgange mit. Das ganze Beobachten darf aber nicht zu lange dauern, weil bei der nun wieder absteigenden Sonne der anfangs horizontale Durchmesser, auf dem die gemessenen Ordinaten senkrecht standen, bei ungenauer Aufstellung des Theodolitenstativs nicht mehr vom Querfaden bedeckt wird. — Nach diesen Notizen wird nachher eine genaue Zeichnung ausgeführt. In Figur 66 und 67 haben die Kreise 32^{mm} Durchmesser. Auf jedes Millimeter des horizontalen Durchmessers kommen also 4 Sekunden der Durchgangszeit. Von links an werden über oder unter der betreffenden Stelle die Punkte in der auf der Hilfsfigur angegebenen Höhe eingezeichnet. So entsteht das Bild der Sonnenflecke, wie man es im umkehrenden Fernrohre sah. Um es in seiner natürlichen Stellung zu haben, braucht man das Blatt nur umzudrehen, so daß die Schrift des beigefügten Datums auf dem Kopfe steht.

Will man die Standorte eines Fleckes, an denen man ihn in einer Reihe von Tagen sah, alle in einer Figur darstellen, so muß man in den einzelnen Zeichnungen den Durchmesser angeben, welcher in der Ebene der Ekliptik sich befand, und für diesen als Abscissenachse das Übertragen des Ortes in die Hauptfigur vornehmen. In dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke, welches eingeschlossen wird von der Ekliptik, dem Äquator und dem Meridiane, kennt man die Schiefe der Ekliptik ε und die Länge der Sonne l, und findet den Winkel x zwischen der Ekliptik und dem abwärts gehenden Teile des Meridians auf dessen Westseite aus $\cot g\, x = \operatorname{tg} \varepsilon \cos l$. Ist die Sonne nahe dem Äquator, so wird die Änderung des Winkels x so gering, daß in allen Zeichnungen $90^0 - \varepsilon$ für x genommen werden kann.

man an den Sternbildern sieht, der Richtung der Himmelsmeridiane gemäß, zu anderen Tagesstunden eine verschiedene Lage zum Horizonte hat. Man muß also das Beobachten stets wieder zu derselben Stunde vornehmen, am besten um die Kulminationszeit. Die dabei allerdings noch vorhandene Änderung in der Richtung der Ekliptik ist in den nächsten Tagen zu gering, als daß sie ohne Messen bemerkt werden könnte.

Bei den so in derselben Stellung der Sonne wiederholten Beobachtungen sieht man sofort, daß alle Flecke ihre Plätze verändern in der Weise, daß die seitwärts dem einen Sonnenrande nahen sich weiter von ihm entfernen, die gegenüberstehenden dem andern Rande näher kommen. Man findet, daß die großen Flecke, welche von einem Hofe, einem grauen Rande, umgeben sind, sich in anderer Form darstellen; mitten auf der Sonne kreisrund, erscheinen sie, dem Rande zurückend, mehr und mehr länglich. Auch fällt bei den folgenden Beobachtungen auf, daß einige Flecke sich aufgelöst haben, andere neu entstanden sind.



Figur 66.

Sonnenflecke vom 22. bis 26. September 1870.

162. Die Sonne ist eine sich drehende Kugel. Alles dies tritt in besonders günstiger Weise vor Augen in den vier Darstellungen der Sonne (Figur 66), welche der Verfasser am 22., 23., 24. und 26. September 1870 gezeichnet hat.*)

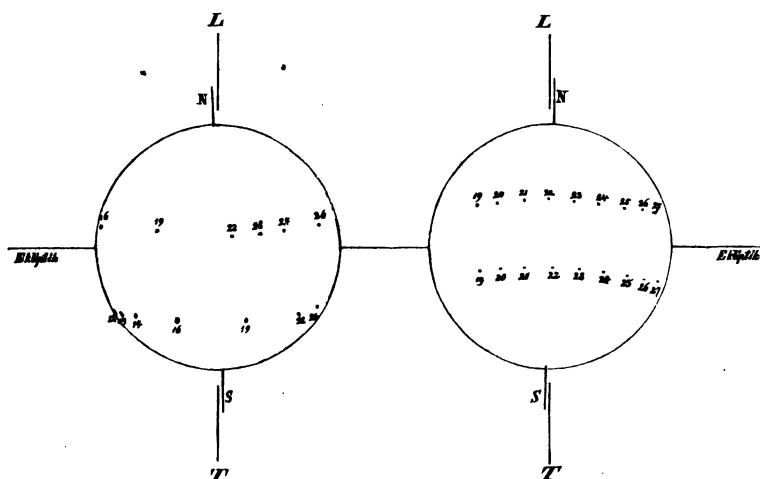
---

*) An demselben Tage, an welchem die erste dieser Zeichnungen angefertigt ist (22. Sept. 1870), wurde die Sonne in New-York von Rutherfurd photographiert. Die Aufnahme ist, photographisch vervielfältigt, als Titelbild beigegeben dem großen Werke von Secchi, die Sonne, in der

Verfolgt man, mit dem Blick über die vier Bilder von oben nach unten gehend, die Stellung jeder der beiden großen Gruppen der Sonnenflecke, beachtet auch bei der rechten die Formveränderung, so sieht man sehr deutlich, daß die Bilder vollkommen übereinstimmen mit dem Anblick einer Kugel, welche langsam mit ihrer Westseite vorn herum nach Osten sich dreht.

Der Fleck, welcher in den Zeichnungen vom 22. und 23. September am südlichsten steht, war ungewöhnlich groß gewesen, so daß er, am Sonnenrande erscheinend, bereits am 12. September auffiel. Nach dem 16. September wurde er kleiner, so daß er den 24. am Rande nicht mehr wahrgenommen werden konnte. Seine Stellungen in den Zwischentagen, an welchen mittags das Beobachten nicht durch Wolken verhindert wurde, sind in Figur 67a in eine Zeichnung zusammengetragen; die darunterstehenden Zahlen geben das Datum

deutschen Bearbeitung von Schellen (Braunschweig, George Westermann, 1872). Dieses Bild ist in der Stellung gelassen, wie es bei der Aufnahme kam; unsere Zeichnung ist so gedreht, daß der Ekliptikdurchschnitt der Sonne, welche an diesem Tage durch den Äquator ging, wagerecht liegt. Hinter Seite 18 folgen in jenem Werke die auch von Rutherfurd vom 19. bis zum 24. und am 26. September aufgenommenen Photographien des Doppelfleckes, welcher in der linken Gruppe voranschreitet. Am 19. Sept. war er als ein Fleck am Sonnenrande zum Vorschein gekommen, und wurde durch einen am 22. Sept. entstandenen hellen Streifen in zwei Teile zerlegt, die in den folgenden Tagen immer weiter auseinander traten und ihrer Auflösung entgegengingen.



Figur 67a.

Standorte zweier Sonnenflecke vom 12. bis 26. Sept. 1870.

Figur 67b.

Standorte zweier Sonnenflecke vom 19. bis 27. März 1871.

Die Sonne ist eine sich drehende Kugel.

der betreffenden Stellung an. Die in derselben Figur darüber befindliche Folge von Punkten bezeichnet für den untersten der großen Flecke der rechten Gruppe die Orte, an welchen er an den Beobachtungstagen vom 16. bis 26. September gesehen wurde. Beide Wege stellen sich dar als Parallelkreise einer Kugel, welche von Westen über Süden nach Osten sich dreht.

Die Bogen krümmen sich im September abwärts; also liegt dann der Nordpol der Umdrehungsachse uns zugewandt. Ein halbes Jahr später, im März, machen uns, wie die ebenso entworfene Figur 67 b für den 19. bis 27. März 1871 zeigt, die aufeinander folgenden Orte jedes Sonnenflecks Bogen von Parallelkreisen der Sonne sichtbar, die sich aufwärts wenden, — ein Zeichen, daß die Sonne, wie es nach dem Beharrungsgesetze sein muß, in derselben Achsenlage fortrotiert. Dies wird nach folgender Überlegung auch aus den Figuren ersichtlich. Die Achse NS ist nach der Lage der Parallelkreise in beiden Figuren angegeben; das auf der Ebene der Ekliptik im Sonnenmittelpunkte errichtete Lot LT zeigt, daß NS gegen diese Ebene ein wenig geneigt ist. Im Anblick der schrägen Stellung wechselt rechts und links, wenn man sie, wie es im März, ein halbes Jahr nach dem September, der Fall ist, von der entgegengesetzten Seite her ansieht. Betrachtet man den Rücken der Figur 67 a, indem man das Papier gegen das Licht hält, so erblickt man das Nord-Ende der Achse ebensoweit rechts von LT, wie es Figur 67 b zeigt. Die Sonnenachse behält also ihre Lage. Darum erscheint in der Mitte der Zwischenzeit, Anfang Dezember, solche Folge der Sonnenfleck-Orte weder nach unten, noch nach oben gekrümmt, also geradlinig, von links unten nach rechts oben steigend; wie man es erkennt, wenn man sein Auge mitten zwischen Figur 67 a und b in der Ebene des Papiers denkt und die eine oder die andere Zeichnung ansieht. Versetzt man sich dagegen nach außen, rechts oder links in die Zeichenebene, so gehen die Reihen von links nach rechts abwärts, wie die Erscheinung Anfang Juni auftritt.

Man bekommt (nach Spörers Angabe) den Winkel LMN (M bezeichnet den Sonnenmittelpunkt) am größten, wenn die Sonnenflecke des 6. Dezember mitten in der Figur sind; man hat dann also den Winkel LMN nicht mehr perspektivisch verkleinert, sondern in seiner vollen Größe quer vor sich, die, gemessen, 7° ergiebt. Am 6. Dezember verdeckt uns die Sonne den 255sten Grad der Ekliptik; das Nord-Ende ihrer Achse geht links von LT ab, neigt sich also hinüber nach der Stelle der Ekliptik, die dann links liegt, und das ist (90° mehr) der 345ste Grad der Ekliptik.

Anmerkung. Daß die Sonnenkugel von einer lichtverschluckenden Atmosphäre umgeben sein muß, nimmt man bei der objektiven Darstellung des Sonnenbildes sehr deutlich wahr an dem grau-

bräunlichen Farbetone des Sonnenrandes. Denn die von den Randgebieten zu uns gehenden Strahlen haben, indem sie die Sonnenlufthülle flach durchstreichen, einen längeren Weg durch die absorbierende Luftschicht, leuchten also matter, als die von der Mitte ausgestrahlten.

163. Die Umdrehungszeit der Sonne zu bestimmen, nehmen wir den unteren Fleck der Figur 67 b, weil bei diesem kleinen Flecke die Punkte in der Zeichnung sehr genau auf einen Bogen gekommen sind. Der Radius seines Parallelkreises, dessen Mittelpunkt wir mit C bezeichnen wollen, ist $15,5^{mm}$, der Abstand des Punktes 19 von der Achse $9,3^{mm}$ und der des Punktes 27 $14,5^{mm}$; mithin haben wir durch

$$\sin\alpha = \frac{9,3}{15,5} \qquad \text{und} \qquad \sin\beta = \frac{14,5}{15,5}$$

den Winkel $19\,C\,27 = \alpha + \beta = 106,2^0$.

Die Sonne ist aber in den 8 Tagen vom 19. bis zum 27. März um $8 \cdot \frac{360}{365\frac{1}{4}}$ Grade $= 7,9^0$ am Himmel nach links gerückt. (Man zeichne die beiden Stellungen des Kreises und ziehe von ihren Mittelpunkten C_{19} und C_{27} gerade Linien zur Erde.) Legt man nun durch den Ort, welchen der Mittelpunkt C am 27. März einnahm, eine Ebene parallel der ersten Bildfläche, so schließt sie mit der neuen einen Winkel von ebensoviel Graden ein; folglich ist die Stelle, welche der Punkt 19 in der ersten Darstellung markierte, auch um $7,9^0$ nach hinten gerückt, und darum ist der wirkliche Drehungswinkel der Sonne, $8 \cdot \frac{360^0}{x}$, um $7,9^0$ größer, als $\alpha + \beta$.*) Man erhält aus $\frac{2880}{x} = 114,1$ die Umdrehungszeit $25\frac{1}{4}$ Tage.

164. Schlußbemerkungen. Es liegt außer dem Gebiete dieses Lehrbuches eines Geographie-Abschnittes, auf weitere Betrachtungen über die Sonnenflecke (Abkühlungsprodukte) einzugehen. Es mag nur noch erwähnt werden, daß die Häufigkeit der Sonnenflecke einem periodischen Wechsel von 11 Jahren unterworfen ist in der Weise, daß einem Jahre kleinster Fleckenzahl schon in $4\frac{1}{2}$ Jahren ein Maximum folgt, diesem aber erst in $6\frac{1}{2}$ Jahren ein neues Minimum. Das Jahr 1870, aus welchem obige Zeichnungen stammen, war eines mit größter Fleckenzahl.

*) Eine Betrachtung, welche davon ausgeht, daß die Erde um $7,9^0$ fortgerückt ist, führt leichter auf dasselbe Ergebnis.

Was wir aus mancherlei Erscheinungen in betreff der Gestalt und Umdrehung bei der Erde geschlossen haben, tritt uns hier, als in der Natur wirklich vorhanden, deutlich vor Augen. Auch die Richtung der Umdrehung stimmt bei der Sonne und Erde überein, — von Nord gesehen, gegen den Uhrzeigerlauf.

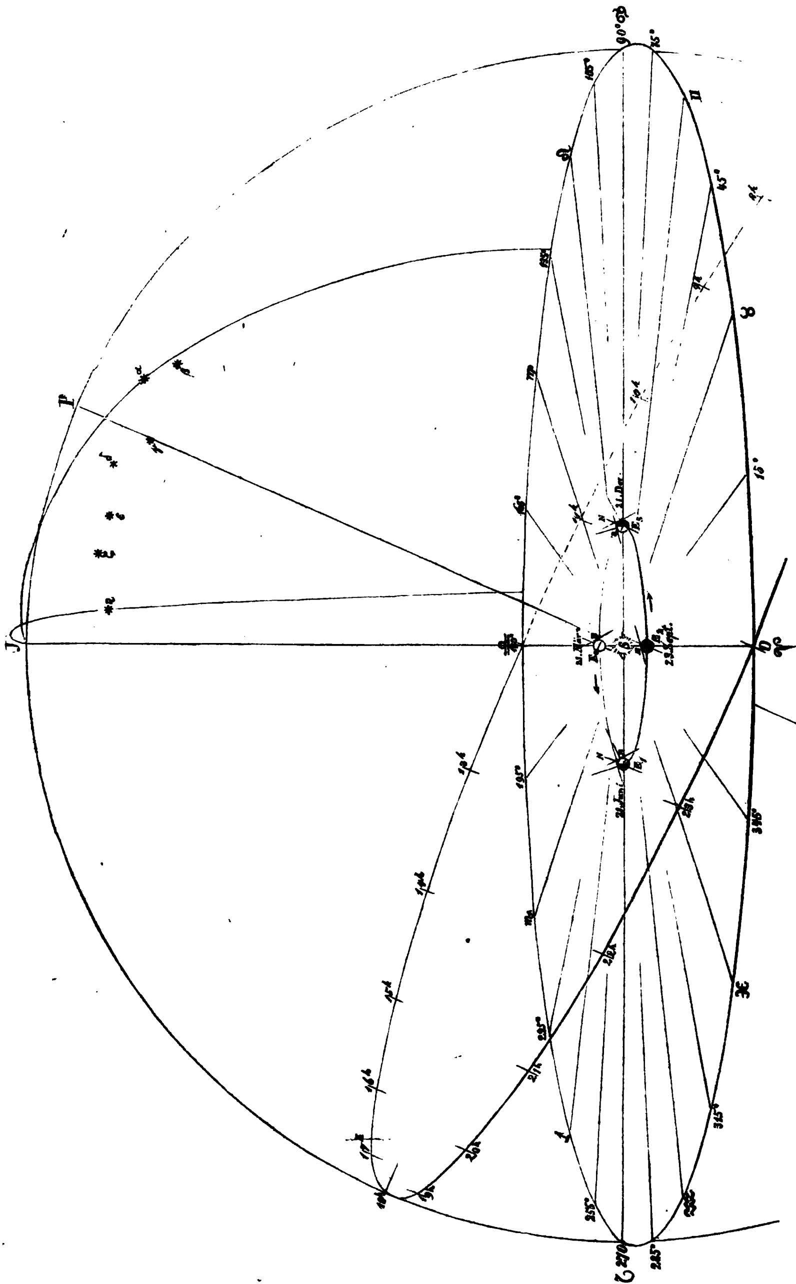
Unter den Sternen erster Größe zeichnen sich Jupiter und Saturn dadurch aus, daß sie in ruhigem Lichte leuchten. Durch ein Fernrohr betrachtet, bleiben sie nicht helle Punkte, sondern erscheinen wie ein kleiner Vollmond. Sehr große Fernrohre lassen wolkenartige Streifen von verschiedenfarbiger Helligkeit erkennen. In ihnen markieren sich zuweilen recht helle Flecke und man bemerkt dann bald, daß dieselben wie die Sonnenflecke von dem einen Rande sich entfernen, dem anderen sich nähern und nach wenigen Stunden am ersten Rande wieder zum Vorschein kommen. Daraus hat man ersehen, daß Jupiter schon in kaum 10 Stunden, Saturn in $10\frac{1}{4}$ Stunden eine Achsendrehung, in derselben Richtung wie Sonne und Erde, vollzieht. Mikrometermessungen ergeben, daß der Polarhalbmesser bei Jupiter um $\frac{1}{15}$, bei Saturn um $\frac{1}{10}$ kürzer ist, als der Äquatorialhalbmesser.

B. Umlauf.

§ 17. Lauf der Erde um die Sonne.

165. Einleitung. Die Erscheinung, daß die Sonne während eines Jahres der Reihe nach alle Sternbilder des Tierkreises uns verdeckt, kommt ebenso zu stande, wenn wir uns denken, daß die Sonne ihren Ort behält, und die Erde in derselben Weise um die Sonne läuft. Denn wenn man um eine mitten im Zimmer stillstehende Person rings herumgeht (in der Richtung gegen den Uhrzeigerlauf) und die Stellen der Wände beachtet, welche vom Kopfe derselben dabei verdeckt werden, so sieht man, daß sie sich aneinander reihen zu einer in derselben Richtung herumgehenden Folge; und dies sieht man genau ebenso, wie wenn man selber in der Mitte des Zimmers bleibt und jene Person in derselben Richtung um sich herumwandern läßt. — Betrachtet man hiernach in Figur 68 entweder S als die ruhende Erde und E_0, E_1, E_2, E_3 als die umlaufende Sonne, oder S als Sonne und $E_0 \ldots E_3$ als fortschreitende Erde, so sieht man von der Erde aus in beiden Fällen die Sonne vorüberziehen vor den Zeichen der Ekliptik.

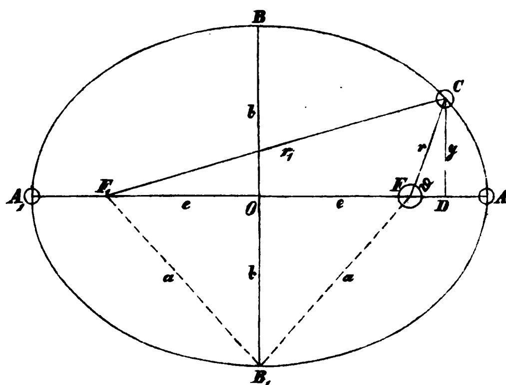
Die Bahn, in welcher entweder die Sonne um die Erde, oder die Erde um die Sonne läuft, hat an den einzelnen Stellen ungleiche Entfernungen vom stillstehenden Körper, weil die scheinbare Größe



Figur 68. Lauf der Erde um die Sonne.

der Sonne sich ändert. Zu Anfang des Jahres sehen wir sie am größten, in der Mitte des Jahres am kleinsten; und an je zwei Tagen, die gleichen Abstand vom 1. Januar oder vom 2. Juli haben, wird die scheinbare Größe der Sonne dieselbe. Daraus folgt, daß die Bahn symmetrisch läuft zu beiden Seiten der Linie, welche die Standorte des 1. Januar und 2. Juli verbindet. Die einfachste geschlossene Kurve, welche diese Eigenschaft besitzt, ist die Ellipse. (Der Kreis ist unter den Ellipsen als besonderer Fall enthalten.) Es liegt also nahe, zu prüfen, ob bei der Annahme einer elliptischen Gestalt der Bahn an allen Stellen der scheinbare Halbmesser der Sonne mit den Beobachtungen übereinstimmend sich ergiebt.

166. Die Excentricität der Bahn. Die Kurve in Figur 69 ist eine Ellipse mit den Brennpunkten F und F_1; $OF = OF_1 = e$, $OA = OA_1 = a$; das Verhältnis $\frac{e}{a}$, welches wir mit ε bezeichnen, heißt die numerische Excentricität. Man stelle sich entweder in F die Erde und in A, C, A_1 die Sonne vor, oder in F die Sonne und auf dem Umfange die Erde. Nun denke man um den Erdmittelpunkt mit FA_1 als Radius einen Kreis beschrieben, und auf dessen Peripherie, wie auf eine Schnur, Sonnenkugeln als Perlen aufgereiht und durch ihre Mittelpunkte und Berührungspunkte vom Kreismittelpunkte her Linien gezogen; dann geben die von je zwei benachbarten Linien eingeschlossenen Winkel die scheinbare Größe ϱ_2 des Sonnenradius für den 2. Juli (in Winkelsekunden) an. Demnach läßt sich die Länge der Schnur auf zwei Weisen ausdrücken:



Figur 69. Ellipse.

$$2\pi(a + e) = \frac{1296000}{\varrho_2} R,$$

wobei R die wirkliche Größe des Sonnenradius für das beliebig zu wählende Längenmaß bezeichnen möge. Ebenso für den 1. Januar

$$2\pi(a - e) = \frac{1296000}{\varrho_1} R.$$

Nachdem die erste Gleichung durch diese dividiert ist, geht hervor

$$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2}.$$

Für den 1. Januar (1874) $\varrho_1 = 16' 17{,}59''$ und für den 2. Juli $\varrho_2 = 15' 45{,}36''$ liefern die Excentricität der Bahn

$$\varepsilon = 0{,}0167607,$$

welcher Bruch nur wenig größer ist, als $\frac{1}{60}$.

Anmerkung. Die Excentricität nimmt sehr langsam ab. Sie betrug im Jahre 1800 0,0167921.

167. Die Bahn ist eine Ellipse. Für irgend einen Punkt C der Ellipse hat man (mit $CF_1 = r_1$, $CF = r$, $OD = x$, $CD = y$):

$$r_1^2 = (x + e)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad r^2 = (x - e)^2 + y^2.$$

Subtrahiert man von der ersten Gleichung die zweite, so folgt

$$(r_1 + r)(r_1 - r) = 4ex.$$

Nach der Definition der Ellipse ist aber

$$r_1 + r = 2a$$

mithin kommt aus der vorhergehenden Gleichung

$$r_1 - r = 2\frac{e}{a}x = 2\varepsilon x$$

also wird

$$r = a - \varepsilon x.$$

Statt x werde nun der Winkel $AFC = \vartheta$ eingeführt durch

$$x - e = r \cos \vartheta.$$

Die dann entstehende Gleichung

$$r(1 + \varepsilon \cos \vartheta) = a - \varepsilon e$$

lautet für den Anfangspunkt A

$$(a - e)(1 + \varepsilon) = a - \varepsilon e,$$

so daß man durch Gleichsetzen hat

$$(a - e)(1 + \varepsilon) = r(1 + \varepsilon \cos \vartheta).$$

Nach obiger Erörterung über die Perlschnur ist aber

$$2\pi(a - e) = \frac{1296000}{\varrho_1} R \quad \text{und ebenso bei C} \quad 2\pi r = \frac{1296000}{\varrho} R.$$

Setzt man dies und den Ausdruck für ε in die vorstehende Gleichung ein, so geht nach Fortheben hervor

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) + \tfrac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho_2)\cos\vartheta$$

eine einfache Formel, welche den scheinbaren Halbmesser der Sonne an jeder Stelle der Bahn, wenn dieselbe eine Ellipse ist, den Beobachtungen gemäß liefern muß. Aus der gemessenen Rektascension und Deklination kennt man die Länge l der Sonne für jeden Tag (Nr. 94), folglich hat man nun die Anomalie ϑ als Centriwinkel zum Überschuß der Länge gegen die vom 1. Januar, wie man aus Figur 68 für beide Umlaufsweisen leicht ersieht.

Man berechne irgend welche der folgenden 12 Beispiele.

Nr.	Länge der Sonne 1874 Januar 1 $l_0 = 280^0\,56'\,47''$.				
	1874		Länge der Sonne mittags mittlerer Zeit in Berlin	Der scheinbare Halbmesser der Sonne wird nach der Formel	Der scheinbare Halbmesser der Sonne war nach dem astron. Jahrbuche
1	Januar	30	310° 27′ 47″	16′ 15,50″	16′ 15,5″
2	Februar	26	337 43 54	16 10,30	16 10,3
3	März	27	6 37 40	16 2,69	16 2,7
4	April	19	29 12 38	15 56,42	15 56,4
5	Mai	10	49 35 2	15 51,41	15 51,4
6	Juni	7	76 28 16	15 46,81	15 46,8
7	Juli	22	119 24 24	15 46,19	15 46,2
8	August	5	132 47 38	15 47,79	15 47,8
9	September	14	171 26 1	15 56,09	15 56,1
10	Oktober	9	195 59 0	16 2,89	16 2,9
11	November	8	225 54 15	16 10,71	16 10,7
12	Dezember	4	252 10 46	16 15,60	16 15,6

Die durchgehende Übereinstimmung der Rechnungsergebnisse mit der wirklichen scheinbaren Größe der Sonne zeigt, daß die Bahn eine Ellipse ist.

168. Die elliptische Bahn ist sehr nahe kreisrund. Um von der Form dieser Ellipse eine richtige Vorstellung zu bekommen, suchen wir den Überschuß der großen Halbachse a über die kleine, welche (Figur 69) $b = \sqrt{a^2 - e^2} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ ist, und berechnen das Verhältnis

$$(a - b) : a = 1 - \sqrt{(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)} = 0{,}0001406\ (0{,}000143).$$

Man denke mit $a = 1$ Meter Radius einen Kreis beschrieben, um in ihn eine Ellipse von der Form der Bahn hineinzulegen. Die Ellipse soll die große Halbachse auch $a = 1$ Meter erhalten. Nun lehrt die Kleinheit des Rechnungsergebnisses: die Ellipse muß sich dem Kreise so eng anschmiegen, daß man sie von der Peripherie nicht unterscheiden kann. Denn an den beiden Stellen größter Abweichung, an den Enden der kleinen Achse, tritt sie von der Kreisperipherie nur $0{,}14^{mm}$, also höchstens $\frac{1}{7}$ Millimeter, zurück.

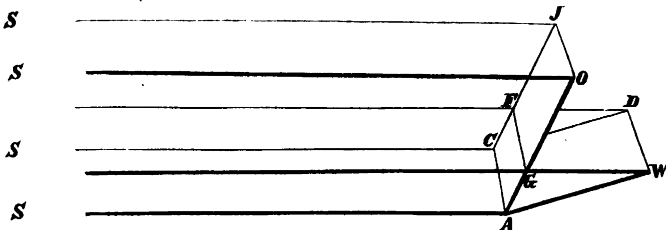
Die Bahn kommt folglich der Rundung eines Kreises so nahe, daß man zu ihrer Darstellung, selbst auf einer großen Wandkarte, einen Kreis beschreiben muß, da die Abweichung von ihm in dieser Größe nicht gezeichnet werden kann. Die Brennpunkte wird man angeben, indem man auf einem Durchmesser 2a vom Mittelpunkte aus $\frac{1}{60}$a nach beiden Seiten abgrenzt. Bei jenem a = 1^m kommen die Brennpunkte vom Mittelpunkte in die Entfernung $e = \varepsilon a = 16\frac{3}{4}^{mm}$. Deshalb werden, trotz der kreisförmigen Rundung der Ellipse, ihre Radien-Vektoren recht erheblich ungleich. — Der eine von beiden Brennpunkten ist der Mittelpunkt des stillstehenden Körpers.

Erklärung der mit dem Umlaufe zusammenhängenden Erscheinungen aus dem Fortschreiten der Erde.

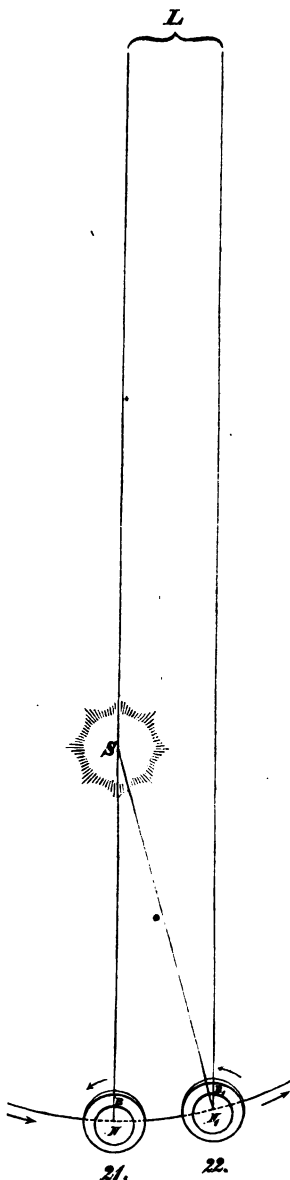
169. a) **Bleibende Richtung der Erdachse.** Von der Sonne erkannten wir (in Nr. 162), daß die Achse ihre Lage behält. Läuft die Sonne um die Erde, so haben wir also diese Bewegung uns so zu denken, daß dabei die Achse immer ihrer früheren Richtung parallel ist. Wandert die Erde um die Sonne, so bleibt hier dieselbe Vorstellung, weil die scheinbare Umdrehung der Himmelskugel zeigt, daß die Erdachse stets nach derselben Stelle des Sternhimmels hinweist. Aus dem Beibehalten der Achsenrichtung beim Umlauf der Erde folgt dann

α) Änderung in der Dauer der Tageshelle. Man ersieht dies aus Figur 68 (bei welcher die Erdachse N für den 21. Juni und den 21. Dezember in der Ebene der Zeichnung liegt) sehr leicht, wenn man beachtet, welcher Bruchteil des Parallelkreises eines Ortes in den vier Jahreszeiten Tageshelle oder Nacht hat.

β) Sommerwärme und Winterkälte. In Figur 68 ist für den Mittag des 21. Juni und des 21. Dezember die Stellung der Vertikallinie eines Ortes B von 50° nördlicher Breite gezeichnet und die Lage der Ebene des Horizontes durch eine Tangente angedeutet. Der Neigungswinkel dieser Ebene gegen die ankommenden



Figur 70. Neigungswinkel der mittags zu uns kommenden Sonnenstrahlen im Sommer und im Winter.



Figur 71.
Sterntag und Sonnentag.

Sonnenstrahlen beträgt für den Mittag des 21. Juni $90^{0} - (\varphi - \varepsilon)$ und für den 21. Dezember $90^{0} - (\varphi + \varepsilon)$. Um den bedeutenden Unterschied dieser Lagen durch eine Zeichnung zu veranschaulichen, nehmen wir die Schiefe der Ekliptik ε rund $23\frac{1}{2}^{0}$ und haben für $\varphi = 50^{0}$ jenen Winkel $63\frac{1}{2}^{0}$ und diesen nur $16\frac{1}{2}^{0}$. Mit ihren Nebenwinkeln, $SAO = 116\frac{1}{2}^{0}$ und $SAW = 163\frac{1}{2}^{0}$, ist ein horizontales Quadratkilometer des Ortes B in Figur 70 gegen den Sonnenstrahl SA gelegt. Nur so viel Wärmestrahlen, wie im Sommer den Teil ACFG treffen, kommen im Winter auf die ganze Fläche ACDW; die bei weitem größere Menge schießt darüber hinaus. Wird das Quadrat ACJO senkrecht auf SA gestellt, so fällt auf dasselbe die größte Wärmemenge. Dies tritt am 21. Juni für die Orte auf dem Wendekreise des Krebses ein. Unter der Glut verdampft dann viel Wasser der dortigen Meere und die nördliche Hälfte der heißen Zone hat in unserem Sommer ihre Regenzeit. Während unseres Winters ist auf der südlichen Erdhalbkugel Sommer. (Figur 68.)

170. b) **Sterntag und Sonnentag.** In Figur 71 blicken wir auf den Nordpol N der Erde hinab. Der mit 21 bezeichnete Ort ist so angenommen, daß die Sonne S mittags mit einem Sterne L gleiche Länge und Breite hat; sie kulminiert also mit ihm zugleich an dem Beobachtungsorte B. Am folgenden Tage ist die Erde in der Bahn bis zum Punkte 22 fortgeschritten und hat in der Richtung gegen den Uhrzeigerlauf eine Umdrehung vollführt, wenn für den Ort B in der Stellung B_1 der Stern L wieder kulminiert. In diesem Augenblicke ist also ein Sterntag zu Ende. Die Sonne aber steht noch nicht im Mittage. Dies tritt erst ein,

wenn die Ebene des Meridians N_1B_1 in die Centrale Erde-Sonne gekommen ist. Um die dazu erforderliche Umdrehungszeit ist also ein Sonnentag länger als ein Sterntag. (Nr. 72.)

171. c) **Wechselnde Stellung der Sternbilder zu derselben Abendstunde.** In Figur 68 (zu Nr. 165) ist der Standort des großen Himmelswagens am Sternhimmel perspektivisch genau gezeichnet. Man denke sich die Ebene des Horizontes unseres Beobachtungsortes B als Berührungsebene an die Erdkugel gelegt, jedesmal an der Stelle, an welcher B abends 6 Uhr sich befindet; und versetze sich mit voller Aufmerksamkeit in B, um in der Horizontebene die Himmelsgegenden zu bestimmen nach dem leicht ersichtlichen Nordpunkte und dem Orte des Sonnenunterganges. Bei E_2 hat B am 23. September die dort angegebene Stellung während des Untergehens der Sonne, abends 6 Uhr. Man sieht aus der Figur, daß dann η Ursae majoris in West, hoch über der Sonne, steht; α kommt weit herum nach Nordwest; so daß wir den Standort des großen Bären als über WNW angeben können. Am 21. Dezember kommt B abends 6 Uhr rechts von der Nachtgrenze in die vordere Hälfte der Kugel E_3; die Horizontebene steigt schwach nach hinten auf, wie wir es bei E_2, nach rechts hin, sehen. Der große Bär steht nun im Norden, und so tief am Himmel, wie er für uns kommen kann. Für den 21. März ist B in seiner Stellung abends 6 Uhr rechts bei E_0 angegeben. Ost und West haben im Vergleich mit der Lage am 23. September ihre Rollen gewechselt. Der große Bär steht über der entgegengesetzten Seite des Horizontes, über OSO. Darauf am 21. Juni liegt B abends 6 Uhr noch auf der hellen Seite der uns abgewandten Hälfte der Kugel E_1. Die Vertikallinie trifft $(90^0 - \varphi)$ südwärts vom Himmelspole P den Sternhimmel. Da η Ursae majoris 40^0 Polabstand hat, so befindet sich dann dieser Stern in der Nähe unseres Zenits, vom Himmelspole aus nach der Südseite des Horizontes hinüber, wenig ostwärts. (Vergl. Figur 24 in Nr. 33.) Schließlich erblicken wir am 23. September abends 6 Uhr den großen Bären wieder in WNW. Die durch unsere Betrachtung aus der Figur ersehenen Standorte des großen Bären waren also zu Anfang der vier Jahreszeiten stets abends 6 Uhr, WNW, N, OSO, S und beim Ablaufe eines ganzen Jahres wieder WNW. Die Richtung dieser scheinbaren Ortsveränderung ist demnach so, daß der gerade unter dem großen Bären stehende große Löwe immer weiter von der untergehenden Sonne zurücktritt, also immer früher als sie aufgeht und nach Verlauf eines Jahres wieder die Anfangsstellung zu ihr einnimmt; so daß die Sternbilder einen Rundgang mehr vollzogen haben, als die Sonne. Die Erscheinung, daß das Jahr 365 Sonnentage und 366 Sterntage hat (Nr. 77), kommt folglich genau

so zu stande, wie wir es wirklich sehen, wenn wir davon ausgehen, daß die Erde um die Sonne läuft.

172. d) **Rückwärtsgehen des Widderpunktes.** Das Zurückweichen des Widderpunktes, welches an der sogenannten Präcession der Fixsterne erkannt wird, geht daraus hervor, daß die Erde beim Rotieren die Richtung ihrer Achse sehr wenig ändert. Die daraus in der Lage der Äquatorebene erfolgende Veränderung, welche wir in Nr. 96 als ein langsames Niederkippen bezeichneten, bringt den in ihrer unbegrenzten Erweiterung gedachten Widderpunkt in dem Sternbilde der Fische ebenso weiter herum, mag die Erde ihren Ort behalten oder um die Sonne laufen. In ersterem Falle vollführt der Nordpol der Erde die Bewegung, welche wir in Nr. 98 vom Himmelspole angaben. In Figur 68 wurde die Ebene der Zeichnung so gewählt, daß die Erdachse bei E_3 in ihr lag. Kommt der Mittelpunkt der Erde nach einem Umlaufe wieder an diese Stelle, so hat die Achse indes ihre Richtung in der Weise verändert, daß der Nordpol noch sehr wenig vor der Bildebene zurückgeblieben ist, so daß die Achse gegen sie einen Neigungswinkel von nur $50{,}24'' \sin\varepsilon = 20''$ erhalten hat. (Nr 96.) (Unsere Vorstellung von dem Beibehalten der Achsenrichtung (Nr. 169) wird hierdurch also nur um eine äußerst geringe Größe verbessert.) Die vorjährige Durchschnittslinie der Ebenen des Äquators und der Ekliptik hat bei ihrer in das Sternbild der Fische laufenden Hälfte nun die neue Durchschnittslinie in der Ebene der Ekliptik auf derjenigen Seite neben sich, auf welcher das Sternbild des Wassermanns ist. Die neue Schneidelinie verlegt mithin den Widderpunkt gegen die Ordnung der Ekliptikzeichen weiter herum. Das Rückwärtsgehen des Widderpunktes tritt also ebenso ein, auch wenn die Erde um die Sonne läuft.*)

§ 18. Beweise für die Bewegung der Erde um die Sonne.

173. 1) **Ungleiche Anzahl der Sternschnuppen.** Den Weltenraum durchfliegen Körperchen, die, wenn sie unsere Atmosphäre durchstreichen, als Sternschnuppen aufleuchten. Sie erglühen, wie das

*) Bradley entdeckte aus 18jährigen Beobachtungen der Örter derselben Fixsterne (von 1727 bis 1745) an der Bewegung der Erdachse eine kleine periodische Ungleichmäßigkeit, welche Nutation genannt wird. Die Erdachse würde allein unter dieser Einwirkung um die festgedachte mittlere Richtung als Achse den Mantel eines sehr schmalen elliptischen Kegels beschreiben. Da aber die mittlere Richtung schneller fortschreitet, so wird es eine wie Wellblech

Stückchen Schwamm im pneumatischen Feuerzeuge, durch verdichtete Luft. Denn die mit einer Geschwindigkeit von 40 bis 80 Kilometer getroffenen Luftteilchen haben nicht Zeit auszuweichen, und werden von dem kleinen Weltkörper so gewaltig zusammengedrängt, daß die bei ihrer Verdichtung frei werdende Wärme das Mineral zum Glühen bringt.*)

Hat die Erde, außer der rotierenden, eine fortschreitende Bewegung, so muß man mehr Meteore zählen, wenn man auf der Vorderseite der vordringenden Erde sich befindet, als wenn man auf ihrer Rückseite beobachtet. [Wer im Regen läuft, wird auf der Brust nasser, als auf dem Rücken; denn Tropfen, welche den stillstehenden noch nicht gestreift hätten, werden von der voreilenden Vorderseite abgefangen.] — Beharrt aber die Erde an einer Stelle im Raume, so muß sich kein erheblicher Unterschied in der Zahl der in den einzelnen Nachtstunden gesehenen Sternschnuppen zeigen, wenn durch das arithmetische Mittel aus vieljährigen Beobachtungen etwaige Zufälligkeiten und Hindernisse, wie Mondschein und trübes Wetter, ausgeglichen sind.

---

gefaltete krumme Fläche. Jede Welle entsteht in den 18,6 Jahren, in welchen die Mondbahn in ihre frühere Lage zurückkehrt. (Anmerkung zu Nr. 210.) An der Himmelskugel giebt die gefaltete Mantelfläche als Durchschnitt die in Nr. 98 besprochene Bahn des Äquatorpoles P, welche also eine schmale Wellenlinie ist, die einer kreisrunden Bahn nahe bleibt.

*) Die räumliche Lage der Punkte in der Atmosphäre, an welchen eine Sternschnuppe aufleuchtete und verschwand, wird dadurch bestimmt, daß in derselben Nacht mehrere Beobachter an 200 bis 400km von einander entfernten Orten die Punkte des Himmelsgewölbes, an welchen sie Anfang und Ende der Flugbahn sahen, durch die benachbarten Fixsterne notieren. Ist dann beim Zusammentragen aller Beobachtungen die Identität einer Sternschnuppe durch genaue Übereinstimmung der Beobachtungszeit festgestellt, so berechnet man aus den mittels der bekannten Stellung der Fixsterne für Höhe und Azimut gefundenen Winkeln und aus der bekannten Standlinie der Beobachter die Lage des Anfangs- und des Endpunktes über der Erdoberfläche, und aus der Länge der Flugbahn und der Dauer der Sichtbarkeit die Geschwindigkeit der Sternschnuppe. Die auf diese Weise im Jahre 1867 von der Berliner Sternwarte (in Verbindung mit 5 anderen Punkten innerhalb eines Umkreises von 200km Halbmesser) angestellten Beobachtungen ergaben für die Sternschnuppen des August-Phänomens in den gesichertsten Fällen eine Geschwindigkeit von 40 bis 70 Kilometer in der Sekunde.

Daß der enorme Druck der Luft an der vorderen Seite der Meteoriten ein Zerreißen derselben herbeiführen könne, ist von Daubrée experimentell nachgewiesen. Um einen sehr starken, schnell wirkenden Gasdruck hervorzurufen, benutzte er Dynamit, das er als Patronen auf Prismen aus geschweißtem Stahl legte und dort entzündete, so daß der Gasdruck wie bei den Meteoriten nur an einer Seite wirkte. Stets wurden die Prismen in Bruchstücke von polyedrischer Gestalt zerrissen, welche, wie die auf die Erde gefallenen Stücke der Eisenmeteorite, an den exponierten Flächen Gruben und schwarze Zellen zeigten.

Tafel der stündlichen Häufigkeit der Meteore,
zusammengestellt von **Julius Schmidt***) (1842—1879)
[Hauptsächlich nach Beobachtungen auf der Sternwarte in Athen.]**)

Datum	Stunde 6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5	12,5	13,5	14,5	15,5	16,5	17,5
Januar	4	4	5	6	7	9	12	14	16	15	13	10
Februar	3	3	4	4	5	5	6	8	9	10	9	7
März	—	4	4	5	6	7	10	13	14	12	9	—
April	—	3	4	6	8	10	11	10	9	6	—	—
Mai	—	—	6	6	7	8	8	9	9	8	—	—
Juni	—	—	5	6	7	8	9	11	12	11	—	—
Juli 1 bis 20	—	—	5	6	9	11	13	14	15	16	15	—
„ 20 „ 31	—	—	6	10	15	19	24	27	28	25	20	—
August 1 „ 5	—	—	9	13	17	22	26	30	32	30	—	—
„ 6 „ 9	—	—	12	18	21	26	31	36	41	43	—	—
„ 10 „ 13	—	—	17	26	34	43	53	62	69	72	—	—
„ 14 „ 23	—	—	11	13	15	17	18	18	17	16	—	—
„ 24 „ 31	—	—	8	8	10	11	17	15	17	17	17	—
September 1 „ 15	—	—	7	8	9	11	13	14	15	15	14	—
„ 16 „ 30	—	—	7	7	8	9	11	12	12	12	11	—
Oktober 1 „ 19	—	7	8	9	10	12	16	18	24	27	28	26
„ 19 „ 31	6	8	10	11	13	17	22	28	35	39	36	29
November 1 „ 14	7	8	9	10	12	15	19	23	26	26	23	19
„ 14 „ 30	8	8	9	10	11	13	15	18	20	21	20	18
Dezember . . .	6	7	9	12	15	17	15	21	21	20	17	14

Diese Ergebnisse sorgsamer Beobachtungen lehren, für alle Monate des Jahres übereinstimmend, dreierlei:

1) Die Erde hat eine fortschreitende Bewegung. Dies folgt aus der **Ungleichheit** der in einer Zeile stehenden Zahlen.

2) Selbst die Richtung, nach welcher die Erde fortschreitet, ist daraus zu ersehen. Denn da in den frühen **Morgenstunden** die Zahl der Sternschnuppen größer ist, als des Abends, so befinden wir uns morgens auf der **Vorderseite** der fortfliegenden Erde, abends auf der Rückseite. In der Figur 71 (zu Nr. 170) geht auf der rechten Seite der Erde die Sonne auf; sie läuft also nach rechts quer durch die ankommenden Sonnenstrahlen; und

*) J. F. Julius Schmidt, geboren zu Eutin 1825 Okt. 26, berühmt durch seine Mondkarte von **zwei Meter** Durchmesser, starb als Direktor der Sternwarte zu Athen 1884 Febr.

**) Hermann J. Klein, das Sonnensystem (Braunschweig, Vieweg u. Sohn, 1871), 2. Auflage, Seite 320. — [Stunde 6,5 heißt: zwischen 6 und 7 Uhr abends, und Stunde 14,5: zwischen 2 und 3 Uhr nach Mitternacht.] — Erst seit Anfang des 19. Jahrhunderts hat man die Meteore beachtet.

3) weil diese Bewegung, rechtwinklig zu den radialen Sonnenstrahlen, das ganze Jahr hindurch vor sich geht, so zeigt dies den Umlauf um die Sonne. Daher Gesamt-Ergebnis:

Die Erde läuft (von Norden gesehen) der Bewegung der Uhrzeiger entgegengesetzt um die Sonne.

174. 2) **Parallaxe von Fixsternen.** Es sei in Figur 72 der Grundkreis E_1E_3 die Erdbahn, wie in Figur 68; der Fixstern L sei uns näher als die beiden sehr fernen Fixsterne A und B. Ihre Strahlen laufen nahe bei einander zu uns, so daß alle drei Sterne zugleich im Gesichtsfelde des Fernrohrs gesehen werden. Beobachtet ein Astronom sie von E_1 aus, so sind die Bildpunkte in der Fokalebene des Fernrohrs Ecken eines Dreiecks, welches dem Dreiecke ABL_1 ähnlich ist. Betrachtet er sie nach einem Vierteljahre von E_2 aus, so hat das Bilddreieck die Form des Dreiecks ABL_2 angenommen; abermals nach einem Vierteljahre, beim Anblick von E_3 aus, erhält es die Gestalt von ABL_3, und von E_0 aus gesehen, erscheint es verkleinert, wie ABL_0. Die Größe der Seiten im Bilddreiecke wird mit dem Fadenmikrometer gemessen. (Nr. 24.) Man erhält sie ausgedrückt in Bogensekunden. Denn der Astronom weiß, daß er an seinem Instrumente die Schraube n mal herumdrehen muß, um den Faden z. B. im Bilde der Mondsichel von der einen Spitze zur andern zu führen, und berechnet aus dem bekannten Abstande der Sichelspitzen den n ten Teil des mit seinen Schenkeln durch die Spitzen gehenden Sehwinkels. Er kennt also den Abstand, welcher durch einmaliges Umdrehen der Schraube gemessen wird.*)

Wenn nach den durch alle Monate eines Jahres fortgesetzten Beobachtungen eine Zeichnung entworfen wird, in welcher man jede Bogensekunde etwa durch ein Centimeter darstellt, so entsteht eine Figur, wie der obere, der betreffenden Stelle des Himmelsgewölbes parallel liegende Teil der Figur 72. Die mit L_1, L_2 ...

---

*) Die genaueste Messung erfolgt mit dem (nach seiner ersten Verwendung — Messung des scheinbaren Sonnendurchmessers [wie in Nr. 22 Anm.] — benannten) Heliometer, einem Fernrohre, dessen Objektivglas mittels eines Durchmesserschnitts in zwei Hälften geteilt ist. In der Richtung der Verbindungslinie der beiden Sterne verschiebt man die eine Hälfte so weit, bis das von ihr hervorgerufene Bild des einen Sternes mit dem von der andern Hälfte gelieferten Bilde des andern Sternes zusammenfällt. Die Verschiebung der Linsenhälften wird vom Standorte des Beobachters aus durch Schraubenbewegung bewirkt und durch feine Millimeterteilungen auf dem Schieber mit Hilfe eines Mikroskops sehr genau gemessen. Die Größe der Verschiebung, dividiert durch die bekannte Brennweite der Linse, giebt die Tangente des Centriwinkels auf dem Bogenabstande der beiden Sterne. — Während der Arbeit dreht ein Uhrwerk das Fernrohr um seine Hauptachse (Stundenachse), die der Weltachse parallel ist, so daß es fortwährend auf diese Sterne gerichtet bleibt.



Figur 72.
Parallaxe eines Fixsterns.

bezeichneten Dreieckspitzen bestimmen eine kleine Ellipse. Es zeigt sich, daß die für mehrere Sterne, wie L, erhaltenen Ellipsen sich in ihrer Form unterscheiden, je nach der Stellung des Sternes über der Ekliptik. Steht der Stern nahe dem Pole J der Ekliptik (vergl. Figur 68 in Nr. 165), so ist die Ellipse kreisrund; die kleine Achse wird im Vergleich zur großen immer kürzer, je näher dem Tierkreise der Stern seine Stellung hat. Denn in ersterem Falle ist der Kegel LE_1E_2 ein gerader, in jedem andern ein schiefer, welcher bei unveränderter Breite immer dünner wird, je mehr man die Spitze L nach hinten niederlegt; er geht in eine Ebene über, wenn L in die Ebene der Ekliptik kommt. Mithin liefert sein Scheitelkegel in den verschiedenen Lagen, wie angegeben, ungleich breite Ellipsen. Ihre großen Achsen liegen stets der Ekliptik parallel. Deshalb steht die Ebene des durch die kleine Achse der Ellipse gehenden Dreiecks LE_0E_2 auf der Ekliptik senkrecht und das mit seiner Grundlinie rechtwinklig auf ihm stehende Dreieck LE_1E_3 ist das gleichschenklige Achsendreieck des Kegels. Weil das Dreieck LE_1E_3 immer äußerst schmal gefunden wird, kann es als ein Ausschnittstreifen eines großen Kreises mit dem Mittelpunkte L und dem Radius LE_1 genommen werden. Sein Centriwinkel ist der Gesichtswinkel, unter welchem, vom Sterne L aus gesehen, der Erdbahndurchmesser E_1E_3 erscheint. Die Hälfte desselben, E_1LS, heißt die Parallaxe (Jahres-Parallaxe) des Fixsternes.*) Ihre Größe wird uns durch die zwischen den Schenkeln des Scheitelwinkels liegende Hälfte der großen Achse L_1L_3 aus der konstruierten Figur in Winkelsekunden bekannt. Deshalb können wir aus dem Kreisausschnitt E_1LS leicht berechnen, wie viel mal so weit, als die Sonne, jener Fixstern L von uns entfernt ist. Der Leser führe dies für einige der in der Tabelle stehenden

*) Die vollständige Bezeichnung Jahres-Parallaxe ist nötig zur Unterscheidung von Horizontal-Parallaxe. Darunter versteht man den Winkel, unter dem, z. B. vom Monde aus, ein Erdkugelradius zu sehen ist, welcher nach dem von dort aus erblickten Rande der Erdscheibe geht. (Nr. 197.)

Parallaxen aus.*) Bei den Doppelsternen sind die Größen der beiden Komponenten angegeben.

Nr.	Name des Sternes	Größe (zwei bei Doppelsternen)	Jahres-Parallaxe	Entfernung in Erdbahn-halbmessern	Autorität
1	α Centauri	1. und 4.	0,928″	222 300	1)
2	61 Cygni	$5^1/_2$. und 6.	0,553	373 000	2)
3	21 185 Lalande	$7^1/_2$.	0,501	411 700	Winnecke
4	β Centauri	1.	0,470	438 900	Thomas Maclear
5	μ Cassiopeiae	$5^1/_2$.	0,342	603 100	Otto Struve
6	34 Groombridge	$8^1/_2$.	0,307	671 900	Auwers
7	α Aurigae (Capella)	1.	0,305	676 300	Otto Struve
8	21 258 Lalande	$8^1/_2$.	0,271	761 100	Krüger
9	17 415 Oeltzen	$8^1/_2$.	0,247	835 100	Krüger
10	σ Draconis	5.	0,246	838 500	Brünnow
11	Sirius**)	1. und 9.	0,193	1 069 000	3)
12	α Lyrae (Wega)	1.	0,180	1 146 000	Brünnows Mittel
13	70 oder p Ophiuchi***)	$4^1/_2$. und $6^1/_2$.	0,162	1 273 000	Krüger
14	η Cassiopeiae***)	$4^1/_2$. und 7.	0,154	1 339 000	Otto Struve
15	ι Ursae majoris	3.	0,133	1 551 000	Peters
16	α Bootis (Arctur)	1.	0,127	1 624 000	Peters
17	Procyon	1.	0,123	1 677 000	Auwers
18	1 830 Groombridge	$6^1/_2$.	0,118	1 748 000	4)
19	γ Draconis	2.	0,092	2 242 000	Auwers
20	Polaris	2. und 9.	0,091	2 267 000	Peters

Die Erdbahn darzustellen, sei nun ein Kreis beschrieben von 1 Decimeter Radius, dessen Durchmesser also kleiner ist, als die Höhe eines Quartblattes. Man wolle in der erweiterten Ebene Punkte angeben, deren Mittelpunktsabstand für diesen Kreisradius jenen Sternweiten entspricht. Liegt das Blatt in Berlin, so müßte

*) Die Zahlenwerte sind die nach dem Standpunkte der Wissenschaft am Ende des Jahres 1876.

1) Hendersons Wert, von Peters verbessert, und der von Moesta zu einem Mittel vereinigt. Der gelbe kleine Stern läuft um den weißen großen in 85 Jahren. Der Centaur ist ein Sternbild der südlichen Halbkugel; α und β haben etwa 30° Abstand vom Südpole des Himmels. — 2) Mittel der Werte von Auwers und Otto Struve. — 3) Gyldén aus den Beobachtungen Maclears am Kap der guten Hoffnung. — 4) Ein Mittel aus den Ergebnissen von Brünnow, Schlüter, Wichmann und Otto Struve.

**) Das Studium der Eigenbewegungen des Sirius hatte Bessel im Jahre 1844 zu der Annahme geführt, daß in der Nähe dieses glänzenden Fixsterns ein dunkler Himmelskörper sich befinde, welcher die beobachteten Störungen veranlasse. Nach der neueren Vervollkommnung der Fernröhre hat Clark im Jahre 1862 diesen Begleiter als einen Stern 9. Größe wirklich aufgefunden.

***) Diese beiden Sterne, gelb und rosa, bewegen sich um den gemeinsamen Schwerpunkt in 95 Jahren, und die des Doppelsternes η Cassiopeiae, gelb und purpurn, in 384 Jahren. (Compt. rend., 87. Bd., S. 638.)

der Punkt für den uns nächsten Fixstern 1 bei westlicher Verlängerung des Blattes nahe vor Potsdam hingezeichnet werden, die Marke für Stern 5 käme in Brandenburg, Stern 14 bei Magdeburg und 19 und 20 hinter Braunschweig auf das verlängerte Quartblatt mit dem Erdbahnkreise. Beschreibt man um solchen Punkt mit seinem Mittelpunktsabstande einen Kreis, so wird der in unserem Bahnkreise liegende Bogen so gerade, daß seine Länge vom Kreisdurchmesser nicht zu unterscheiden ist. Hierdurch rechtfertigt sich, daß der Radius E_1S für den Bogen des schmalen Kreisausschnitts genommen wurde. [Später Nr. 196 Anm.]

Bei so manchen anderen Sternen haben die Astronomen sich vergeblich bemüht, Jahres-Parallaxen aufzufinden. Sie müssen also noch viel weiter als jene von uns entfernt sein. Die zu solchen Beobachtungen erforderliche Schärfe des Messens wurde erst erreicht durch das Heliometer und das Fadenmikrometer Fraunhofers (1824).*) Die erste erfolgreiche Parallaxen-Bestimmung ist die von Bessel bei dem Doppelstern 61 Cygni von 1838 bis 1840, den er wählte, weil derselbe eine (verhältnismäßig) starke Eigenbewegung zeigt, also Nähe mutmaßen ließ.

Stände die Erde still, so könnte die Erscheinung des Rundlaufens jener Sterne nur dadurch zu stande kommen, daß sie Bahnen beschrieben, die sie alle genau in einem Jahre durchliefen und in denen sie stets an übereinstimmender Stelle sich befänden. Ferner müßten die Bahnen im Raume so gelegen sein, daß sie, wie verschieden auch ihre Form und Lage wäre, von uns aus auf die Himmelskugel projiziert, als Ellipsen erschienen, die sämtlich ihre großen Achsen der Ekliptik parallel hätten und die wir um so schmaler sähen, je näher der Platz des Sternes der Ebene der Ekliptik wäre. Die ausnahmslose Erfüllung so vieler verschiedenen Bedingungen nötigt uns ebenso, wie bei dem täglichen scheinbaren Umlaufe der Sterne um uns, den Grund der Erscheinung bei der Erde zu suchen. Läuft sie in einer Kreisbahn, so muß bei allen nicht zu weit entfernten Sternen solche scheinbare Bewegung genau so, wie es die Beobachtungen wirklich zeigen, gesehen werden.

175. 3) **Die Aberration des Sternlichtes.** Läuft jemand bei ruhig fallendem Regen mit einer Papierrolle, so muß er ihr oberes Ende ein wenig vornüber neigen, damit nicht Tropfen, die in die Mündung fielen, von der Innenseite der Rückwand beim Voreilen

*) Joseph Fraunhofer, geboren zu Straubing in Baiern am 6. März 1787, gestorben zu München am 7. Juni 1826. Sein Grabstein zeigt den von ihm gefertigten Dorpater Refraktor und darunter die Inschrift: Approximavit sidera, deren Bedeutung verstärkt wurde, als die Spektralanalyse die Ursache der Fraunhoferschen Linien erkennen und die Astrophysik als Zweig der Astronomie entstehen ließ.

abgefangen werden.*) Das Vorneigen muß um so stärker sein, je schneller er läuft. Bei richtiger Haltung der Rolle wird ein Tropfen, der im Mittelpunkte des oberen Grenzkreises einfiel, beim Weiterfallen von der Cylinderachse wie eine Perle von einem Faden aufgezogen. Wie dieser Tropfen an der Achse der Rolle entlang, so bewegt sich das Licht durch das Fernrohr, wenn man es auf einen Stern eingestellt hat.

Steht die Erde still, so ist das Fernrohr genau auf den Stern gerichtet; läuft aber die Erde fort, so ist das obere Ende des Fernrohrs vorgeneigt nach der Richtung, wohin die Erde eilt. Durch Ablesen am Höhen- und am Grundkreise des Fernrohrs erhält man den Punkt der Himmelskugel, auf welchen dasselbe im Augenblicke der Einstellung gerichtet war. Denn in dem sphärischen Dreiecke, welches diesen Punkt, das Zenit und den Pol zu Ecken hat, findet man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die Deklination des Punktes und den Stundenwinkel, und aus ihm und der Beobachtungszeit auch seine Rektascension. Endlich kann man aus dieser und der Deklination für jenen Punkt auch die Länge und Breite berechnen.

Die während eines Jahres stattgehabten Beobachtungen eines Sternes zeigen, daß der Punkt, auf welchen das Fernrohr gerichtet war, bei der Einstellung an jedem späteren Tage ein anderer wird, da in Länge und Breite die Sekunden verschieden sind. Zeichnet man mit beliebigem Maßstabe nach den Sekunden der Längen als Abscissen und nach denen der Breiten als Ordinaten die Orte der Punkte auf, so sieht man, daß sie alle auf einer Ellipse liegen, deren große Achse der Abscissenachse, also auch der Ekliptik parallel liegt. Solche Ellipse der Richtungspunkte entsteht bei sämtlichen Sternen. Bei allen Ellipsen haben die großen Achsen gleiche Länge, ihre Hälfte beträgt [nach Struve**)] 20,4451 Bogensekunden; die kleinen Achsen werden um so kürzer, je näher der beobachtete Stern der Ekliptik steht; in ihr selbst ziehen sie sich zur großen Achse zusammen, und am Pole der Ekliptik wird die Ellipse zu einem Kreise.

Dieser bei allen Sternen mit Jahresperiode zu beobachtende Richtungswechsel des Fernrohrs beweist, daß die Erde eine rundlaufende Bewegung besitzt. Die Fernrohrachse liegt in einer Diagonale des Parallelogramms aus der Geschwindigkeit des Lichtes und der der Erde, und zwar ist sie ein Teil derjenigen Diagonale, welche

*) Die Schornsteine der Dampfschiffe stehen nicht senkrecht, weil bei der Fahrt der Rauch innen an der Rückseite des Schornsteins viel Ruß absetzen würde. Sie werden, nicht wie die Papierrolle beim Regen nach vorn, sondern nach hinten geneigt, weil der Rauch von unten nach oben steigt.

**) Wilhelm Struves Abhandlung steht in den Petersburger Memoiren von 1843.

von dem Anfangspunkte der Erdgeschwindigkeit ausgeht. Beobachtet ein Astronom (s. Figur 68 zu Nr. 165) von E_2 aus η Ursae majoris, so liegt, weil dort die Erde nach rechts läuft, der Punkt der Himmelskugel, auf welchen die Fernrohrachse trifft, rechts von η, und zwar in größter Entfernung, da in dieser Gegend das Parallelogramm diejenige Gestalt erhält, bei welcher der Winkel α zwischen der Diagonale und der Geschwindigkeit 1 des Lichtes so groß, wie möglich, ist. Denn $\sin\alpha = \frac{v}{1}\sin x$ wird am größten, wenn der Winkel x zwischen der Diagonalrichtung des Fernrohrs und der Geschwindigkeit v der Erde ein Rechter ist. Der Winkel α wird, weil die Seiten des Parallelogramms gleiche Länge behalten, am kleinsten, wenn die Erde bei E_3 auf η zuläuft; denn dort hat der spitze Winkel des Parallelogramms seine kleinste Größe erreicht. Hier kommt der Richtungspunkt gerade unter η. Fliegt die Erde bei E_0 nach links, so steht der Punkt links von η im Maximum der Längen, und wenn die Erde bei E_1 sich vom Sterne entfernt, so geht die Fernrohrachse über η hinaus und liefert für den Punkt das Maximum der Breiten. Der Richtungspunkt beschreibt also infolge der Erdbewegung um den Standort des Sternes eine Ellipse. In ihren Bahnen bewegen sich Erde und Punkt, vom Südpole des Himmels aus gesehen, beide im Sinne des Uhrzeigerlaufs; der Punkt ist aber der Erde immer um ein Viertel der Bahn voraus. Letzterer Umstand ließ den englischen Astronomen Bradley*), der im Jahre 1727 mit einer bis dahin noch von niemand erreichten Messungsgenauigkeit behufs Parallaxenbestimmung den Stern γ Draconis beobachtete, bald erkennen, daß er nicht die Parallaxe erhalte, — denn da müssen die entsprechenden Orte immer sich gerade gegenüberstehen (s. Figur 72 in Nr. 174) — daß er vielmehr etwas Neues entdeckt habe, dessen Erklärung er in der 52 Jahre vorher von Olof Römer gefundenen Geschwindigkeit des Lichtes richtig sah. Leider gab man der neuen Entdeckung einen unrichtigen Namen: das Abirren des Sternlichtes. Das Licht ändert hierbei seinen Lauf gar nicht; die wegen der Erdbewegung nötige Änderung der Fernrohrlage liefert andere Zahlen für den Richtungspunkt, den man als scheinbaren Ort des Sternes nahm.

Abschluß. Die im vorhergehenden Paragraphen behandelten Erscheinungen entscheiden nicht über Ruhen oder Umlaufen der Erde, da sie in beiden Fällen ebenso auftreten. Ein Vorgang, der sich nur durch Stillstehen der Erde erklären ließe, ist niemals aufgefunden. Die in diesem Paragraphen vorgeführten Beobachtungen können nur auf rundlaufender Erde gemacht werden. Mithin hat die Erde fortschreitende Bewegung.

---

*) James Bradley, geb. 1692, gest. 1762. 1721 Professor der Astronomie an der Universität zu Oxford, 1742 Astronom an der Sternwarte zu Greenwich.

Für diese von Kopernikus*) zur Geltung gebrachte Wahrheit kamen die Beweise erst 2 und 3 Jahrhunderte später.

---

*) Nikolaus Köppernick (Copernicus), geboren 1473 Febr. 19 zu Thorn an der Weichsel, gestorben als Kanonikus am Dom zu Frauenburg in Ostpreußen 1543 Mai 24. Sein Werk, De revolutionibus orbium cœlestium libri VI, Nürnberg, 1543, worin das nach ihm benannte Weltsystem niedergelegt ist, soll der Hauptsache nach schon 1507 in der Handschrift vollendet gewesen sein.

Rudolf Wolf spricht Seite 35 seiner „Geschichte der Astronomie" (München 1877, Verlag von R. Oldenbourg, 815 Seiten) die Überzeugung aus, „daß Plato sehr wahrscheinlich nicht nur die Rotation der Erde angenommen habe, sondern [in den letzten Jahren seines Lebens] bereits zum heliocentrischen Systeme vorgedrungen sei", aber, erschreckt über die Kühnheit seines Gedankens, nicht wagte, denselben unumwunden auszusprechen. Sein Schüler Herakleides Pontikos (Note zu Nr. 160) zeigte, (was die Ägypter schon gefunden hatten,) daß nicht die Erde, sondern die Sonne der Mittelpunkt der Bewegungen der Planeten Merkur und Venus sei, und giebt von einem Zeitgenossen an, er habe gefunden, daß es möglich ist, die scheinbaren Stillstände und Rückgänge der Planeten zu erklären, indem man die Erde bewegt und die Sonne stillstehen läßt. Es ist also schon um das Jahr 350 vor Christus das Kopernikanische System in den Gedanken der griechischen Philosophen aufgetaucht, wenn auch nicht als eine Wahrheit, so doch als eine Möglichkeit. Aristarchos von Samos (um 264 vor Chr., wahrscheinlich zwischen 310 und 230) lehrte es in ganz bestimmter Weise, seitdem er erkannt hatte, daß die Sonne bedeutend größer sein müsse, als die Erde. Denn er fand aus dem beim Monde rechtwinkligen Dreiecke, wenn man ihn genau halb erleuchtet sieht, durch den Winkel Mond-Erde-Sonne [seine Messung ergab nur 87°], einen ungefähren Wert [19] für das Verhältnis der Abstände von Mond und Sonne, deren Durchmesser bei ihrer gleichen scheinbaren Größe in demselben Verhältnis stehen, und hatte aus der Dauer einer Mondfinsternis einen Vergleich zwischen Monddurchmesser und der durchwanderten Breite des Erdschattens, so daß er den Monddurchmesser als ein Drittel des Erddurchmessers ansetzen konnte. Aristarchs Behauptung, daß die Erde in einem schiefen Kreise (der Ekliptik) um die Sonne läuft und zugleich um ihre eigene Achse sich dreht, verteidigte nur noch Seleukos (er lebte um 200 vor Chr.). Da die physikalischen Erkenntnisse, welche erst durch Galileis Fallgesetze und Newtons Gravitationsgesetz gegeben wurden, zur Unterstützung fehlten, und die scheinbaren Stellungen der Wandelsterne, nachdem Ptolemaios (er lebte zu Alexandrien in der ersten Hälfte des 2. Jahrhunderts nach Chr.) die nur zum Zwecke der Rechnung erdachte Lehre von den Epicyklen vervollkommnet hatte, sich leicht und genügend berechnen ließen, so lag keine zwingende Notwendigkeit vor, die der Anschauung des Volkes so widerstrebende Annahme der Erdbewegung festzuhalten. Kopernikus mußte, um „die Leuchte der Welt in den Mittelpunkt zu setzen" und die Lehre, daß die Erde zu den Planeten gehöre, zu Anerkennung zu bringen, ein Werk schaffen, welches die von Ptolemaios meisterhaft verfaßte Syntaxis mathematica, die unter dem Namen „Almagest" gegen Ende des 9. Jahrhunderts ins Arabische übertragen war, nach vierzehn Jahrhunderte langem Gebrauch ersetzen konnte und zeigte, wie man, ausgehend vom Umlaufe der Erde, die Berechnung der Planetenstellungen einfacher auszuführen habe. In dieser vollständigen Neuschöpfung liegt sein unsterbliches Verdienst. (Historische Untersuchungen von Schiaparelli [spr. Skiap.], die Vorläufer des Copernicus im Altertum. Ins Deutsche übertragen von Curtze. Leipzig, 1876. Quandt u. Händel. 109 Seiten.)

Die Lehre des Kopernikus, daß die Erde um die Sonne läuft, ist von der römischen Inquisition im Jahre 1616 beim ersten Prozeß gegen Galilei verdammt. Erst nach zwei Jahrhunderten — am 25. Sept. 1822 — wurde vom Papste Pius VII. der Druck von Werken in Rom gestattet, „in welchen von der Be-

§ 19. Planeten und Monde.

176. Der Planet Venus läuft um die Sonne. Beobachtet man den als hellstrahlenden Abend- oder Morgenstern allbekannten Planeten Venus durch ein Fernrohr, so sieht man ihn nicht mehr als einen Stern, sondern als eine kleine glänzende unvollständige Kreisscheibe.*) Wiederholt man das Beobachten in Zwischenzeiten von wenigen Wochen, so bemerkt man, daß die Lichtgestalt sich ändert, und erkennt, daß dieser Planet durch seine wechselnde Stellung zur Sonne Phasen zeigt, wie der Mond, nach welchen wir von abnehmendem oder zunehmendem Monde sprechen. Dabei ändert sich auch die scheinbare Größe. So lange die Venus Abendstern ist, nimmt die scheinbare Größe zuerst langsam, dann schneller zu, und wer sie am Morgenhimmel ebenso verfolgt, findet, daß die Größe in gleicher Weise wieder abnimmt. Beides sieht man an den 7 Darstellungen in Figur 73. Dieselben sind genaue Wiedergaben von Zeichnungen, welche ein Astronom mit Hilfe eines großen Fernrohrs bei seinen Beobachtungen vom Mai bis Dezember 1871 angefertigt hat.**) Sie zeigen die Form der Phase in ihrer wirklichen Stellung, nicht so, wie im umkehrenden Fernrohre. Für das umgekehrte Bild im Fernrohre paßt auch hier die für die Mondphasen geltende Regel:

„Kann man aus der Form den Buchstaben z vollenden, so ist es zunehmender Mond, und läßt sich die Gestalt zu a ergänzen, so hat man abnehmenden Mond.“

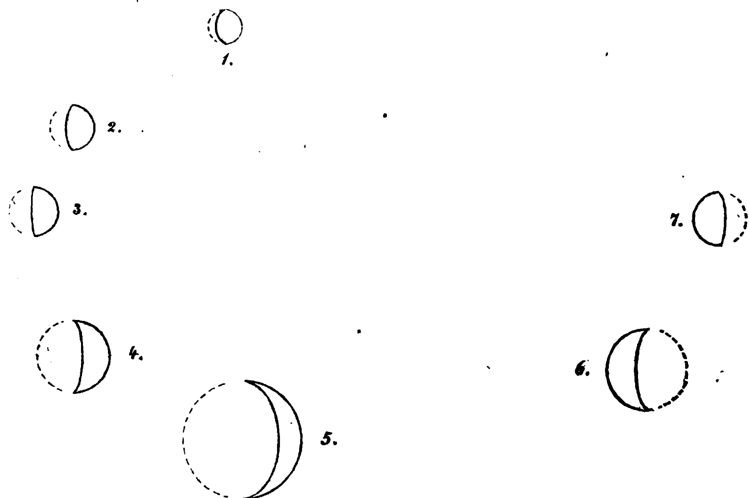
weglichkeit der Erde und Unbeweglichkeit der Sonne gemäß der allgemeinen Ansicht moderner Astronomen gehandelt wird.“ (Reusch, der Prozeß Galileis und die Jesuiten. Bonn, Ed. Webers Verlag, 1879.)

*) Wenn abends die Luft unter Einwirkung der Beschaffenheit des darunterliegenden Erdbodens sich ungleich schnell abkühlt, noch warme Luftmengen aufsteigen, abgekühlte niedersinken, so erleidet beim Durchgehen durch die ungleich dichten Luftmassen das Sternlicht kleine Ablenkungen und das dadurch entstehende Zittern und Sprühen des Bildes ist bei keinem Sterne so störend, wie bei der glänzenden Venus, so daß ihre Gestalt nur in vereinzelten Augenblicken erkannt werden kann. Deshalb muß man die Venus durch ein Fernrohr lange vor Sonnenuntergang betrachten, wenn sie mit freien Augen noch gar nicht zu sehen ist. Um mit dem Fernrohre sie an einem der nächsten Tage auffinden zu können, merkt man sich, wenn die Venus in der Abenddämmerung sichtbar wird, an gegenüberliegenden Gebäuden, in welcher Höhe sie am Anfang und Ende einer nach der Uhr aufzuschreibenden Stunde steht. Aus dem so erkannten Bogen ihres derzeitigen Parallelkreises kann man nach der an der aufgeschriebenen noch fehlenden Tageszeit rückwärts die Stelle des Himmels abschätzen, an welcher sie noch bei Sonnenschein mit dem Fernrohre aufzusuchen ist. Ihr Bild ist dann ganz ruhig, so daß die Gestalt klar erkannt wird und die Breite der Scheibe oder Sichel als Bruchteil der halben Polarachse leicht abzuschätzen ist.

**) Dr. H. C. Vogel, Beobachtungen, angestellt auf der Sternwarte des Kammerherrn von Bülow zu Bothkamp [bei Kiel]. Heft II. Leipzig, W. Engelmann, 1873. — Auf Tafel 13 sind Phasen der Venus in 14 zart schattierten Zeichnungen von 3 cm Durchmesser dargestellt. Unsere Figur 73 giebt 7 derselben mit Berücksichtigung der scheinbaren Größe verkleinert wieder.

(Man betrachte die Figur 73, nachdem man das Buch umgekehrt hat, so daß die Schrift auf dem Kopfe steht.)

Aus den für mittlere Berliner Zeit geltenden Angaben in den Spalten 3 bis 6 der Tabelle sind die damaligen scheinbaren Abstände der Venus von der Sonne mit fünfstelligen Logarithmen berechnet und in Spalte 9 beigefügt. Um die Bedeutung der Zahlen in den Spalten 7, 8 und 9 dem Verständnis näher zu bringen, denke man sich jede Bogensekunde als $\frac{1}{3}$ Millimeter dargestellt. Die Zahlen der dritten Zeile fordern, daß man als Bild der Sonne einen Kreis von 31,5 ^{cm} Radius an einer langen Mauer denke und 53 Meter links davon jene kleine mit 3 markierte Zeichnung der Venus. Dies führt uns in den richtigen Verhältnissen der Größe die Stellung vor, wie sie am 24. Juni stattfand. In der Zeichnung 2 sehen wir mehr als den Halbkreis hell. Wir würden sie zwar auch auf solche ebene Bildfläche bringen, doch nur in 51 ^{m} Abstand von ebenso großer Sonnenscheibe; aber die geringere Größe und die Form der Phase nötigt den dies Bild Betrachtenden zu der Vorstellung, daß die Venus in größerer Ferne, also hinter der Bildfläche zu denken sei. Dies ist noch mehr der Fall bei der Veranschaulichung für den 3. Mai, wo die kleinste Gestalt 1 nur 41 ^{m} entfernt ist von dem mit 31,8 ^{cm} beschriebenen Sonnenkreise. Wir haben hier von drei einzelnen Bildern gesprochen; denn man darf diese Phasen-Gestalten nicht alle zu einer Darstellung vereinen, weil, wer das Bild betrachtet, alles nur von einem Standorte aus ansieht, während



Figur 73. Phasen des Planeten Venus
als Abendstern | als Morgenstern.

1. Zeichnung Nr.	2. Datum 1871	3. Rektascension der Venus	4. Rektascension der Sonne	5. Deklination der Venus	6. Deklination der Sonne	7. Scheinbarer Radius d. Venus	8. Scheinbarer Radius d. Sonne	9. Scheinbarer Abstand der Venus von der Sonne	10. Länge der Sonne
1	Mai 3 8h	5h 4m 23,0s	2h 41m 39,6s	+ 24° 24′ 53″	+ 15° 42′ 40″	6,66″	952,9″	+ 34° 31′	42° 52′
2	Juni 14 9h	8 34 59,5	5 30 36,6	+ 20 53 43	+ 23 16 59	8,73	946,2	+ 42 36	83 15
3	Juni 24 9h	9 19 6,7	6 12 12,1	+ 17 33 45	+ 23 25 32	9,50	945,6	+ 43 59	92 48
4	Juli 30 9h	11 29 12,2	8 38 13,1	+ 2 4 40	+ 18 29 48	14,10	947,0	+ 44 58	127 9
5	Sept. 1 7,5h	12 28 41,5	10 41 47,7	− 9 59 59	+ 8 15 42	23,25	952,9	+ 32 16	158 50
6	Nov. 17 18h	12 38 55,5	15 32 26,7	− 3 10 11	− 19 8 17	15,71	972,6	− 45 16	235 27
7	Dez. 24 19h	15 2 15,3	18 13 20,8	− 14 14 59	− 23 25 12	10,34	977,4	− 45 56	273 3

die Figuren Gestalten zeigen, die in Zwischenzeiten von 6 und $1\frac{1}{2}$ Wochen von sehr veränderten Stellungen im Raume aufgenommen sind. Daß die Erde in den 5 Wochen vom 24. Juni bis 30. Juli fortgerückt ist, wird deutlich erkannt durch Vergleich des 4. mit dem 3. Bilde. Bei unverändertem Orte des Beobachters würde die Form 4 eine Annäherung zur Sonne fordern, das Bild zeigt sie aber statt 53^m nun 54^m von der Sonne. Die Erde hat also den Beobachter nach rechts geführt, so daß er zwischen der näher gerückten Venus und der Sonne doch einen breiteren Durchblick hat, der am 18. Juli am größten war, nämlich 45° 35′, und hier zu $54{,}7^m$ Abstand würde. — Das abermals 5 Wochen später kommende folgende Bild, auf dem die große Sichel 5 nur 39^m von der Sonne dargestellt wird, zeigt, daß nun die Venus ihren Weg richtet, um zwischen der Erde und der Sonne hindurch zu laufen. In der That sehen wir sie 11 Wochen später auf der andern Seite der Sonne bereits in größere Ferne gerückt, welche sie auf dem Bilde schon in 54^m Sonnenabstand bringt. Die Darstellung der scheinbaren Entfernung von der Sonne vergrößert sich nun nur noch auf 55^m, weil in den folgenden 5 Wochen die Erde ihren Weg zum Nachlaufen wendet.

Aus allen diesen Erscheinungen ist offenbar, daß die Venus, wie die Erde, eine von der Sonne beleuchtete Kugel ist, die in gleicher Richtung wie die Erde, schneller um die Sonne läuft.

177. Der Planet Jupiter wandert um die Sonne. Unter den Sternen nahe bei der Ekliptik ist Jupiter (in den gehörigen Monaten) dadurch zu erkennen, daß er, sobald es nur anfängt dunkel zu werden, schon sichtbar wird und mit ruhigem Lichte leuchtet. Selbst ein schwaches Fernrohr zeigt ihn als einen kleinen Vollmond, der 4 helle Pünktchen nahe bei sich hat. Er bewegt sich immer durch die Sternbilder des Tierkreises dahin. In demselben Streifen des Sternhimmels sehen wir die Sonne erheblich schneller fortschreiten, und so kommt es, daß jährlich einmal Jupiter der Sonne gerade gegenüber steht. Das findet statt, wenn er um Mitternacht kulminiert. Man sagt dann, Jupiter ist zur Sonne in Opposition. Kommt die Erde nach einem halben Jahre auf die entgegengesetzte Seite ihrer Bahn, so sehen wir die Sonne vor Jupiter treten. Er ist dann in Konjunktion.

Aus den täglich bei der Kulmination der Sonne beobachteten Rektascensionen und Deklinationen wurden, wie in Nr. 62 gezeigt ist, durch Interpolieren diejenigen Werte derselben abgeleitet, welche sie an dem Tage bei 0^h mittlerer Berliner Zeit hatten. Aus diesen Rektascensionen und Deklinationen sind die Längen der zugehörigen Standpunkte der Sonne berechnet (Nr. 94) und ebenso für den Jupiter die Längen und Breiten seiner Standorte zu derselben Zeit. Durch Vergleich der Ergebnisse findet man dann einen Tag, an welchem die Längen beider um nahe 180° von einander abweichen. Der Unterschied der nächsten Sonnenlängen und drüben die Differenz der Jupiterlängen läßt dann durch Interpolieren die Stunde finden, in welcher die Längen beider sich genau um 180° von einander unterscheiden, und daraus hat man dann diese Längen auch. Es war z. B. 1857 Nov. 3 0^h mittlerer Berliner Zeit

die Länge der Sonne	221°	0′	59,0″
und die des Jupiter	40	55	8,7
Differenz	180°	5′	50,3″

sie waren also am 3. Nov. um 0^h schon über die Oppositionspunkte hinweggegangen. Seit dem Mittage des 2. Nov. schritt die Sonne stündlich 150,4″ in Länge vor, Jupiter nur 13,6″, also die Sonne 136,8″ mehr. Jener Überschuß von 350,3″ über 180° mußte demnach entstanden sein in $\frac{350,3}{136,8} = 2,561$ Stunden. Die Zeit der Opposition war also 1857 Nov. 2 $21,439^h$. Berechnet man nun die Länge des Jupiter vor 2,561 Stunden, und ebenfalls die der Sonne, so kommt für Jupiter 40° 54′ 33,9″ und für die Sonne 180° mehr. Die Ergebnisse solcher Rechnungen sind in der Tabelle zusammengestellt.

Jupiter in Opposition.

1. Nr.	2. Zeitangabe	3. Länge l	4. Breite b	5. Scheinbarer Äquatorial-Halbmesser α	6. Scheinbarer Halbmesser der Sonne σ
1	1850 März 8 14,051h	168° 8′ 48,4″	+1°30′ 4,8″	22,491″	967,26″
2	1851 April 8 2,164	198 6 53,5	+1 35 8,3	22,425	959,00
3	1852 Mai 8 8,665	228 18 56,9	+1 14 45,3	22,735	951,27
4	1853 Juni 10 4,409	259 35 32,2	+0 32 11,4	23,363	946,09
5	1854 Juli 15 1,223	292 37 12,0	−0 23 15,4	24,176	945,41
6	1855 Aug. 20 20,333	327 38 35,9	−1 14 3,4	24,905	950,21
7	1856 Sept. 26 15,327	4 9 28,9	−1 38 14,7	25,240	959,40
8	1857 Nov. 2 21,439	40 54 33,9	−1 23 18,6	25,011	969,32
9	1858 Dez. 8 9,041	76 31 11,3	−0 37 13,2	24,338	975,90
10	1860 Jan. 10 16,989	110 13 24,4	+0 18 56,5	23,525	977,05
11	1861 Febr. 10 6,565	142 2 42,3	+1 5 53,5	22,847	973,24
12	1862 März 12 21,235	172 32 6,8	+1 32 21,4	22,462	966,17
13	1863 April 12 10,555	202 28 32,5	+1 33 45,2	22,432	958,48
14	1864 Mai 12 19,675	232 43 35,5	+1 9 59,0	22,776	950,83
15	1865 Juni 14 19,867	264 7 43,0	+0 25 2,3	23,433	945,90
16	1866 Juli 19 21,389	297 20 27,5	−0 30 49,2	24,256	945,57
17	1867 Aug. 25 20,310	332 33 39,2	−1 19 13,8	24,969	951,30

Spalte 2 giebt den Eintritt jeder folgenden Opposition immer nach 1 Jahr und 1 Monat an, zu denen noch einige Tage kommen können, so daß die je zwölfte Opposition etwa 4° hinter der ersten Stelle stattfindet. (Spalte 3.) Nimmt man noch mehr solche Oppositionen aus früheren und späteren Jahren hinzu, so erhält man an sehr vielen Stellen seiner Bahn (Spalte 5) die scheinbaren Größen Jupiters, die, in ihren Zahlenwerten nur wenig sich ändernd, immer nach 12 Jahren wiederkehren. An welchem Punkte seiner Bahn die Erde zwischen Jupiter und die Sonne treten mag, immer erscheint uns Jupiter fast gleich groß. Folglich läuft er um die Sonne, und zwar in einer Bahn, die um die nahe kreisrunde Erdbahn in nur wenig verschiedenen Abständen liegt, also selbst nicht viel von der Kreisform abweicht. Auch stimmt die Richtung des Umlaufes (Spalte 3) mit der der Erde überein. Und aus Spalte 4 ist ersichtlich, daß Jupiters Weg gegen die Ebene der Erdbahn nur schwach geneigt ist.

178. Vier Monde umkreisen den Jupiter. Zu Anfang der Nr. 177 wurde als Erkennungszeichen für den Planeten Jupiter angegeben, daß man beim Anblick durch ein Fernrohr ihn von 4 hellen Pünktchen begleitet sieht. Sie stehen, mit kleinen Abweichungen,

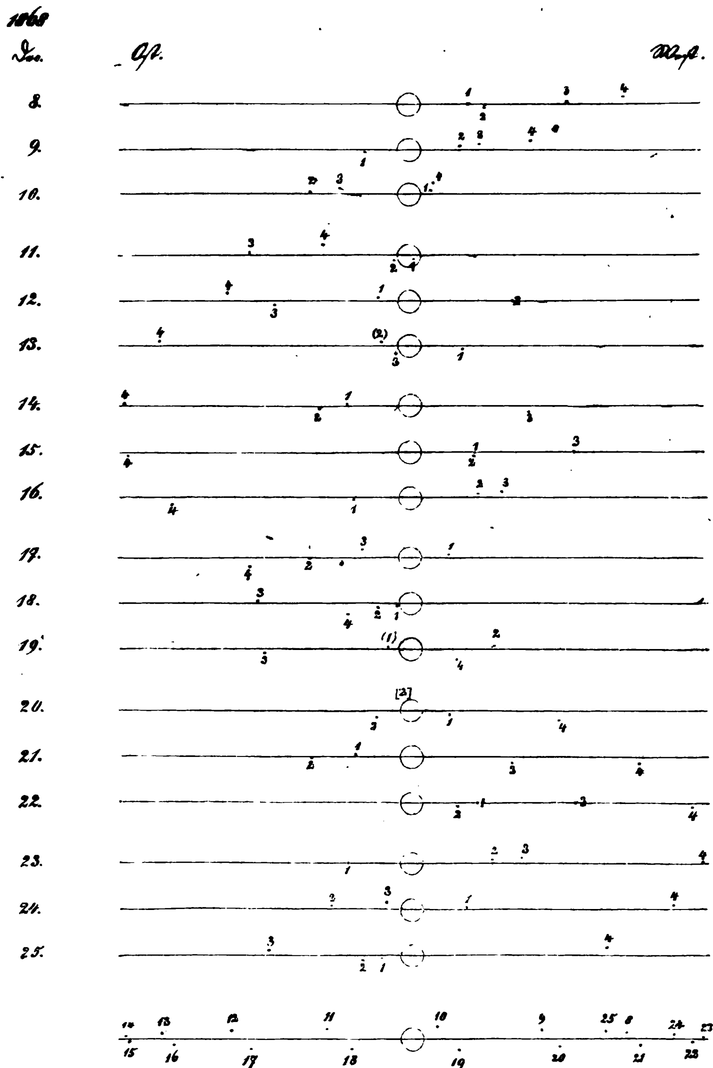
in einer Reihe, die mitten durch Jupiter geht. Ihre Abstände vom Mittelpunkte des Jupiter kann man leicht in Radien der Scheibe angeben. Man schätzt zunächst, wieviel Durchmesser oder Radien der nächste Lichtpunkt entfernt ist, und benutzt die Strecke als Maß für den Abstand des folgenden, und so fort. Nach den erhaltenen Zahlen zeichne man sich die Stellung sorgfältig auf. Beobachtet man dann am folgenden Abend den Jupiter wieder, so wird man überrascht, die Lage der Pünktchen ganz anders zu finden. Man zeichne die neue Stellung gerade unter die erste, und setze dies an mehreren Abenden fort. Der Vergleich aller Zeichnungen ermöglicht, die einzelnen Pünktchen wieder zu erkennen, und man sieht, daß es 4 Monde sind, welche um den Jupiter laufen in Bahnen, die sehr flach liegen, so daß sie fast als gerade Linien erschienen. Ihre Lage weicht nur wenig von der Ekliptik ab.

Die Stellungen der vier Monde beim Jupiter, welche sie vom 8. bis 25. Dez. 1868, immer Abends $8^h 30^m$ mittlerer Berliner Zeit, einnahmen sind in Figur 74, nicht wie im umkehrenden Fernrohre, sondern ihrer wirklichen Lage nach, genau wiedergegeben. Die durch den Mittelpunkt Jupiters gezogene gerade Linie läuft seinen Streifen parallel (Nr. 164), giebt also die Lage seines Äquators an. Es sind diese Tage gewählt, weil am ersten derselben die 4 Monde der Reihe nach auf einer Seite des Jupiter standen. Von solcher Ordnung aus sind die einzelnen Monde in den Stellungen an den nächsten Tagen leichter herauszufinden. Man verfolge zuerst den 4. Mond durch alle Tage. Es ist derjenige, welcher sich am weitesten von Jupiter entfernt, und man sieht schon aus der ganzen Folge der Ziffern 4, daß der kleine Körper um Jupiter läuft. Ganz deutlich tritt dies vor Augen, wenn man alle seine Standorte in eine Zeichnung zusammenträgt, wie dies unten in der Figur geschehen ist. Die dort beigefügten Zahlen bezeichnen den Monatstag, an welchem der 4. Mond abends $8^h 30^m$ jenen Platz einnahm. Während dieser in den 17 Tagen etwas über einen Umlauf vollführte, ist der 3. Mond schon $2\frac{1}{2}$ mal herumgekommen (in einer Woche einmal). Noch schneller bewegt sich der 2. (in einer Woche 2 mal herum) und am schnellsten der innerste (in einer Woche 4 mal herum); sein Fortrücken kann man, wenn er dem Rande Jupiters nahe ist, schon nach einer halben Stunde mit Sicherheit wahrnehmen.

Es ist nun zu untersuchen, in welcher Richtung jeder Mond um den Jupiter läuft. Die Entscheidung für den 4. Mond geht aus der Zusammenstellung unten in Figur 74 keineswegs hervor. Die obere Hälfte der Bahn kann hinten oder vorn liegen. In ersterem Falle wandert der Mond, von oben gesehen, links, im anderen rechts herum. Wir müssen also auf Erscheinungen achten, die uns über die Lage der Bahnhälften Aufschluß geben.

Stellungen der 4 Monde des Jupiter

vom 8. bis 25. Dez. 1868, stets abends $8^{h}\,30^{m}$ mittlerer Berliner Zeit.



Ein Umlauf des vierten Jupiter-Mondes, vom 8. bis 25. Dez. 1868.

Figur 74. Stellungen der 4 Monde des Jupiter.

Jupiter befand sich am 8. Dezember beim 5. Grade der Länge, die Sonne beim 257sten und am 25. Dezember Jupiter beim 6ten und die Sonne beim 274. Grade der Länge. Der Winkel Sonne-Erde-Jupiter war also anfangs 108° und nahm ab bis auf 92°; mithin stand die Sonne unter dem Horizonte rechts vom Beobachter, und die Schatten Jupiters und seiner Monde fielen so, daß sie, wenn sie sichtbar wären, auf der linken Seite der Körper, nach hinten laufend, erblickt werden müßten.

Am 11. Dezember sah man um $8^h 30^m$ nur drei Monde, den 2., 3. und 4., aber auf der Jupiterscheibe einen kleinen schwarzen Punkt, der auf ihr beim Anblick im Fernrohre von rechts nach links, in Wirklichkeit also von Ost nach West langsam fortrückte. Es war der Schatten des ersten Mondes; er selbst zeigte sich*) um $9^h 10^m$ an dem Rande, welcher unserer West-Himmelsgegend zugewandt war. Die in Figur 74 unterhalb der geraden Linie liegende Hälfte der Mondbahn befindet sich also vorn. Daher läuft der 1. Mond, vom Nordpole der Ekliptik aus gesehen, in der der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Richtung.

Am 13. Dezember war um $8^h 30^m$ der 2. Mond unsichtbar. 13 Minuten nachher kam er östlich vom Jupiter zum Vorschein, aber schon $1\frac{1}{2}$ Jupiter-Radien vom Rande entfernt an dem in der Figur mit (2) bezeichneten Punkte. Er war verfinstert gewesen, stand also hinter dem Jupiter und ging nach Ost. Der 2. Mond läuft mithin, wie der erste, von oben gesehen links herum. Ebenso giebt die Figur mit (1) die Stelle an, bei welcher am 19. Dezember der 1. Mond um $9^h 30^m$ aus dem Schatten Jupiters trat. Am 20. Dezember stand der 2. Mond hinter Jupiter.

Am 24. Dezember trat eine sehr lehrreiche Erscheinung ein. Der 3. Mond war östlich vom Jupiter, 1,3 Radien vom Rande entfernt, wie die Figur zeigt, um $8^h 30^m$ noch zu sehen. 5 Minuten später verschwand er. Es war der Eintritt in den Jupiterschatten. Dies bezeichnet die räumliche Lage des Schattens sehr schön. Der Mond war längst schon hinter Jupiter zum Vorschein gekommen und nun erst gelangte er an den Schatten. Die Punkte (1) und (2) markieren zwei verschieden weit rückwärts vom Jupiter entfernte Stellen der Vorderseite des Schattenmantels und 3 (am 24. Dezember) in noch größerer Ferne einen Punkt der uns abgewandten Seite desselben. Wir sehen jetzt also den Schatten wirklich in der Lage, welche er nach der zu Anfang angestellten Überlegung haben mußte. — Demnach befindet sich auch beim 3. Monde die in der Figur obere Bahnhälfte hinten; folglich bewegt er sich in derselben Richtung herum, wie der 1. und 2.

*) In einem hinlänglich kräftigen Fernrohre wird jeder der 4 Monde als ein heller leuchtender Fleck auf der matteren Jupiterscheibe erkannt.

Der Durchgang durch den Jupiterschatten giebt auch beim 4. Monde die ebenso ausfallende Entscheidung. Im Dezember 1868 lag aber seine Bahn so schräg, daß er dicht über den Schattenkegel fortging.

Jupiter wandert in fast 12 Jahren durch alle Zeichen der Ekliptik. (Tabelle zu Nr. 177.)*) Wir sehen deshalb die Bahnen seiner Monde von allen Seiten. Bei jedem Monde bleibt dabei sein größter Jupiterabstand, wo der Radius-Vektor der Bahn nicht perspektivisch verkürzt erblickt wird, stets von derselben Größe, da er immer gleich derselben Anzahl Jupiter-Halbmesser ist, wie die Messungen mit dem Faden-Mikrometer zeigen. (Nr. 24.) (Nur beim vierten, und noch weniger beim dritten Monde läßt sich eine äußerst geringe Spur von Wachsen und Abnehmen bemerken.)

Vier Monde laufen also in kreisförmigen Bahnen um Jupiter und alle in derselben Richtung wie Venus, die Erde und Jupiter um die Sonne.

Daß Jupiter nicht kreisrund, sondern elliptisch aussieht, zeigt ein gut vergrößerndes Fernrohr. (Vergl. Nr. 164 am Ende.) Daß er aber keine Scheibe, sondern wirklich ein Sphäroid ist, geht aus seinem Rotieren und auch aus der Form des auf ihn fallenden Schattens seiner Monde hervor. Der Schatten des 3. Mondes erschien am 30. August 1876 auf der Mitte seines Vorüberganges in einem hohen nördlichen Parallelkreise deutlich oval, wobei die Schärfe der Begrenzung nichts zu wünschen übrig ließ.**)

Schlußbemerkung. Mit den in diesem Paragraphen besprochenen Weltkörpern könnten die übrigen Planeten als weitere Beispiele vorgeführt werden zur Bestätigung dafür, daß das für die

---

*) Die Figur 74 gilt für den Schluß des Jahres 1868. Sechs Jahre später sieht man die Mondbahnebenen von unten und die Monde scheinen im Sinne des Uhrzeigerlaufes fortzurücken; das ist aber von oben her (vom Nordpole der Ekliptik aus) gedacht, doch wieder der Bewegung der Uhrzeiger entgegengesetzt. Der Anblick von oben oder von unten wechselt alle 6 Jahre. So wurden im Mai und Juni 1887 die Mondbahnen von unten gesehen in auffallend schräger Lage, so daß am 2. Juli abends $8^h 50^m$ der 4. Mond um einen Jupiterdurchmesser über dem 3. stand (fast 5 Durchmesser weit rechts vom Jupiter, beim Anblick im Fernrohre links). Der 4. Mond rückte vom Jupiter ab, der 3. auf ihn zu, war am folgenden Abende hinter Jupiter beim Parallelkreis 60° südlicher Breite vorgekommen und hatte auf der Ostseite bis $9^h 35^m$ einen Abstand gleich $^3/_4$ Jupiterdurchmessern erreicht; da verschwand er im Schatten Jupiters. (Jupiter stand in Südwest; sein Schatten fiel also schräg nach links-hinten.) Folglich liegt im Jahre 1887 die untere Bahnhälfte hinten; man erblickt die Mondbahnebene von unten.

**) Beobachtung von Todd auf der Sternwarte zu Adelaide. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 37, Nr. 6, April 1877, p. 284; mitgeteilt in Sklareks Zeitschrift „Der Naturforscher“, 10. Jahrgang (1877) Seite 303.

Elliptische Bahn des Planeten Jupiter.

1. Nr.	2. Zeitangabe in Bruchteilen des Jahres	3. Heliocentrische Länge λ mit dem Nullpunkte für 1. Januar 1850	4. Heliocentrische Breite β des Jupiter	5. Radien-Vektoren, angegeben in Sonnenhalbmessern s	6. Neigungswinkel der Bahn gegen die Ebene der Ekliptik	7. Länge in der Bahn, L, mit dem Nullpunkte für 1. Januar 1850	8. Die Radien-Vektoren in Spalte 5, vermindert um die gleichliegenden der Ellipse A	9. Ellipse B
1	1850,182	168° 8′ 39,3″	+ 1° 13′ 36,1″	1165,75 s	1° 18′ 40,6″	168° 8′ 48,95″ (48,8″)	+ 0,20 s	— 0,06 s
2	1851,266	198 5 49,9	+ 1 17 39,3	1170,4 s	40,8	198 5 33,12 (33,7)	0	— 0,38 s
3	1852,351	228 16 58,8	+ 1 0 46,2	1159,1 s	41,2	228 16 24,09 (25,5)	— 0,43 s	— 0,86 s
4	1853,439	259 32 39,4	+ 0 26 0,4	1134,95 s	41,4	259 32 14,35 (15,4)	— 0,57 s	— 0,97 s
5	1854,534	292 33 24,2	— 0 18 39,7	1104,3 s	41,0	292 33 28,44 (28,5)	— 0,62 s	— 0,91 s
6	1855,635	327 33 52,8	— 0 59 8,0	1077,3 s	40,5	327 34 11,38 (10,3)	— 0,27 s	— 0,40 s
7	1856,738	4 3 50,4	— 1 18 23,3	1063,75 s	39,7	4 3 46,68 (46,8)	0	0
8	1857,837	40 48 0,2	— 1 6 43,9	1069,3 s	40,4	40 47 27,75 (28,9)	+ 0,11 s	+ 0,19 s
9	1858,935	76 23 42,4	— 0 30 0,8	1091,6 s	41,0	76 23 15,19 (15,8)	+ 0,15 s	+ 0,23 s
10	1860,027	110 5 0,7	+ 0 15 22,6	1121,7 s	40,2	110 5 2,87 (2,9)	0	0
11	1861,110	141 53 24,1	+ 0 53 44,7	1149,6 s	41,2	141 53 42,87 (42,7)	— 0,04 s	— 0,17 s
12	1862,194	172 21 54,2	+ 1 15 27,8	1167,2 s	41,0	172 22 0,69 (0,8)	+ 0,03 s	— 0,25 s
13	1863,278	202 17 25,4	+ 1 16 30,7	1170,2 s	40,9	202 17 4,99 (5,5)	+ 0,39 s	0
14	1864,364	232 31 33,9	+ 0 56 52,1	1157,5 s	41,2	232 30 58,76 (59,7)	+ 0,62 s	+ 0,19 s
15	1865,451	263 54 46,7	+ 0 20 13,0	1132,3 s	40,3	263 54 25,28 (25,9)	+ 0,74 s	+ 0,35 s
16	1866,547	297 6 36,2	— 0 24 42,9	1101,3 s	39,7	297 6 44,14 (44,0)	+ 0,45 s	+ 0,18 s
17	1867,648	332 18 52,5	— 1 3 14,8	1074,8 s	39,6	332 19 10,16 (9,5)	+ 0,03 s	— 0,09 s

arithmetisches Mittel i = 1° 18′ 40,6″

Erde nachgewiesene Umlaufen um einen Centralkörper in der Natur mehrfach vorkommt und dem sorgfältigen Beobachter wirklich vor Augen tritt.*)

§ 20. Jupiters Bahn um die Sonne.

179. Heliocentrische Längen mit festem Nullpunkte. In Spalte 3 der Tabelle zu Nr. 177 sind die Längen der Oppositionspunkte so angegeben, wie sie zu der betreffenden Zeit waren. Der Anfangspunkt der Längenzählung, der Widderpunkt, geht aber in der Ekliptik jährlich 50,241″ rückwärts (Nr. 96), also sind die Längen der späteren Jahre auch am vorderen Ende ein wenig gewachsen. Um ihre Unterschiede genau zu erhalten, müssen wir sie auf einen gemeinsamen Ausgangspunkt bringen. Wir wählen als Nullpunkt der Längen den Ort des Widderpunktes, welchen er in der Ekliptik am 1. Januar 1850 (um 0^h mittlerer Berliner Zeit) einnahm. Wir vermindern die für die bestimmten Zeiten geltenden Längen um soviel mal 50,241″, wie Jahre seit dem 1. Januar 1850 vergangen sind. Bei der Berechnung des Jahresbruchteils lasse man nicht außer acht, ob das betreffende etwa ein Schaltjahr war. Die so ausgedrückte Zeitangabe der Opposition ist in Spalte 2 der neuen Tabelle (S. 241) angegeben zur Rechnung für Spalte 3. Da Jupiter bei der Opposition, vom Mittelpunkte der Sonne aus gesehen, senkrecht über oder unter derjenigen Stelle der Ekliptik sich befindet, wo dann die Erde anlangt, so sind die Längen der Oppositionen auch heliocentrische Längen Jupiters zu nennen.

180. Das Größen-Verhältnis der Halbmesser Jupiters und der Sonne. Bezeichnet man den Äquatorialhalbmesser des Jupiter-Sphäroides mit a (vergl. Nr. 178 am Ende) und den Halbmesser der Sonnen-Kugel mit s, so kann man mittels der scheinbaren Größen α und σ, die in Spalte 5 und 6 der Tabelle zu

*) Daß die Monde des Jupiter und die Phasen der Venus und des Mars Bestätigungen für das Kopernikanische System seien, darauf wies Galilei sogleich hin im Jahre 1610, als er mit dem von ihm nachkonstruierten Fernrohre sie entdeckt hatte. Für die Erde mit ihrem Monde zeigt Jupiter, „daß ein Centrum von Bewegungen sich doch selbst bewegen kann“.

Das nur wenig vergrößernde Fernrohr mit konkavem Okular ist 1608 vom Brillenmacher Lippersheim zu Middelburg in Holland durch Versuche hergestellt. Galilei, der Ende 1609 brieflich davon Nachricht erhielt, setzte sich ein ebensolches zusammen. Das stärker vergrößernde Fernrohr mit konvexem Okular, das ein umgekehrtes Bild giebt, wurde von Kepler 1610 erfunden. Das Okular, welches den Gegenstand nicht mehr umgekehrt zeigt, erfand der Pater Schyrläus im Kloster Rheit in Böhmen 1645.

Nr. 177 stehen, die Entfernung Jupiters von der Erde als $\frac{a}{\sin\alpha}$ und die der Sonne von der Erde als $\frac{s}{\sin\sigma}$ angeben. Allein diese Abstände lassen sich erst dann miteinander vergleichen, wenn das Verhältnis von a:s gefunden ist. Dies erreichen wir, wenn wir zu den Oppositionen Jupiters eine Konjunktion hinzunehmen. (Nr. 177.) Eine solche trat ein 1852 Nov. 25 $13{,}378^h$ bei $243^0 58' 8{,}6''$ der Länge. An den vorhergehenden Tagen*) war sein scheinbarer Äquatorialhalbmesser 15,759″ bei 7^0 scheinbarem Abstande von der Sonne am 19. Nov., 15,756″ bei 6^0 am 20. Nov., 15,755″ bei 5^0 am 21. Nov. und wieder 15,755″ bei 4^0 Abstand am 22. Nov. Er war also konstant geworden. Mithin kennen wir den scheinbaren Äquatorialhalbmesser zu jener Zeit der Konjunktion, wo wir den Jupiter hinter dem Glanze der Sonne nicht sehen können, $\alpha_2 = 15{,}755''$. Zu der Zeit war der scheinbare Sonnenhalbmesser $\sigma_2 = 974{,}13''$.

Die Linie von der Erde durch den Sonnenmittelpunkt, bei welcher die Konjunktion erfolgte, schneidet hinter der Sonne die Erdbahn in einem Punkte, für den wir den scheinbaren Halbmesser Jupiters auch bestimmen können aus den Angaben unserer Tabelle. An jenem Tage der Konjunktion waren seit dem 1. Jan. 1850 2,902 Jahre vergangen; wir haben folglich von obigen $243^0 58' 8{,}6''$ der damaligen Länge $2' 25{,}8''$ abzuziehen, um den Konjunktions-Standort Jupiters für den Nullpunkt der Tabelle anzugeben, nämlich $243^0 55' 42{,}8''$. Machen wir diese Sekunden und Minuten zu Graden, und ebenso die der nächsten Stellen 4 und 14 in Spalte 3 der Tabelle (Nr. 179), so haben wir dazu aus Spalte 5 der Tabelle zu Nr. 177

bei $259{,}544^0$ der Länge den Halbmesser $\alpha = 23{,}363''$
und bei $232{,}526^0$ " $\alpha = 22{,}776''$.

Von letzterem Orte hatte der Konjunktionspunkt bei $243{,}929^0$ der Länge $11{,}403^0$ Abstand. Für den ganzen Zwischenraum von $27{,}018^0$ änderte sich α um 0,587″; mithin kommen auf jenen Abstand

$$\frac{11{,}403}{27{,}018} \cdot 0{,}587'' = 0{,}248''.$$

Diese, zu dem kleineren α hinzugelegt, geben den scheinbaren Äquatorialhalbmesser Jupiters $\alpha_1 = 23{,}024''$ für den entgegengesetzten Punkt der Erdbahn. Von ihm aus hatte die Sonne $63^0 55' 42{,}8''$ Länge vom Nullpunkte für 1850. Sehen wir an dieser Stelle

*) Vergl. Note zu Nr. 55.

der Ekliptik die Sonne, so hat sie den scheinbaren Halbmesser $\sigma_1 = 948{,}21''$.

Mittels der Zahlen α_2, σ_2 und α_1, σ_1 können wir nun die Größe desjenigen Radius-Vektor Jupiters, welcher zu $243^0\,55'\,42{,}8''$ der Länge gehört, auf zwei Weisen ausdrücken, nämlich als Differenz der Abstände Erde-Jupiter und Erde-Sonne bei der Konjunktion und als Summe derjenigen für die eingeschaltete Opposition. Ist der wahre Sonnenhalbmesser s Kilometer lang und Jupiters Äquatorialhalbmesser $a = vs$, so haben wir

$$\frac{vs}{\alpha_2 \sin 1''} - \frac{s}{\sigma_2 \sin 1''} = \frac{vs}{\alpha_1 \sin 1''} + \frac{s}{\sigma_1 \sin 1''}$$

woraus für das Verhältnis $a:s$ hervorgeht der Wert

$$v = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)\,\alpha_1\,\alpha_2}{(\alpha_1 - \alpha_2)\,\sigma_1\,\sigma_2} = 0{,}103\,86.$$

Wir wissen also hierdurch, daß Jupiters Äquatorialhalbmesser a ein Zehntel des wirklichen Sonnenhalbmessers ist. Sein Polarhalbmesser ist um $\frac{1}{15}$ a kürzer als a. (Nr. 164 am Ende.)

181. Die heliocentrischen Breiten und die Radien-Vektoren der Jupiterbahn. Die Mittelpunkte der drei Weltkörper, J des Jupiter, E der Erde und S der Sonne, sind die Eckpunkte eines Dreiecks, in welchem die Seiten

$$JE = \frac{vs}{\alpha \sin 1''} \text{ und } ES = \frac{s}{\sigma \sin 1''},$$

nun beide in Sonnenhalbmessern s angegeben sind. Die Ebene dieses Dreiecks steht, in den von uns betrachteten Stellungen, auf der Ebene der Ekliptik senkrecht, weil bei den Oppositionsstandorten die Längen von J und S sich um 180^0 unterscheiden. Mithin wird der Nebenwinkel von JES bestimmt durch Jupiters Breite b. (Spalte 4 der Tabelle zu Nr. 177.) Wie dieser Winkel für die Erde Jupiters Breite ausdrückt, so giebt hier der Winkel ESJ die Breite β, von der Sonne aus gesehen, an; sie wird deshalb die heliocentrische Breite Jupiters genannt. Man findet β aus jenen beiden Seiten mittels des Tangenten-Satzes, und erhält, nachdem man für die Seiten obige Werte und auch für den Winkel EJS $b - \beta$ eingesetzt hat,

$$\operatorname{tg}(\beta - \tfrac{1}{2} b) = \frac{v\sigma - \alpha}{v\sigma + \alpha} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} b.$$

Allein nach dieser Formel darf bei der Kleinheit von $\frac{1}{2}$b nicht gerechnet werden, weil die Logarithmen der kleinen Tangenten ungleichförmig abnehmen und das gewöhnliche Interpolieren deshalb die

letzten Decimalen unrichtig liefern würde. Man muß zu den Bogen übergehen:

$$\beta - \tfrac{1}{2}\,b = \frac{v\sigma - \alpha}{v\sigma + \alpha} \cdot \tfrac{1}{2}\,b$$

und hieraus ergiebt sich, in Sekunden ausgedrückt,

$$\text{I)} \qquad \beta = \frac{v\sigma}{v\sigma + \alpha} \cdot b = fb$$

wenn zur Abkürzung der Faktor mit f bezeichnet wird.

Nun erhalten wir die Seite SJ durch den Sinussatz. Dabei ist es aber nicht ratsam, den Winkel bei J, $b - \beta$, zu benutzen, weil diese Differenz sehr klein werden kann; dann würde die Abrundung der letzten Decimale ein erheblicher Bruchteil der ganzen Größe sein, und dadurch recht ungenaue Zahlenwerte herbeiführen. Es ist SJ durch EJ auszudrücken

$$SJ = \frac{vs}{\alpha \sin 1''} \cdot \frac{\sin b}{\sin \beta}.$$

Das Verhältnis der Sinus der kleinen Winkel stimmt aber überein mit dem der Bogen, für welches oben $1 : f$ eingeführt wurde. Mithin läßt sich die Formel für den Radius-Vektor SJ, zum Rechnen bequem, schreiben

$$\text{II)} \qquad r = \frac{v}{\sin 1''} \cdot \frac{1}{\alpha f} \cdot s.$$

Da bei den scheinbaren Größen σ und α höchstens 5 Ziffern angebbar sind, so können auch in den Ergebnissen nicht mehr als 5 Ziffern zuverlässig hervorgehen. Also sind fünfstellige Logarithmen bei diesen Berechnungen vollkommen ausreichend. So ergeben sich aus den Größen, welche in den Spalten 4, 5 und 6 der Tabelle in Nr. 177 stehen, für β und SJ die Werte der Spalten 4 und 5 in der neuen Tabelle (S. 241).

182. Heliocentrische Länge der Bahnschnittpunkte in der Ebene der Ekliptik. Das Zurückgehen der Knoten. Jupiter ging durch die Ebene der Ekliptik von ihrer Süd- nach der Nordseite (vergl. Spalte 4 der Tabelle zu Nr. 177) 1859 Aug. 28 $0{,}014^h$. Dabei war seine Länge, von der Erde aus gesehen, $l_i = 107^\circ\,12'\,7{,}0''$ und die der Sonne $l_s = 154^\circ\,34'\,59{,}2^s$. Jupiters scheinbarer Äquatorialhalbmesser hatte $\alpha = 17{,}189''$ und der scheinbare Halbmesser der Sonne $\sigma = 951{,}70''$.

Da der Winkel $SEJ = l_s - l_i$ ist, erhält man zunächst den Winkel ESJ mittels

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(S - J) = \frac{v\sigma - \alpha}{v\sigma + \alpha} \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\,E$$

und dann $\lambda = S + l_s - 180^0$ als heliocentrische Länge zur Zeit des Durchganges. $\lambda = 98^0\,56'\,55{,}8''\,(56{,}9'')$. Sie ist um $9{,}654 \cdot 50{,}241'' = 8'\,5{,}0''$ zu verkürzen, um von dem Orte des Widderpunktes am 1. Jan. 1850 anzufangen.

Die Richtung, vom Sonnenmittelpunkte in der Ekliptik-Ebene zum Bahnschnittpunkte (J_{59}), weist auf den Punkt der Himmelskugel, welchen man den aufsteigenden Knoten der Jupiterbahn nennt. Die Rechnung ergiebt also die damalige Länge des aufsteigenden Knotens

$$\lambda_0 = 98^0\,48'\,50{,}8''\,(51{,}9'').$$

Hiernach ist die Figur 75, der wirklichen Stellung entsprechend, gezeichnet. Um S wurde der die Erdbahn darstellende Kreis mit dem Radius SE als Längeneinheit, 1^{cm}, beschrieben. Die gerade Linie von S nach rechts soll zum Widderpunkte laufen. An sie wurde in S der Winkel $CS\Upsilon = l_s = 154{,}6^0$ angetragen. CS rückwärts verlängert, lieferte den Standort E_{59} der Erde zu jener Zeit im Jahre 1859. Der zugehörige Standort J_{59} des Jupiter war dann leicht anzugeben.

Unsere Tabelle zeigt noch zwei Durchgänge Jupiters durch die Ebene der Ekliptik, und zwar von ihrer Nord- nach der Südseite; nämlich

1) 1854 Febr. 1 $13{,}363^h$. Dabei war seine Länge, von der Erde aus gesehen, $l_i = 284^0\,7'\,46{,}3''$ und die der Sonne $l_s = 312^0\,54'\,25{,}8''$. Jupiters scheinbarer Äquatorialhalbmesser hatte $\alpha = 16{,}508''$ und der scheinbare Halbmesser der Sonne $\sigma = 974{,}76''$. Hier ergiebt dieselbe Rechnung die Länge $278^0\,53'\,47{,}3''\,(46{,}55'')$, welche zu verkürzen ist um $3'\,25{,}3''$; dann hat man die Länge des niedersteigenden Knotens von 1854

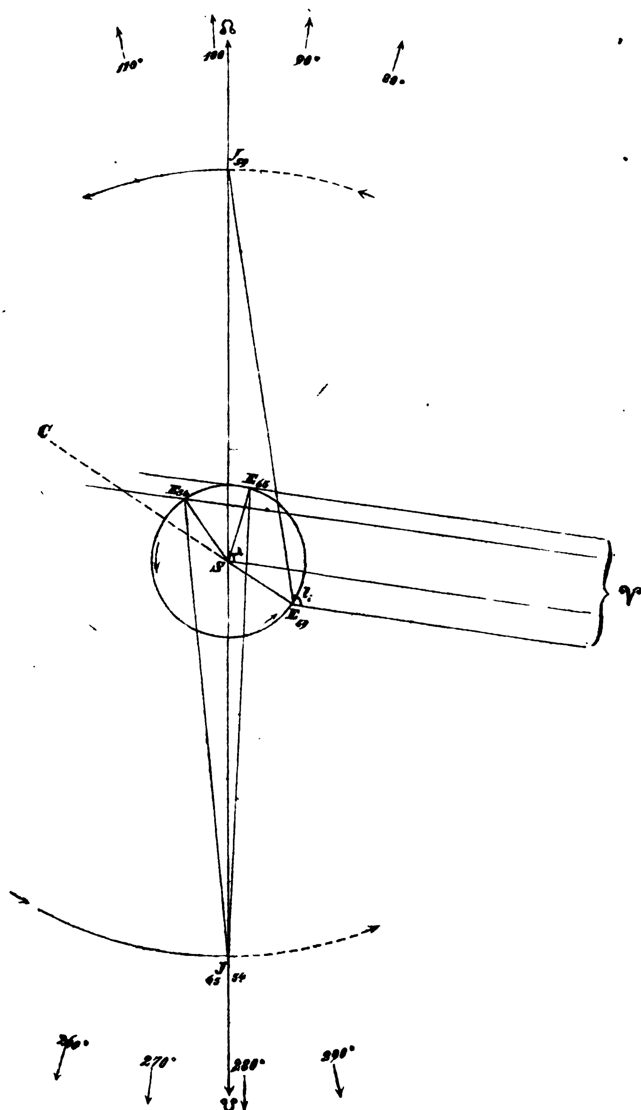
$$\lambda' = 278^0\,50'\,22{,}0''\,(21{,}3'').$$

2) Der folgende Durchgang Jupiters in derselben Richtung fand statt

1865 Dez. 14 $0{,}352^h$. Dabei war seine Länge, von der Erde aus gesehen, $l_i = 276^0\,25'\,41{,}6''$ und die der Sonne $l_s = 262^0\,33'\,43{,}0''$. Jupiters scheinbarer Äquatorialhalbmesser hatte $\alpha = 16{,}203''$ und der scheinbare Halbmesser der Sonne $\sigma = 976{,}27''$. Hier wird man $l_s - 180^0$ zu $360^0 - S$ addieren, um Jupiters Länge, von S aus gesehen, für 1865 Dez. 14 zu erhalten. Sie ist $279^0\,1'\,25{,}2''\,(25{,}5'')$ und muß um $13'\,21{,}3''$ verkürzt werden; dann kommt für den festen Nullpunkt

$$\lambda'' = 278^0\,48'\,3{,}9''\,(4{,}2'')$$

als die Länge des niedersteigenden Knotens für 1865.



Figur 75. Die Knoten der Jupiterbahn.

Da λ'' von λ' etwas verschieden ist, so hat Jupiters Mittelpunkt nicht ganz genau an derselben Stelle, wie 1854, die Ebene der Ekliptik durchschnitten. Der neue Treffpunkt verdeckte, von der Sonne aus gesehen, einen Punkt der Ekliptik-Peripherie, der die Länge des niedersteigenden Knotens von 1854 um

$$\lambda' - \lambda'' = 2' \, 18{,}1'' \, (17{,}1'')$$

verkürzt. In diesen kleinen Bogen trifft die Verlängerung des nach dem aufsteigenden Knoten von 1859 gehenden Radius-Vector in dem Punkte, dessen Länge $\lambda_0 + 180^0 = 278^0 \, 48' \, 50{,}8'' \, (51{,}9'')$ ist. Dies zeigt eine bei jedem Umlaufe eintretende kleine Verschiebung der Knotenpunkte, und zwar in der Richtung der abnehmenden Gradzahlen der Ekliptik.

183. Neigung der Bahn gegen die Ebene der Ekliptik. Die vom Mittelpunkte der Sonne aus durch irgend einen Standort Jupiters gehende gerade Linie treffe verlängert die Himmelskugel in J; der Fußpunkt des von J an der Himmelskugel senkrecht zur Ekliptik gehenden Bogens sei F. Legen wir durch den Punkt J und den ihm nächsten Knoten K einen größten Kreis, so finden wir durch die Katheten des entstandenen sphärischen Dreiecks, $JF = \beta$ und FK als Längendifferenz δ bezüglich $\lambda' - \lambda$, $\lambda - \lambda_0$ oder $\lambda'' - \lambda$, den Winkel $JKF = i$ aus

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \delta}.$$

Die Ergebnisse der Rechnung stehen in Spalte 6 der Tabelle (Nr. 179). Man sieht, daß sie für die 17 Standorte so genau, wie möglich, übereinstimmen. Ihr arithmetisches Mittel ist $i = 1^0 \, 18' \, 40{,}6''$. Folglich liegen die Radien-Vektoren, welche zusammen mit dem ihnen nächsten Knoten (durch Ebenen) verbunden wurden, alle in derselben Ebene.

Diese zu den drei Orten der Knoten gehörigen drei Ebenen weichen aber in ihrer Lage nur äußerst wenig von einander ab. Denn die Differenzen der Knotenlängen, λ' nebst $\lambda_0 + 180^0$ und λ'', sind, da die Ekliptik die Ebenen unter dem sehr spitzen Winkel i durchschneidet, noch mit sin i zu multiplizieren, um die Neigungswinkel zwischen den benachbarten Ebenen auszudrücken. Es wird der Winkel zwischen der ersten und zweiten Ebene

$$[\lambda' - (\lambda_0 + 180^0)] \sin i = 2 \text{ Winkelsekunden}$$

und der zwischen der zweiten und dritten

$$[(\lambda_0 + 180^0) - \lambda''] \sin i = 1 \text{ Winkelsekunde.}$$

Und diese ganz geringen Veränderungen der Lagen vollziehen sich

erst in $5\frac{1}{2}$ Jahren und in $6\frac{1}{4}$ Jahren. Deshalb darf man, ohne dies zu berücksichtigen, sagen:

Jupiters Mittelpunkt beschreibt um die Sonne eine ebene Bahn.

Nur wenn von seinem über Jahrhunderte ausgedehnten Laufe eine Vorstellung gewonnen werden soll, lautet das Ergebnis: Jupiters Mittelpunkt läuft in einer beweglichen, nur $1{,}3^0$ gegen die Ekliptik geneigten Ebene, welche um ihren mitten in der Sonne ruhenden Punkt sich sehr langsam dreht, und zwar gegen die Ordnung der Gradzahlen auf der Ekliptik.

184. Jupiters Länge in seiner Bahn. Da die Ebene der Jupiterbahn mitten durch die Sonne geht, so projiziert die Bahn sich, vom Sonnenmittelpunkte aus gesehen, auf die Himmelskugel als ein größter Kreis. In demselben sei derjenige Punkt O, dessen heliocentrische Länge in der Ekliptik null ist, der Anfangspunkt der Längen in der Bahn. Von ihm habe der aufsteigende Knoten K (vergl. Figur 75) den Bogen-Abstand L_0. Die heliocentrische Länge λ_0 des Knotens K liefert die Hypotenuse L_0 durch

$$\operatorname{tg} L_0 = \frac{\operatorname{tg} \lambda_0}{\cos i}$$

so wie λ' und λ'' entsprechend L' und L'' als „Längen in der Bahn" für die niedersteigenden Knoten der Jahre 1854 und 1865.

$L_0 = \ \ 98^0\,48'\,42{,}62''\ (44{,}1'')$ [es ist $\angle \Upsilon O K > 90^0$]
$L' = 278^0\,50'\,13{,}80''\ (13{,}4'')$
$L'' = 278^0\,47'\,55{,}73''\ (56{,}3'')$.

Dann folgt in der Bahn die Länge L von irgend einem Standorte Jupiters, verbunden mit dem ihm nächsten Knoten, aus einer Gleichung wie

$$\operatorname{tg}(L - L_0) = \frac{\operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0)'}{\cos i}.$$

Die Ergebnisse der Rechnung stehen in Spalte 7 der Tabelle zu Nr. 179. (Seite 241.)

185. Jupiters siderische Umlaufszeit. Die Zeit zwischen dem Niedersteigen durch die Ebene der Ekliptik vom Jahre 1854 und dem vom Jahre 1865 (Nr. 182) betrug elfmal $365^d + 3$ Schalttage $+ (347^d\,0{,}352^h) - (31^d\,13{,}363^h) = 4333^d\,10{,}989^h = 4333{,}458^d$.

Bezeichnen wir diese Zeit mit T, die Umlaufszeit mit x, die

1296000″ der Kreisperipherie mit p, die am ganzen Umlaufe noch fehlenden $L' - L'' = 138{,}07''$ (137,1″) mit d, so hat man

$$x = \frac{T}{1 - \frac{d}{p}}$$

wofür nach Ausführung der Division zu schreiben ist

$$x = T + \frac{d}{p} T \qquad x = 4\,333{,}920^d \; (4\,333{,}916^d).$$

Demnach ist Jupiters siderische Umlaufszeit 4333,92 Tage mittlerer Zeit (oder, da ein julianisches Jahr 365,25 Tage hat, 11 Jahre 316,17 Tage; es fehlen also an 12 Jahren nur 7 Wochen.)

Anmerkung. Aus einer langen Reihe von Umläufen findet man genauer die Umlaufszeit $4332{,}5848^d$.

186. Bestimmung einer Ellipse aus drei gegebenen Radien-Vektoren. Für irgend drei in Spalte 5 der Tabelle (Nr. 179) stehende Radien-Vektoren r, r_1 und r_2 denken wir uns jetzt eine Ellipse, welche diese drei Linien als Radien-Vektoren besitzt, und wollen Lage, Gestalt und Größe der gedachten Ellipse ermitteln. Wir kennen aus der Differenz der Längen in der Bahn (Spalte 7) den Winkel δ_1, welchen r_1 mit r, und den Winkel δ_2, den r_2 mit r einschließt. Ist nun für r die Anomalie ϑ gleich x, so ist sie für r_1 $x + \delta_1$ und für r_2 $x + \delta_2$. Die in Nr. 167 entwickelte Gleichung

$$r(1 + \varepsilon \cos \vartheta) = a - \varepsilon e$$

dividiere man durch die Unbekannte ε (damit der Kosinus ohne Koefficient sei) und setze dann den rechts stehenden Ausdruck $\frac{a}{\varepsilon} - e$ oder, weil $e = \varepsilon a$ ist, $\left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right)a$ gleich z, da er eine dritte Unbekannte a enthält. Nun lauten die zur Bestimmung der Unbekannten erforderlichen drei Gleichungen

$$\text{I)} \quad \frac{1}{\varepsilon} + \cos x = \frac{z}{r} \qquad \frac{1}{\varepsilon} + \cos(x + \delta_1) = \frac{z}{r_1} \qquad \frac{1}{\varepsilon} + \cos(x + \delta_2) = \frac{z}{r_2}.$$

Zunächst werde ε fortgeschafft und aus den entstandenen Gleichungen

$$\text{II)} \quad 2 \sin(x + \tfrac{1}{2}\delta_1) \sin \tfrac{1}{2}\delta_1 = \frac{r_1 - r}{r_1 r} z \quad \text{und}$$

$$2 \sin(x + \tfrac{1}{2}\delta_2) \sin \tfrac{1}{2}\delta_2 = \frac{r_2 - r}{r_2 r} z$$

auch die zweite Unbekannte z

$$\frac{\sin(x+\frac{1}{2}\delta_2)}{\sin(x+\frac{1}{2}\delta_1)} = \frac{r_2 - r}{r_1 - r} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\delta_1}{\sin\frac{1}{2}\delta_2}.$$

Für die rechte Seite werde die Kotangente eines Hilfswinkels ω eingeführt, also

III) $$\operatorname{cotg}\omega = \frac{(r_2 - r)\, r_1 \sin\frac{1}{2}\delta_1}{(r_1 - r)\, r_2 \sin\frac{1}{2}\delta_2}$$

dann erhält man aus der Proportion

$$\frac{\sin(x+\frac{1}{2}\delta_2)}{\sin(x+\frac{1}{2}\delta_1)} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

durch Addieren und Subtrahieren der Verhältnisglieder

IV) $$\operatorname{tg}[x+\tfrac{1}{4}(\delta_2+\delta_1)] = \operatorname{tg}(\omega+45^0)\operatorname{tg}\tfrac{1}{4}(\delta_2-\delta_1).$$

Durch den gefundenen Winkel x haben wir nun die Lage desjenigen Scheitelpunktes der großen Achse, welcher dem gegebenen Brennpunkte S näher ist. Dieser, der Sonne nächste Punkt der Bahn, heißt das Perihel. Seine Länge in der Bahn ist also aus L für r

$$L_P = L - x \quad \text{und in der Ekliptik} \quad \lambda_P \text{ aus } \operatorname{cotg}\lambda_P = \frac{\operatorname{cotg} L_P}{\cos i}.$$

Nachdem z aus einer der Gleichungen II) und darauf ε aus I) berechnet ist, kennen wir durch die numerische Excentrizität ε die Form der Ellipse.

Ihre Größe endlich wird durch a und e bestimmt, die aus $\left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon\right)a = z$ und $e = \varepsilon a$ hervorgehen, ausgedrückt in Sonnenhalbmessern s.

187. Berechnung der elliptischen Bahn Jupiters. Die in Spalte 5 der Tabelle stehenden Werte der Radien-Vektoren brechen bei der ersten Decimale ab; ihre Enden befinden sich also nur in der Nähe der wahren Punkte. Die Endpunkte selber aber sind es, welche uns in der Rechnung eine Ellipse festlegen; und dazu sind nur drei erforderlich (r, r_1 und r_2). Da nun in Spalte 5 der Tabelle (Nr. 179) uns 17 Werte zur Verfügung stehen, so könnten wir so viele Ellipsen berechnen, als diese 17 sich zu je 3 kombinieren lassen, und das sind $\frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 680$ Ellipsen. Wählte man drei Endpunkte, die nahe bei einander sind, so würden sie, wegen ihrer Abweichungen von der wahren Bahn, eine Ellipse liefern, die in ihrem ferneren Laufe von der wahren vielleicht sehr weit abweicht. Offenbar wird die genaueste Ellipse durch diejenigen drei Punkte bestimmt,

von denen 2 möglichst nahe den Scheiteln der großen Achse sind, und der dritte möglichst nahe bei einem Scheitel der kleinen Achse sich befindet. (Umgekehrt, bei den Scheiteln der kleinen Achse 2 Punkte und bei einem der großen den dritten Punkt zu wählen, ist zu verwerfen, weil in Formel III Differenzen auftreten, bei denen der Wert der sehr kleinen dann unzuverlässig wird.) Demnach hat man die beste Ellipse (A) aus r_2 in Zeile 2, r in Zeile 7 und r_1 in Zeile 10. Daß sie in der That an alle Enden recht nahe herankommt, wird nachher nachgewiesen werden. Der nächst diesen gut brauchbare Radius-Vektor ist der in Zeile 13. Er ist von dem r_2 in Zeile 2 kaum mehr als 4 Grade entfernt und nur um 0,2 s kürzer. Aus diesem und denselben beiden r und r_1 ist hier noch eine zweite Ellipse, B, berechnet, um zu zeigen, wie selbst diese geringe Änderung, und trotzdem sie bei der am wenigsten bewirkenden Stelle (nahe dem ferneren Scheitel der großen Achse) eintritt, auf die Zahlenwerte der zu bestimmenden Größen einen überraschend starken Einfluß ausübt, so daß man also nicht ohne Überlegung aus den 17 Punkten wählen darf.

Ellipse A aus den Zeilen 2, 7 und 10.	Ellipse B aus den Zeilen 13, 7 und 10.
$x = -8^0 14' 4{,}91'' (-8^0 13' 59{,}5'')$	$x = -8^0 25' 22{,}61'' (19{,}7'')$

Länge des Perihels (mit dem Nullpunkte für 1. Januar 1850)

in der Bahn	
$L_P = 12^0 17' 51{,}59'' (46{,}3'')$	$L_P = 12^0 29' 9{,}29'' (6{,}5'')$
in der Ekliptik	
$\lambda_P = 12^0 17' 40{,}35'' (35{,}5'')$	$\lambda_P = 12^0 28' 57{,}89'' (55{,}5'')$
$z = 23167{,}63$ s (23168 s)	$z = 23090{,}79$ s (23091 s)
$\frac{1}{\varepsilon} = 20{,}78951 (20{,}7898)$	$\frac{1}{\varepsilon} = 20{,}71775 (20{,}7179)$
numerische Excentricität	
$\varepsilon = 0{,}048101 (0{,}04810)$	$\varepsilon = 0{,}048268 (0{,}04827)$
halbe große Achse	
$a = 1116{,}974$ s (1116,98 s)	$a = 1117{,}144$ s (1117,16 s)
halbe Excentricität	
$e = 53{,}728$ s (53,727 s)	$e = 53{,}922$ s (53,922 s).

Jeder den Sonnenabständen Jupiters gleichliegende Radius-Vektor dieser beiden Ellipsen wird nach I) aus

$$r = \frac{z}{\frac{1}{\varepsilon} + \cos\vartheta}$$

gefunden, wenn man $\vartheta = L - L_p$ (Spalte 7) nimmt. Die so berechneten Radien-Vektoren der Ellipsen A und B wurden von den entsprechenden Radien-Vektoren der Jupiterbahn (Spalte 5 der Tabelle zu Nr. 179) abgezogen. Demnach bedeutet der positive Rest, daß der Standort Jupiters außerhalb der Ellipse sich befindet, und das Minuszeichen giebt an, daß die Ellipse um den Standpunkt herumläuft. Diese Differenzen stehen in den Spalten 8 und 9 der Tabelle. (Seite 241.)

Unsere Tabelle stellt einen und einen halben Umlauf Jupiters dar. Die Standorte der 6 letzten Zeilen (12 bis 17) befinden sich auf derselben Seite der Sonne, wie die der 6 ersten. Vergleicht man für die benachbarten Standorte 3 und 14, 4 und 15, 5 und 16 die Abweichungen, so sieht man aus den Vorzeichen in den Spalten 8 und 9, daß beide Ellipsen zwischen der ersten und zweiten Punktreihe hindurchlaufen, doch so, daß A in nahe gleichen Abständen sich hindurchzieht, dagegen die Ellipse B (Spalte 9) der ersten Schar fern bleibt, aber den Standorten des ganzen letzten Umlaufs (Zeile 7 bis 17) sich genauer anschließt. Hieraus folgt, daß eine feste Ellipse alle Standorte in ihre Peripherie gar nicht aufnehmen kann. Man sagt deshalb: Jupiters Bahn wird dargestellt durch eine veränderliche Ellipse. Während B dem letzten Umlaufe nahe kommt, zeigt die Ellipse A eine frühere Form des Laufes. Die Bahn ändert also ihre Gestalt dadurch, daß die Excentricität langsam zunimmt. Die Erdbahn verändert sich in der entgegengesetzten Weise; ihre Excentricität nimmt ab. (Anmerkung zu Nr. 166.)

Jupiters elliptische Bahn weicht mehr von der Kreisrundung ab, als die Erdbahn. Denn für Jupiters Lauf ist die numerische Excentricität fast schon $\frac{1}{20}$, und bei der Erde nur $\frac{1}{60}$. (Nr. 166.) Berechnet man, wie in Nr. 168, das Verhältnis $(a - b) : a = 0{,}00116$ und nimmt man, wie dort zur Darstellung der Erdbahn geschah, für die große Halbachse a 1^m, so wird hier $a - b = 1{,}16^{mm}$. Während also die dem Kreise von 1^m Radius eingezeichnete Ellipse von der Gestalt der Erdbahn bei den Scheiteln der kleinen Achse nur $\frac{1}{7}^{mm}$ vom Kreisumfange entfernt blieb, treten bei einer demselben Kreise eingezeichneten Ellipse von der Form der Jupiterbahn die Scheitel der kleinen Achse schon $1\frac{1}{6}^{mm}$ vom Kreisumfange zurück. Die Brennpunkte aber kommen in der Zeichnung der Jupiterbahn schon 48^{mm} weit vom Mittelpunkte ab.

§ 21. Gesetze des Umlaufs: Die drei Keplerschen Gesetze. Newtons Gravitationsgesetz.

188. Schwungkraft. Es soll die Größe der Centralkraft bestimmt werden, welche einen Körper in seiner kreisförmigen Bahn erhält.*)

Wir stellen zunächst die Frage: wie groß muß eine Kraft, welche nur alle n tel Sekunden in augenblicklichen Einwirkungen sich äußert, sein, damit ein Atom mit seiner Geschwindigkeit v eine Folge gleicher Sehnen des gegebenen Kreises durchlaufe?

Wir tragen den n ten Teil der Linie v als Sehne AB in den Kreis ein. (Figur 76.) Hat das Atom diesen kleinen Weg AB durchflogen, so würde es durch das Beharrungsvermögen in der Richtung AB die der AB gleiche Strecke BC im nächsten n tel der Sekunde zurücklegen; wir wünschen aber, daß es sich in der Sehne BD bewege, die wir gleich AB gemacht haben. Deshalb verbinden wir C mit D, vollenden das Parallelogramm BCDE, und sehen, daß unser Wunsch erfüllt wird, wenn das Atom in B eine Krafteinwirkung erfährt, die es in der n tel Sekunde von B bis E triebe. Die Richtung BE halbiert den Winkel ABD, weil aus $\gamma = \delta$ hervorgeht $\alpha = \beta$. Auch der Radius MB halbiert diesen Winkel, wie die Kongruenz der Dreiecke MBD und MBA zeigt. BE liegt also auf BM, d. h. die Richtung der erforderlichen Kraftwirkung muß durch den Mittelpunkt des Kreises gehen. Weil in D dasselbe stattfindet, wie in B, so ist dort das Verfahren zu wiederholen, nachher in H, in L und so fort. Damit also das Atom die Reihe gleicher Sehnen ABDHL... durchfliege, sind alle n tel Sekunden gleiche Kraftwirkungen erforderlich, die nach dem Mittelpunkte gerichtet sind.

Die Ähnlichkeit der gleichschenkligen Dreiecke BDE und BDM giebt die Größe von $BE = \frac{BD^2}{r}$ oder, da $BD = \frac{v}{n}$ ist,

$$BE = \frac{v^2}{n^2 r}.$$

Da jedoch die Strecke BE schon in einer n tel Sekunde zurückgelegt werden müßte, so ist die von der augenblicklichen Einwirkung hervorgebrachte Geschwindigkeit n mal so groß

$$n\,BE = \frac{v^2}{nr}.$$

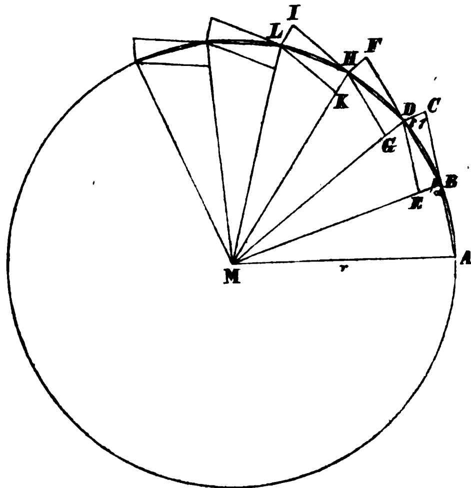
---

*) Das Gesetz der Schwungkraft ist von Huygens aufgestellt. (Nr. 39, Note.)

Die Größe einer Kraft wird bestimmt durch die Geschwindigkeit, welche sie mit den eine ganze Sekunde lang fortgesetzten Einwirkungen hervorzubringen vermag. Alle n Wirkungen würden in der Richtung BM eine Geschwindigkeit von der nfachen Größe liefern. Diese Geschwindigkeit

$$\gamma = \frac{v^2}{r}$$

ist also der Zahlenwert für die Kraft, welche das Atom in B durch eine einzige Einwirkung bereits in einer ntel Sekunde von B bis E bringen würde.



Figur 76. Zur Schwungkraft.

Die zweite Einwirkung der Kraft erfährt das Atom, wenn es am Ende D der Diagonale des Kräfteparallelogramms ist; durch sie kommt es in die Diagonale DH, durch die dritte nach L und so fort, läuft also mit seiner Geschwindigkeit v gleichförmig herum. Demnach ist die gefundene Kraft diejenige, welche zum Zustandekommen des Laufes auf gleichen Kreissehnen hin erforderlich ist. Je schneller wir die Krafteinwirkungen aufeinander folgen lassen, desto mehr schmiegen sich die Sehnen an den Kreisumfang an; dabei bleibt die Größe der Kraft dieselbe, weil n aus dem Ausdrucke verschwunden ist. Das Ergebnis gilt also auch bei stetigem Wirken der Kraft, wobei dann der Kreisumfang selber der Weg des Atomes wird. Diese Kraft wird Schwungkraft genannt.

Weil das Atom mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Kreisbahn durchläuft, so kann man statt v die Umlaufszeit t in den Ausdruck der Schwungkraft bringen, da $v = \frac{2\pi r}{t}$ ist. Dann hat man

$$\gamma = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^2 r.$$

Jupiter führt seine Monde in Kreisbahnen herum. (Nr. 178.) In diesem Beispiele ist es die Schwerkraft, welche als Schwungkraft auftritt. Sie läßt jedes Teilchen eines Mondes seine Kreisbahn durchlaufen; also tritt der Schwerpunkt des herumgeführten Körpers an die Stelle des oben gedachten Atomes. Und da die Einwirkungen

stets nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet sind, so folgt daraus, daß der Centralkörper auf die in der erweiterten Ebene seines Äquators herumlaufenden Monde so wirkt, als ob seine ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

189. Das erste Keplersche Gesetz.*) Die Planeten beschreiben Ellipsen um die Sonne, die in einem Brennpunkte dieser Kurven steht.

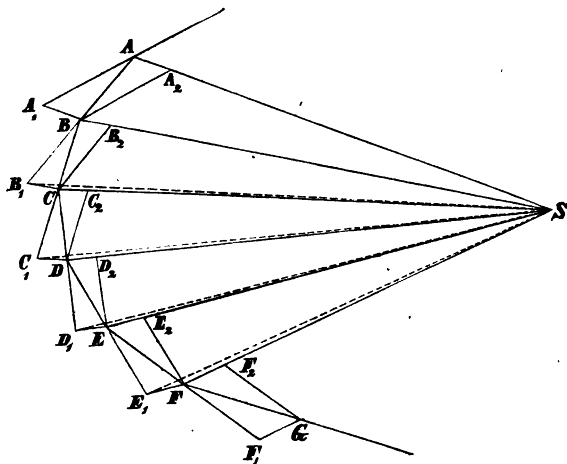
Für die Erde ist dies in Nr. 167 bewiesen; und wie wir es mit Hilfe der Oppositionen und Konjunktionen für Jupiter in § 20 entwickelt haben, würde es sich auch mit den übrigen Planeten durchführen lassen.**)

190. Das zweite Keplersche Gesetz. Die Flächenstücke, welche der Radius-Vektor eines umlaufenden Körpers beschrieb, verhalten sich wie die Zeiten, in denen diese Ausschnitte beschrieben wurden.

Die anziehende Masse habe ihren Schwerpunkt in S, der herumgeführte Körper in A. (Figur 77.) An dieser Stelle der Bahn sei seine Geschwindigkeit so groß, daß er in einer ntel Sekunde bis A_1 gelangen würde, wenn der Centralkörper ihn nicht anzöge. Dessen Einwirkung allein würde ihn in dieser ntel Sekunde bis A_2 treiben. Deshalb läuft er in der Diagonale AB des Kräfteparallelogramms

*) Johann Kepler, geb. am 27. Dez. 1571 zu „Weil der Stadt" in Würtemberg, gest. am 15. Nov. 1630 zu Regensburg. Die beiden ersten Gesetze stellte er auf in seiner 1609 zu Heidelberg erschienenen Astronomia nova, das dritte fand er am 15. Mai 1618. — Gruner, Biographie Keplers (Selbstverlag, gedruckt bei Karl Grüninger in Stuttgart, 1868, 8⁰), schreibt den Namen „Kepler" (nicht Keppler) und belegt dies ausführlich.

**) Kepler fand seine beiden ersten Gesetze an der Bahn des Mars aus erheblich genaueren astronomischen Beobachtungen, welche Tycho Brahe in der von ihm auf der Insel Huen im Sund erbauten Sternwarte Uranienburg 1571 bis 1597 in 24 geschriebenen Folianten niedergelegt und nach der 1597 in Prag neu errichteten Sternwarte 1599 mitgebracht hatte. Der vortreffliche Kunstgriff, durch welchen er die verschiedenen Abstände des Mars von der Sonne erhielt, war folgender. Er stellte solche Beobachtungen zusammen, die um volle Mars-Jahre, je 687 Tage, aus einander lagen (wobei nötigen Falls zwischen benachbarten Marsorten zutreffend interpoliert wurde). Da war Mars an derselben Stelle seiner Bahn von zwei verschiedenen Standorten der Erde aus gesehen. Die sie verbindende Sehne der Erdbahn, etwa EE_1 in Figur 80 zu Nr. 200, war die Standlinie, und die Längendifferenzen von Sonne und Mars gaben drei Winkel zum Viereck ESE_1M für die Berechnung der Diagonale SM. Die Erdbahn wurde dabei zunächst als excentrischer Kreis genommen (dessen Mittelpunkt in der Figur M_e ist). Kepler fand: für einen excentrischen Kreis sind gewisse Abstände des Mars von der Sonne zu klein, und die aus den Beobachtungen erhaltenen Längen müßten bis zu acht Minuten anders lauten. [Nach den Angaben auf Seite 164 und 162 in Reuschle, Kepler und die Astronomie. Frankfurt a. M., 1871. Verlag von Heyder und Zimmer. 201 Seiten. — Auch S. 295 in der Geschichte der Astronomie von Rudolf Wolf. München, 1877, R. Oldenbourg. 815 Seiten.]



Figur 77. Zum zweiten Keplerschen Gesetze.

fort. Am Ende B derselben erfährt er die nächste Einwirkung, die von ganz anderer Größe, als die vorhergehende sein kann. Die Vereinigung beider Bewegungen $BB_1 = AB$ und BB_2, versetzt ihn im zweiten ntel der Sekunde von B nach C, und so läuft er unter beliebig wechselnder Stärke der Schwerkraft-Einwirkungen fort nach D, E, F ... Nachdem S mit den äußeren Punkten B_1, C_1, ... verbunden ist, wird wegen paarweiser Gleichheit der Grundlinien und Höhen

$$\varDelta ABS = BB_1S = BCS = CC_1S = CDS = \ldots..$$

So klein auch die ntel Sekunden sein mögen, immer werden die Dreiecke ABS, BCS, CDS, ... von gleicher Größe $\varDelta$, liefern also zusammen in t_1 Sekunden einen Ausschnitt $S_1 = t_1 n \varDelta$ und zu irgend einer Zeit später in t_2 Sekunden ein Flächenstück $S_2 = t_2 n \varDelta$. Mithin verhält sich stets $S_1 : S_2 = t_1 : t_2$.

191. Das dritte Keplersche Gesetz. Die zweiten Potenzen der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich, wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne.

Nach der Grundeigenschaft einer Ellipse hat irgend ein Punkt des Umfanges von ihren beiden Brennpunkten die Entfernungen zusammen = 2a. (Vergl. Figur 69 in Nr. 166.) Dieser Punkt und der, welcher auf der andern Seite eines Scheitels B der kleinen Achse in gleichem Abstande von B, wie er, liegt, haben deshalb beide von einem der Brennpunkte die Abstände zusammen = 2a. Das arithmetische Mittel der Entfernungen dieser beiden Punkte ist also a, und das ist der Abstand des Scheitels B vom Brennpunkte. Da

dies von je zwei symmetrisch um B liegenden Punkten gilt, so haben unter allen Ellipsenpunkten die Scheitel der kleinen Achse die „mittlere Entfernung", und diese ist gleich der großen Halbachse a.

Die Umlaufszeit der Erde ist (nach Nr. 99) $t_1 = 365{,}256374^d$. Der mittlere scheinbare Sonnenhalbmesser $\sigma = 16'\,0{,}44''$ liefert die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, ausgedrückt in Sonnenradien s,

$$a_1 = 214{,}76 \text{ s}.$$

Für Jupiter ist die Umlaufszeit in Nr. 185 bestimmt und in der Anmerkung auch ihr genauer Wert angegeben; bei a nehmen wir die in Nr. 187 gefundenen Ergebnisse aus beiden Ellipsen: es wird

für die genaue Umlaufszeit und die Ellipse A	für jene Zeit aus 1 Umlaufe und die Ellipse B
$t^2 : t_1^2 = 140{,}70$	$t^2 : t_1^2 = 140{,}79$
$a^3 : a_1^3 = 140{,}69$	$a^3 : a_1^3 = 140{,}76$

Die Übereinstimmung der beiden Verhältniswerte trifft also bei A noch genauer zu, als bei B.

Da es für uns zu zeitraubend wäre, durch so große Berechnungen, wie in Nr. 177 und 179 bis 187 für Jupiter durchgeführt wurden, die in Sonnenradien anzugebende Halbachse a der Bahnellipse auch für jeden andern Planeten zu ermitteln, so vervollständigen wir den Nachweis, daß die beiden Potenzen-Verhältnisse immer an Größe übereinstimmen, durch Betrachtung des kleinen Planetensystems, welches als Jupiter mit seinen 4 Monden uns übersichtlich vor Augen steht. Hier erhält man die Radien der Mondbahnen durch Messen mit dem Fadenmikrometer unmittelbar in Äquatorialradien des Centralkörpers ausgedrückt. Man sieht ja einen solchen Bahnhalbmesser quer vor sich, also nicht perspektivisch verkürzt, wenn der Mond seinen größten scheinbaren Abstand vom Jupiter erlangt hat, worauf schon unter Nr. 178 (fast am Ende) hingewiesen wurde.

Zur Bestimmung der Umlaufszeit eines Mondes benutzt man als Zeitmarke den Augenblick des Anfanges oder des Endes der Verfinsterung durch Jupiter. Um zunächst ein annähernd richtiges Ergebnis zu erlangen, stellt man solche Beobachtungen an, wenn Jupiter in Opposition steht, weil da, indem die Erde quer durch die Linie Jupiter-Sonne hindurchläuft, die gefundene Zeit frei ist von der Dauer der Fortpflanzung des Lichtes. Diese Zahl lehrt dann, wie viel Umläufe der Mond ausgeführt haben muß, wenn Jupiter nach fast 12 Jahren an derselben Stelle seiner Bahn wieder in Opposition kommt. Nun liefert die ganze Zwischenzeit, durch die Anzahl der Umläufe dieses Mondes dividiert, seine Umlaufszeit mit der Genauigkeit, welche die Angaben in Spalte 2 der kleinen Tabelle

aufweisen. Daraus folgt, daß für die geringe Abweichung, welche an der vollkommenen Übereinstimmung der beiden Verhältniswerte noch hervortritt, die Fehlerquelle nicht zu suchen ist in den Umlaufszeiten, sondern in den Zahlen für die Bahnradien, weil sie erheblich anders ausfallen, wenn der Mondabstand ausgedrückt wird als Vielfaches des einen oder des andern Wertes, welchen man bei der Mikrometermessung des Äquatorialradius des Jupiter, selbst mit äußerst kleinen Unterschieden, erhalten hat. Die in der letzten Spalte stehenden Abstände sind von Mädler angegeben.*)

Monde des Jupiter	Siderische Umlaufszeit	t =	Mittelpunkts-Abstand in Radien des Jupiter-äquators
1. Mond	1d 18h 27m 33,505s	152 854s	6,049
2.	3 13 13 42,04	306 822	9,623
3.	7 3 42 33,36	618 153	15,350
4.	16 16 32 11,27	1 441 931	26,998

Hieraus ergeben sich bei je zwei dieser Nebenplaneten die Werte der beiden Potenzen-Verhältnisse:

	1. und 2.	1. und 3.	1. und 4.
$t^2 : t_1^2 =$	0,248 19	0,061 14	0,011 24
$r^3 : r_1^3 =$	0,248 38	0,061 19	0,011 25
	2. und 3.	2. und 4.	3. und 4.
$t^2 : t_1^2 =$	0,246 37	0,045 28	0,183 78
$r^3 : r_1^3 =$	0,246 38	0,045 28	0,183 79.

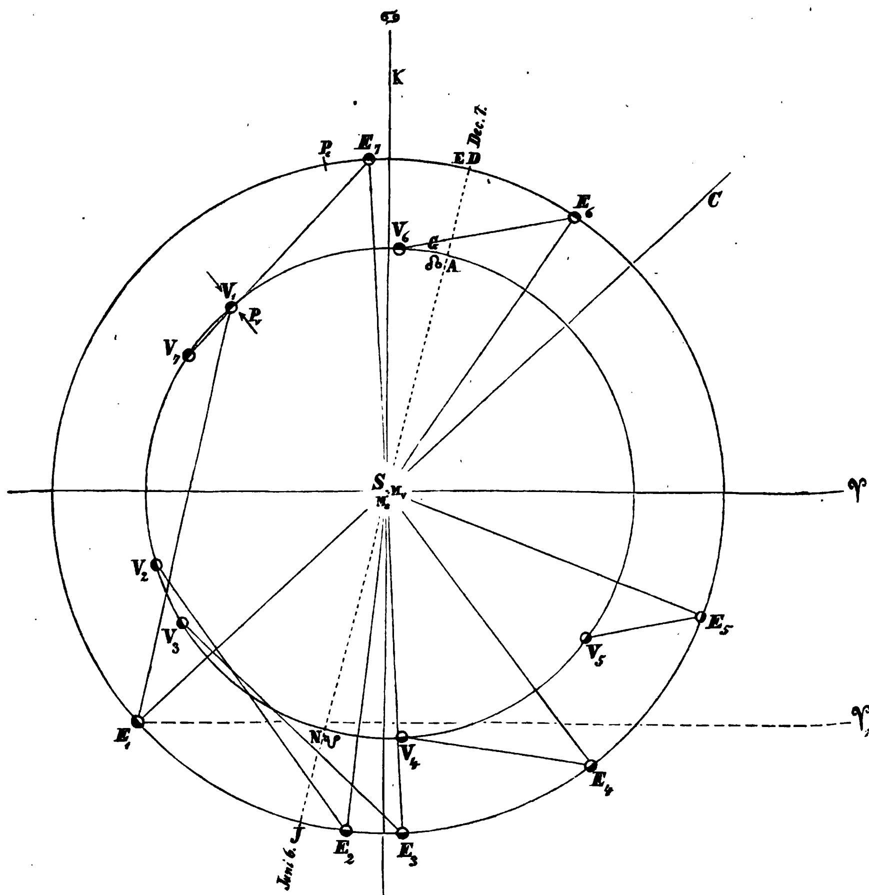
192. Bestätigung des dritten Keplerschen Gesetzes durch den Lauf der Venus und Erde. Durch die Zeit, welche während einer großen Zahl von Umläufen verging, wird (wie in Nr. 185) die Umlaufszeit der Venus $t = 224{,}700\,787^d$ gefunden; die der Erde ist (Nr. 99) $t_1 = 365{,}256\,374^d$. Hieraus ergiebt das dritte Keplersche Gesetz die mittlere Entfernung der Venus von der Sonne, die der Erde als Längeneinheit genommen,

$$a = (t : t_1)^{\frac{2}{3}} = 0{,}723\,332.$$

Hierdurch können wir nun nach den in der Tabelle zu Nr. 176 stehenden Ergebnissen eine Figur zeichnen, welche uns die damaligen Stellungen der Venus und Erde in ihren Bahnen zur Anschauung bringt. Der größere Kreis in Figur 78, welcher die Erdbahn dar-

*) Mädler, Wunderbau des Weltalls oder populäre Astronomie, 5. Auflage (Berlin, 1861, F. Imme), S. 251 bis 255. Johann Heinrich Mädler, geboren 1791 zu Berlin, war von 1840 bis 1865 Direktor der Sternwarte in Dorpat. Er starb 1874 in Hannover.

stellen soll (Nr. 168), hat 45^{mm} Radius, folglich ist für die Entfernung der Venus von der Sonne $0{,}723 \cdot 45^{mm} = 32{,}5^{mm}$ zu nehmen. Da wie bei dem Jupiter, auch bei der Venus der Abstand von der Ekliptik nur auf sehr wenige Grade steigt, so muß die Projektion ihrer fast kreisrunden Bahn in unserer kleinen Figur als Kreis gezeichnet werden. Die von dem Mittelpunkte S der Sonne nach rechts gezogene gerade Linie laufe zum Widderpunkte. Trägt man an sie in S den Winkel $\Upsilon SC = 42{,}9^0$ an (Spalte 10 der Tabelle in Nr. 176), so erhält man in der Richtung CS auf der Erdbahn in E_1 den Standort der Erde am 3. Mai 1871, denn hier giebt die Parallele $E_1 \Upsilon_1$ durch den Winkel $SE_1 \Upsilon_1$ die damalige Länge der Sonne an. Der zugehörige scheinbare Abstand der Venus von der



Figur 78. Lauf der Venus und Erde.

Sonne betrug $+34,5^0$; also liefert ein Winkel von $34,5^0$, in E_1 auf der linken Seite an E_1S angetragen, den derzeitigen fernen Standort V_1 der Venus in ihrer Bahn. In gleicher Weise sind auch die übrigen zusammengehörigen Stellungen gezeichnet. Um jeden der zweimal 7 Punkte wurde ein kleiner Kreis beschrieben, damit man die Lage der Tag- und Nachtseite bei der Venus- und der Erdkugel deutlich vor Augen habe. Zu diesem Zwecke war der Radius ganz beliebig. Es wird also die Größe dieser kleinen Kreise keineswegs in richtigem Verhältnis zu den Bahnkreisen stehen. Sie sollen uns nur erkennen lassen, wie viel von der beleuchteten Seite der Venus man sehen konnte von dem zugehörigen Standorte der Erde aus. Hält man nun die Figur so vor sich, daß man jedesmal gerade in der Richtung von E nach V sieht, so kann man die Lage und Krümmung der Nachtgrenze vom Nord- zum Südpol auf der Venuskugel aus der Zeichnung ablesen, und findet dann, daß der Anblick in Form und in entfernungsgemäßer Größe genau entspricht den 7 Gestalten der Venusphasen, die in der Figur 73 zu Nr. 176 nach den Beobachtungen dargestellt sind.

Hätte das dritte Keplersche Gesetz die Entfernung der Venus von der Sonne uns kleiner geliefert, so würden in der Figur die angetragenen Winkelschenkel E_7V_7, E_6V_6 und E_4V_4 die Venusbahn gar nicht erreicht haben; und wäre sie größer daraus hervorgegangen, so würde der Weg V_3V_4 bedeutend länger als jetzt in der Figur, dagegen V_4V_5 etwas kürzer ausgefallen sein, so daß die dann sehr ungleichen Strecken Ausschnitte gäben, die den 36 und 33 Zwischentagen nicht mehr proportional wären. (Nr. 190.)

Es hat also unsere Figur, die auf Grund des dritten Keplerschen Gesetzes entworfen wurde, der Wirklichkeit entsprechend sich gezeigt, und dadurch die Richtigkeit des Satzes bestätigt.

Demnach darf man die Gleichheit der beiden Verhältnisse, $t^2:t_1^2$ und $r^3:r_1^3$, welche in allen Fällen zutreffend befunden wurde (Nr. 191 und 192) als einen Erfahrungssatz hinstellen und als ein Naturgesetz im Planetensysteme bezeichnen.

193. Newtons Gravitationsgesetz.*) Da die Bahnen der Jupitermonde kreisrund sind**), so hat man (nach Nr. 188) für die Massenanziehungen, durch welche der Centralkörper irgend zwei von ihnen in ihren Bahnen erhält, die Ausdrücke

$$\gamma = \frac{4\pi^2 r}{t^2} \qquad \text{und} \qquad \gamma_1 = \frac{4\pi^2 r_1}{t_1^2}$$

---

*) Newton hat das Gesetz der allgemeinen Schwere entwickelt in seinem Werke Philosophiae naturalis principia mathematica, welches 1687 in London erschien. (Vergl. die Note zu Nr. 246.)

**) Für den Lauf in elliptischer Bahn unter Führung der von einem Brennpunkte ausgehenden Anziehungskraft steht die Ableitung in der Note zu Nr. 240.

folglich

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{r_1}{r} \frac{t^2}{t_1^2}$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetze ist aber

$$\frac{t^2}{t_1^2} = \frac{r^3}{r_1^3}$$

Daher $$\gamma_1 : \gamma = r^2 : r_1^2$$

d. h. die Anziehungen, welche eine Masse auf zwei Körper ausübt, sind umgekehrt proportional den Quadraten der Entfernungen.

194. Ungleichförmige Bewegung eines Planeten in seiner Bahn. Da die Stärke der Schwerkraftwirkung in solcher Weise von der Entfernung abhängt, so muß die Geschwindigkeit des Planeten, wenn er sich zu dem der Sonne nächsten Scheitel der Ellipse bewegt, wachsen (siehe Figur 77 zu Nr. 190); sie wird an diesem Endpunkte der großen Achse am größten, nimmt in der andern Hälfte der Bahn entsprechend wieder ab und hat am fernen Scheitel der großen Achse den kleinsten Wert. Die Zu- und Abnahme kann aber, trotzdem die Wirkung nach dem quadratischen Verhältnisse der veränderten Entfernung sich richtet, nicht gar bedeutend sein, weil die Radien-Vektoren des Planeten in seiner nahe kreisrunden Bahn-Ellipse nur wenig ab- und zunehmen.

Die Umlaufszeit t, in Sekunden ausgedrückt, ist eine große Zahl. Der vom Radius-Vektor in einer ntel Sekunde beschriebene Ausschnitt kann, da n beliebig groß zu denken ist, so schmal genommen werden, daß sein Inhalt als der eines Dreiecks mit der Grundlinie $\frac{v}{n}$ anzugeben ist. Bezeichnet v_1 die Geschwindigkeit des Planeten in der Sonnennähe, v die an einem Scheitel der kleinen Achse und v_2 die in der Sonnenferne, so hat man nach dem zweiten Keplerschen Gesetze und mit dem Flächeninhalte der Ellipse $= \pi ab$*)

*) Setzt man den in Nr. 167 abgeleiteten Wert $r = a - \frac{e}{a}x$ ein in den ursprünglichen Ausdruck für r^2, so geht mit $a^2 - e^2 = b^2$ (Figur 69 in Nr. 166) hervor die Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und aus ihr folgt $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Beschreibt man um den Mittelpunkt der Ellipse mit a einen Kreis und verlängert y bis zu ihm, so ist die entstandene Kreisordinate $Y = \sqrt{a^2 - x^2}$, also war $y = \frac{b}{a}Y$ und eine unmittelbar benach-

$$\tfrac{1}{2}(a-e)\,v_1 = \tfrac{1}{2}\,b\,v = \tfrac{1}{2}(a+e)\,v_2 = \frac{\pi\,ab}{t}$$

folglich ist die mittlere Geschwindigkeit

$$v = \frac{2\pi a}{t}$$

d. h. übereinstimmend mit der gleichförmigen, welche der Planet haben würde, wenn er um den Centralkörper im Kreise, mit der mittleren Entfernung als Radius, in derselben Zeit herumliefe.

Sodann folgt, da $b = \sqrt{a^2 - e^2}$ und $e = \varepsilon a$ ist

$$v_1 = v\sqrt{\frac{a+e}{a-e}} = v\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \quad \text{und} \quad v_2 = v\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen, so erhält man für die größte, mittlere und kleinste Geschwindigkeit eines Planeten die Beziehung

$$v_1 : v = v : v_2.$$

Die mittlere Geschwindigkeit ist also das geometrische Mittel der größten und kleinsten Geschwindigkeit.

Anmerkung. Nur um die Bedeutung dieser Ergebnisse zu erkennen, wollen wir die Ausdrücke für v_1 und v_2 annäherungsweise vereinfachen. Nach Ausführung beider Divisionen ergiebt die gemeinsam zu machende Wurzelausziehung

$$v_{\frac{1}{2}} = v\,(1 \pm \varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \pm \tfrac{1}{2}\varepsilon^3 + \cdots)$$

Da ε ein kleiner Bruch ist (Nr. 166 und 187), so kann man zur Übersicht das dritte und alle folgenden Glieder der Reihe unterdrücken, und hat die beiden Änderungen der Geschwindigkeit bei dieser Annäherung nun von gleicher Größe $v_1 - v = \varepsilon v$ und $v - v_2 = \varepsilon v$. Die Veränderung der Geschwindigkeit erreicht also bei einem Planeten von schwach excentrischer Bahn sehr nahe nur das εfache der mittleren Geschwindigkeit, z. B. bei der Erde nur $\frac{1}{60}$, bei Jupiter kaum $\frac{1}{20}$ mehr oder weniger, als die Geschwindigkeit in der mittleren Entfernung bei einem Scheitel der kleinen Achse der Bahn.

---

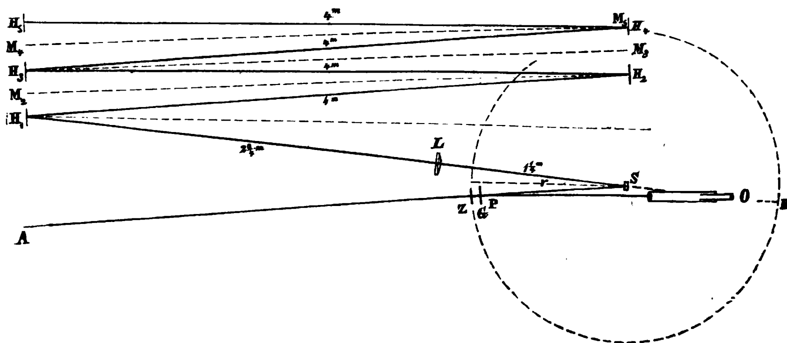
barte ist $y_1 = \frac{b}{a} Y_1$. Daher wird der Inhalt der von ihnen abgegrenzten Trapeze $t = \frac{b}{a} T$ und die Summe aller äußerst schmalen Trapeze, welche die Ellipse und den Kreis erfüllen, $E = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi a b$.

§ 22. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, angegeben in einem bekannten Längenmaße.

195. Experimentelle Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes. Foucault bestimmte (im Jahre 1862) die Geschwindigkeit des Lichtes auf folgende Weise.*) Auf einer kleinen versilberten Glasplatte waren lotrecht parallele Linien in nur 0,1^{mm} Abstand (mit einem Diamanten) gezogen. Durch dieses Sehzeichen Z (Figur 79) liefen die mittels eines Heliostaten ins Zimmer geleiteten Sonnenstrahlen AZS und trafen dann in wenig über ein Meter Entfernung einen ebenen Spiegel S von 14^{mm} Durchmesser, welcher mit senkrechter Achse durch eine Luftturbine sehr schnell gedreht werden konnte. Der Abstand ZS = r wurde in den einzelnen Versuchsreihen um den Mittelwert r = 1,026^{m} um einige Millimeter verändert. Die vom Drehspiegel S zurückgeworfenen Strahlen gingen bei einer gewissen Stellung des Spiegels, bei welcher das im Kreise herumlaufende Scheinbild von Z sich in B befand, durch eine große bikonvexe achromatische Linse L (das einem Fernrohre entnommene Objektivglas). Die Linse war in solche Entfernung von S gebracht, daß sie von B bei H_1 ein reelles Bild lieferte und zwar in genau 4^{m} Abstand von S. Hierbei war S noch außerhalb ihrer Brennweite, aber dem Brennpunkte recht nahe. Deshalb mußte von S ein Bild sehr fern entstehen. Es wurde aber an der Stelle H_1 ein Hohlspiegel von großer Brennweite eingeschoben. Derselbe warf jenes Bild von S ein wenig schräg nach vorn, so daß es bei H_2, 4^{m} weit von H_1, in der Luft schwebte.**) Weil das

*) Compt. rend. T. LV, p. 792. Poggendorffs Annalen der Physik, 118. Bd. (1863) S. 588.

**) Wenn LS = $1^1/_4$^{m} war, wird die Bedingung, $H_1H_2 = 4^m$, erfüllt durch einen Hohlspiegel H_1 von 4,05^{m} Brennweite.



Figur 79. Foucaults Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes.

Bild von B auf der Fläche des Hohlspiegels H_1 selbst lag, so konnte dieser von ihm kein neues Bild des Sehzeichens hervorrufen; es diente als Gegenstand einem zweiten, auch aus versilbertem Glase bestehenden Hohlspiegel H_2, welcher dort aufgestellt wurde, wo das Bild des Drehspiegels entstand. Da der Abstand $H_1 H_2$ das Doppelte seiner Brennweite von 2^m war, so lieferte er in gleicher Entfernung von 4^m ein zweites objektives Bild des Sehzeichens. Gegen dieses wurde die Fläche eines dritten Hohlspiegels H_3, wieder von 2^m Brennweite, geschoben; und es wiederholte sich der Vorgang mit einem 4. und 5. Hohlspiegel. Da eines jeden Brennweite die Hälfte des Abstandes war, so übertrug jeder das am vorhergehenden haftende Bild dem nächstfolgenden. An den Spiegeln gerader Ordnungszahl, H_2 und H_4, befanden sich Bilder des Drehspiegels, und an den von ungerader Stellenzahl Bilder des Sehzeichens. Der fünfte Hohlspiegel war nicht mehr schräg gestellt, sondern sein Kugelmittelpunkt M_5 lag mitten auf dem vorhergehenden H_4. Deshalb trafen die Strahlen ihn rechtwinklig, wurden darum in sich selbst reflektiert und liefen ebenso von Spiegel zu Spiegel die Zickzackbahn zurück, um auf der Ausgangsstelle, dem Sehzeichen selbst, sich zu einem reellen Bilde desselben wieder zu vereinigen. Der Weg vom Drehspiegel bis zum letzten Hohlspiegel war $m = 5 \cdot 4^m = 20^m$ lang. In der Zeit, während welcher die 2m Meter vom Lichte durchflogen wurden, hatte aber der sehr schnell rundlaufende Planspiegel seine Stellung ein wenig geändert und warf deshalb das vom zurückkehrenden Lichte gegebene Bild nicht mehr zur Deckung auf das Sehzeichen, sondern ein wenig neben dasselbe, im Sinne der Spiegeldrehung. Hatte indessen der Drehspiegel, also auch das Einfallslot, seine Stellung um den nur sehr kleinen Winkel δ verändert, so änderte mit dem Einfallswinkel auch der Reflexionswinkel sich um δ, das Bild wurde also um den Winkel 2δ verschoben, so daß es einen bemerkbaren Abstand d vom Sehzeichen erhielt, welcher ein Bogen mit jenem Radius r ist.

Ein Gebläse von gleichmäßigem hohen Drucke steigerte die Umdrehungsgeschwindigkeit des Spiegels, bis der Luftwiderstand, den der Apparat beim Rotieren erfuhr, ihn Minuten lang völlig gleichmäßig sich umdrehen ließ. Durch andere Hemmnisse nicht zu stören, durfte nicht ein Zählwerk hier angebracht werden. Um das von Foucault angewandte sinnreiche Verfahren zu verstehen, denke man an die als Spielwerk bekannten stroboskopischen Figuren, welche eine Person oder einen beweglichen Gegenstand in $k-1$ oder $k+1$ aufeinander folgenden, immer nur etwas mehr abweichenden Stellungen zeigen, deren eine man durch k mitrundlaufende Öffnungen ansieht; dann glaubt man die Figur sich bewegen zu sehen. Würde die Figurenreihe und die Lochreihe jede für sich rotieren, und zwar die Figurenreihe ganz herum in der Zeit, in welcher die nächste Öffnung an Stelle der vorhergehenden vor das Auge tritt, so würde Figur

und Öffnung still zu stehen scheinen. Als solche rundlaufende Lochreihe nahm Foucault die Zahnlücken einer Kreisplatte. In sie warf er mittels einer Glasplatte G, welche in die zurückkehrenden Lichtstrahlen nahe beim Sehzeichen eingeschaltet wurde, das Bild, so daß es nach P kam und die quer passierenden Zähne einen Teil desselben verdecken konnten. Das Bild erschien also in diesem Teile nur dann unverwaschen und in einem scheinbar stillstehenden Rahmen, wenn die Momentanbilder vom Drehspiegel her genau mit den Zahnlücken zusammen eintrafen. Gab nun das Zählwerk der Kreisscheibe an, daß diese in einer Sekunde einmal rundlaufe, und hatte sie k Zahnlücken, so wußte er, daß der Spiegel in einer Sekunde sich kmal herumdrehe.

Die durch P eintreffenden Strahlen des Schlußbildes (welches, weil es in einer Sekunde sehr oft entstand, durch die Dauer des Lichteindrucks deutlich sichtbar war) liefen mit solchen, die vom Sehzeichen aus nur durch die Glasplatte gegangen waren, ein in ein schwaches Fernrohr O. Von den Linien des erblickten Schlußbildes fiel jede zusammen mit der entsprechenden des Sehzeichens selbst, wenn der Apparat in Ruhe war; sie kamen aber auf die Linien höherer Nummer, wenn der Spiegel sich rechts herumdrehte; lief er links herum, so trat Verschiebung nach links ein. Foucault stellte die Versuche in folgender Weise an. Er gab dem Abstande ZS 1024^{mm} und nahm sich vor, die Umdrehungsgeschwindigkeit des Spiegels so lange zu steigern, bis der erste Strich des Schlußbildes zum achten Striche des Sehzeichens hinübergerückt werde. War dies erreicht, so ließ er den Druck des Turbinengebläses in dieser Stärke bestehen und las am Zählwerk der Scheibe P ab, wie viel Umdrehungen sie nun in t Sekunden machte. Der erhaltene Wert, mit der Zahl k der Zahnlücken multipliziert und durch t dividiert, ergab die Anzahl n der Spiegelumdrehungen für eine Sekunde. Dann ermittelte er ebenso zum Abstande 1025^{mm}, 1026^{mm}, ... die zugehörige Zahl n für eine bestimmte Größe der Bildverschiebung. So gehört z. B. beim Abstande 1026^{mm} zur Verschiebung um 7 Zehntel-Millimeter die Umdrehungszahl 404,5.

Da das von den zurückkehrenden Strahlen gelieferte Bild, wegen der Ortsveränderung um 2δ, doppelt so schnell wie der Spiegel läuft, so würde es die ganze Peripherie, $2\pi r$, in $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ Sekunde beschreiben; mithin erfolgte die beobachtete Verschiebung d in $\frac{d}{2\pi r \cdot 2n}$ Sekunden. Dies ist die Zeit, in welcher das Licht 2m Meter durchflog, folglich kommt es in einer Sekunde

$$l = \frac{8\pi rnm}{d} \text{ Meter weit.}$$

Jenes Beispiel: $r = 1{,}026^m$, $d = 0{,}0007^m$, $n = 404{,}5$, ergiebt, da $m = 20^m$ war, $l = 298014800^m$ (298014000^m).

Nach seinen Versuchen giebt Foucault als mögliche Abweichung von der Wahrheit 500^{km} an.

Die Geschwindigkeit des Lichtes beträgt $l = 298000^{km}$.*)

196. I. Die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne, berechnet aus der Geschwindigkeit des Lichtes und den Zeitangaben der Verfinsterungen der Jupitermonde. Wenn für den Augenblick, in welchem man einen der Jupitermonde nach einer Verfinsterung aus dem Schatten Jupiters hervortreten sieht, die Zeit z (Monatstag, Stunden, Minuten und Sekunden) notiert wird (Nr. 178), so ist dieser Zeitpunkt nicht der des wirklichen Austritts, sondern so viel Minuten und Sekunden später, wie das erste nun wieder vom Monde reflektierte Sonnenlicht nötig hatte, bis zur Erde zu gelangen. Um die Zeit der Opposition Jupiters ändert sich der Weg bis zur Erde fast gar nicht (Fig. 75 zu Nr. 182); daher erhält man durch die Zwischenzeiten der dort angestellten Beobachtungen die synodischen Umlaufszeiten der Monde (nach Mädler):

	synodische Umlaufszeit	Überschuß über die siderische Umlaufszeit
1. Mond	$1^d\ 18^h\ 28^m\ 35{,}945^s$	$1^m\ 2{,}44^s$
2.	3 13 17 53,73	4 11,69
3.	7 3 59 35,825	17 2,46
4.	16 18 5 7,02	1^h 32 55,75

Sie sind um die dahintergesetzten Zeitangaben größer als die in Nr. 191 angegebenen siderischen Umlaufszeiten, weil beim Weiterwandern Jupiters sein Schatten in den Mondbahnen langsam vorrückt, so daß jeder Mond mehr als 360° durchlaufen muß, um die indessen vorgeschobene Schattengrenze nun wieder zu erreichen. (Dasselbe findet, nur in entgegengesetzter Richtung, beim Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr statt.) Die siderische Umlaufszeit ist die wahre Dauer eines Umlaufs.

*) Fizeau erhielt (im Jahre 1849), durch Abfangen eines Licht-Echos mittels der Zähne eines schnell rotierenden Rades, für die Geschwindigkeit des Lichtes eine Zahl (313000^{km}), welche zu groß ist. Denn die von Cornu mit Benutzung des Chronographen (s. Nr. 25) gemachte Wiederholung dieses Versuches ergab im Jahre 1873, in guter Übereinstimmung mit Foucaults Wert, 298500^{km}. Doch fand er bei der im Jahre 1874 in größerer Ausdehnung der Strecke (gegen 23^{km}) vorgenommenen zweiten Wiederholung mit Anwendung des durch ein Knallgasgebläse gelieferten Kalklichtes 300400^{km}. (Poggendorffs Annalen der Physik, Band 154, Seite 476.) Wegen dieser Unsicherheit konnten wir den leichter verständlichen Fizeauschen Versuch nicht dem folgenden zu Grunde legen.

Es sei eine solche Beobachtung zur Zeit z_1 einige Tage nach der Opposition gemacht und etwa ein Vierteljahr später eine zweite zur Zeit z_2 an demselben Monde. Dividiert man die Zwischenzeit $z_2 - z_1$ durch die synodische Umlaufszeit u des Mondes, so ist der dabei bleibende Rest von d Minuten und Sekunden die Zeit, in welcher das vom Monde zurückgestrahlte erste Sonnenlicht die Vergrößerung des Weges zur Erde durchflog.*) Bei der ersten Beobachtung z_1 war der Weg (Nr. 181 und 180)

$$J_1E_1 = \frac{vs}{\alpha_1 \sin 1''},$$

oder, da wir den Sonnenradius s durch die mittlere Entfernung a der Erde und den zugehörigen scheinbaren Sonnenhalbmesser σ ausdrücken können $s = \sigma \sin 1''.a$ (Nr. 191)

$$J_1E_1 = \frac{v\sigma}{\alpha_1}\cdot a \quad \text{und zur Zeit } z_2 \quad J_2E_2 = \frac{v\sigma}{\alpha_2}\cdot a$$

mithin ist der Wegunterschied

$$J_2E_2 - J_1E_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\, v\sigma}{\alpha_1\alpha_2}\cdot a = f.a$$

wenn der Faktor von a mit f bezeichnet wird.

Solche Strecke fa zu durchfliegen, waren dem Lichte jene d Sekunden nötig; also durchläuft es einen Weg von der Länge a in $\frac{d}{f}$ Sekunden, und diese Anzahl ist nach W. Struve (1843)

$$t = 497{,}8^s.$$

Die Astronomen bezeichnen diese Zahl als die Lichtzeit (da die Größe a als Längeneinheit genommen wird). Trotz seiner großen Geschwindigkeit braucht das Licht, um von der Sonne zu uns zu kommen, mehr als 8 Minuten.

Aus der uns bekannten Geschwindigkeit des Lichtes $l = 298\,000^{km}$ haben wir nun den mittleren Abstand der Erde von der Sonne

$$a = tl = 148\,344\,000^{km} \ (148\,345\,000^{km})$$

oder zur besseren Übersicht in größerem Längenmaße: ein Erdkugelradius $r = 6\,370{,}26^{km}$

$$a = 23\,287 \text{ Erdkugelradien.}$$

---

*) Der erste, welcher den Zeitüberschuß d wahrnahm, war Olof Römer (zu Paris im Jahre 1675). Daraus, daß die Größe d bis zur Konjunktion Jupiters wuchs und in der andern Hälfte des Jahres bis zur Opposition entsprechend wieder kleiner wurde, erkannte er: die Entdeckung ist abhängig von der Veränderung des Abstandes der Erde vom Jupiter, und schloß daraus: das Licht verbreitet sich nicht augenblicklich durch den Weltenraum, sondern hat eine angebbare Geschwindigkeit. (Olof Römer, geb. 1644 zu Aarhuus, gest. 1710 in Kopenhagen. Er lebte von 1671 bis 1681 in Paris, dann in Kopenhagen.)

Anmerkung. Multipliziert man die in der Tabelle zu Nr. 174 stehenden Entfernungszahlen mit 497,8, so erhält man die Zeit, welche das Licht jener Fixsterne bis zu uns nötig hat. Die Fixsternweiten in Jahren Lichtzeit, dem größten Längenmaße der Astronomen, sind bei 1) α Centauri 3,5 Jahre Lichtzeit, 2) 61 Cygni 5,9 Jahre, 4) β Centauri 6,9 Jahre, 7) Capella 10,7 Jahre, 11) Sirius 16,9 Jahre, 12) Wega 18,1 Jahre, 14) η Cassiopeiae 21,1 Jahre, 16) Arctur 25,6 Jahre, 19) γ Draconis 35,4 Jahre, 20) Polarstern 35,8 Jahre Lichtzeit.

In welchem Jahre (nach seiner Jahreszahl anzugeben) sieht man das Licht auf der Erde, welches zur Zeit Ihrer Geburt vom Polarsterne ausging? —

197. Parallaxe (Horizontal-Parallaxe). In der Figur 62 zu Nr. 152 ist BME der Winkel, unter welchem vom Punkte M aus der zum Beobachtungsorte B gehörige Erdkugelradius BE erscheint. Dieser Winkel p hängt von der Zenitdistanz z des Punktes M ab, oder, da $z = 90^0 - h$ ist, von der Höhe h über dem Horizonte des Beobachters; denn es ist

$$\sin p = \frac{r}{x} \sin z = \frac{r}{x} \cos h.$$

Der Winkel p heißt die Parallaxe des Punktes M in der Höhe h. Sie wird für den Beobachter am größten, wenn M im Horizonte steht. Die Horizontal-Parallaxe bezeichnen die Astronomen mit dem Buchstaben π; es ist

$$\sin \pi = \frac{r}{x}.$$

Jahres-Parallaxe ist der Gesichtswinkel für den Erdbahnradius (Nr. 174), Horizontal-Parallaxe, oder kurz Parallaxe, der für den Erdkugelradius.

Das in Nr. 196 erhaltene Ergebnis I liefert die

$$\text{Sonnenparallaxe } \pi = \frac{1}{\frac{a}{r} \sin 1''} = 8{,}8575''.$$

198. II. **Aus der Geschwindigkeit des Lichtes und der Aberration.** Da die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn sich nur sehr wenig ändert (Nr. 194 Anm.), so mußten die großen Halbachsen der Aberrations-Ellipsen aller Sterne von übereinstimmender Größe gefunden werden. (Nr. 175.) Da man bei Ermittelung der Aberrations-Konstante $\alpha = 20{,}4451''$ aus sämtlichen Ergebnissen das arithmetische Mittel genommen hat, so ist hier auch die mittlere Ge-

schwindigkeit der Erde zu Grunde zu legen. Für dieses von der großen Halbachse der Aberrationsellipse gelieferte größte α war in Nr. 175

$$\sin\alpha = \frac{v}{l}$$

also

$$v = l\sin\alpha = \frac{\alpha\pi}{648000}\cdot l.$$

Bei der mittleren Geschwindigkeit beschreibt der Radius-Vektor der Erde in einer Sekunde mittlerer Zeit einen Winkel, welcher nach Nr. 100 ist

$$\vartheta = \frac{3548{,}19''}{86400}$$

folglich hat man für v nach dem ersten Ergebnis in Nr. 194

$$v = \frac{\vartheta\pi}{648000}\cdot a.$$

Durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke für v geht hervor

$$a = \frac{\alpha}{\vartheta} l.$$

Hier ergiebt sich

$$a = 148358000^{km} \quad (148359000^{km})$$

oder $$a = 23289 \text{ Erdkugelradien}$$

und die Parallaxe

$$\pi = 8{,}8567'' \quad (8{,}8566'').^{*})$$

199. III. **Aus dem Abstande des Mars von der Erde nahe seiner Opposition.** Auf Veranlassung des Astronomen Winnecke**) wurde, während er in Pulkowa, Polhöhe $\varphi = 59^0\,46'\,18{,}7''$, beobachtete, gleichzeitig auf der Sternwarte am Kap der guten Hoffnung, $\varphi_1 = 33^0\,56'\,3{,}0''$ südlich, die Deklination des Mars gemessen, als die Erde im Jahre 1862 zwischen Mars und Sonne hindurchlief. Man erhielt

---

*) Delambres Wert der Aberrations-Konstante, 20,255'', führt zur größten Zahl der Sonnenparallaxe, welche Leverrier erhalten hat, $\pi = 8{,}950''$. Der Abstand wird nur 146980000^{km} oder 23073r, dazu die Parallaxe 8,940''; diese vergrößert um ihren 900sten Teil (Note zu Nr. 202), giebt $\pi = 8{,}950''$.

**) Dr. A. Winnecke, Astronom der Nikolai-Hauptsternwarte (in Pulkowa), Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition 1862. Petersburg 1863 (Leipzig bei Leopold Voß' Sort.). — Friedrich August Theodor Winnecke, 1835 zu Groß-Heere in Hannover geboren, wurde Direktor der Sternwarte zu Straßburg i. E.

	1862 Sept. 1	Sept. 2
in Pulkowa	$\delta = + 3^0\, 8'\, 15{,}19''$	$+ 3^0\, 8'\, 10{,}07''$
am Kap*)	$\delta_1 = + 3\ \ 8\ \ 43{,}13$	$+ 3\ \ 8\ \ 38{,}21$

Es ergiebt sich 1) hieraus allein, ausgedrückt durch den Erdkugelradius r, der Central-Abstand EM der Erde und des Mars. In der Figur 62 zu Nr. 152 nehme man für die jetzige Aufgabe den Punkt M als den Mittelpunkt des Mars und den Beobachtungsort B als die Sternwarte in Pulkowa. In vorliegendem Falle sind die Winkel p und p_1 sehr klein, denn ihre Summe, die beobachtete parallaktische Verschiebung $p + p_1 = \delta_1 - \delta$, ist kaum eine halbe Bogenminute. Deshalb geht hier einfacher durch Addition von

$$p \sin 1'' = \frac{r}{x} \sin z \quad \text{und} \quad p_1 \sin 1'' = \frac{r}{x} \sin z_1$$

hervor

$$x = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(z + z_1) \cos \frac{1}{2}(z - z_1)}{(\delta_1 - \delta) \sin 1''} \cdot r.$$

Es war zur Zeit der Kulmination in Pulkowa

am 1. Sept. 1862	am 2. Sept.
$x = 10616{,}655\,r\ (10616{,}55\,r)$	$x = 10541{,}16\,r\ (10541{,}2\,r)$.

Hierauf hat man 2) die damalige scheinbare Entfernung des Mars von der Sonne, d. h. den Winkel SEM, zu berechnen. Im Augenblicke der Kulmination in Pulkowa war

	Sept. 1	Sept. 2
die Rektascension der Sonne	$a = 10^h\, 43^m\, 22{,}93^s$	$10^h\, 46^m\, 59{,}84^s$
die des Mars	$\alpha = \ \ 1\ \ 18\ \ 13{,}73$	$1\ \ 18\ \ 15{,}56$
die Deklination der Sonne	$d = \ \ 8^0\ \ 6'\ \ 9{,}80''$	$7^0\, 44''\, 18{,}06''$
die des Mars	$\delta = \ \ 3\ \ 8\ \ 15{,}19$	$3\ \ 8\ \ 10{,}07$

Man findet den Winkel SEM

$$E = 139^0\, 47'\, 10{,}42''\ (5{,}9'')\ |\ 140^0\, 44'\, 15{,}57''\ (12{,}6'').$$

Nun ist 3) der Radius-Vektor der Erde zur Zeit der Pulkowaer Beobachtung zu bestimmen mittels der Gleichung, die aus der Entwicklung in Nr. 167 durch $e = \varepsilon a$ hervorgeht,

$$r_1 = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon \cos \vartheta}\, a.$$

*) Der Meridian der Kap-Sternwarte liegt westlich von dem Pulkowaer Meridian, so daß der Zeitunterschied $0^h\, 47^m\, 23{,}6^s$ beträgt. Die dieser Zwischenzeit entsprechende Änderung der Deklination wurde durch Interpolation zwischen den Kulminationsbeobachtungen der Nachbartage bestimmt. So gingen aus den Beobachtungen am Kap, Sept. 1 $3^0\, 8'\, 43{,}21''$ und Sept. 2 $3^0\, 8'\, 37{,}81''$, die obigen Angaben hervor, die für den Augenblick gelten, als bei der Umdrehung der Erde die Meridianebene der Pulkowaer Sternwarte durch den Marsmittelpunkt ging.

Dazu hat man $\varepsilon = 0{,}0167607$ (Nr. 166) und durch Hinzufügen von 180^0 zur Länge der Sonne

	Sept. 1	Sept. 2
die heliocentrische Länge der Erde	339° 16′ 2,3″	340° 14′ 1,9″
ferner die des Perihels	100 34 47,6	100 34 47,6

deren Differenz die Anomalie ϑ ist. (In der Figur 80 zu Nr. 200 ist das Perihel der Erde als P_e angegeben.) Man erhält

$ES = r_1 = 1{,}0085039\ a\ (1{,}00850\ a)$ | $1{,}0082568\ a\ (1{,}00826\ a)$.

Ebenso wird 4) der derzeitige Radius-Vektor des Mars berechnet aus der numerischen Excentricität seiner Bahnellipse $\varepsilon = 0{,}0932731$,

aus der heliocentrischen Länge des Standortes	351° 23′ 4,1″	352° 0′ 44,4″
und aus der des Mars-Perihels (P_m in Figur 80)	333 31 51,2	333 31 51,2

Diese Zahlen werden in derselben Weise gewonnen, die wir für Jupiter in § 20 (Nr. 179 bis 187) durchgeführt haben.

Es kommt zunächst, angegeben durch die Halbachse a_2 der Marsbahn,

$SM = r_2 = 0{,}9104677\, a_2\ (0{,}910476\, a_2)$ | $0{,}9107343\, a_2\ (0{,}910737\, a_2)$

dann aber wird nach dem dritten Keplerschen Gesetze a_2 ersetzt durch $(t_2 : t_1)^{\frac{2}{3}} \cdot a$, um die Radien-Vektoren beider Planetenbahnen durch dieselbe Unbekannte a auszudrücken. Die Umlaufszeit des Mars ist $t_2 = 686{,}979646^d$ und die der Erde $t_1 = 365{,}256374^d$.

Durch diese vier Berechnungen kennt man in dem Dreiecke ESM eine Seite EM, den größeren anliegenden Winkel E und das Verhältnis der beiden anderen Seiten, kann also den kleineren anliegenden Winkel M und dann die Seite ES finden. So erlangt man 5) durch

$\angle M = 27^0 59' 34{,}15''\ (35{,}3)''$ | $27^0 22' 34{,}30''\ (36{,}0'')$

jenen Radius-Vektor der Erdbahn

$ES = r_1 = 23540{,}20\, r\ (23538{,}3\, r)$ | $23533{,}56\, r\ (23533{,}2\, r)$.

Schließlich 6) geht aus 3), wenn in dem Ausdrucke für r_1 der Faktor von a mit f bezeichnet wird, hervor die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne $a = ES : f$

$a = 23341{,}71\, r\ (23340{,}3\, r)$ | $23340{,}83\, r\ (23340{,}4\, r)$
und dazu die Parallaxe $\pi = 8{,}8367''\ (8{,}8374'')$ | $8{,}8371''\ (8{,}8373'')$.

200. Anmerkung 1. **Form der Marsbahn.** Da die numerische Excentricität $\varepsilon = 0{,}0932731 = \frac{1}{10{,}72}$ ist, so weicht diese

Ellipse bedeutend mehr vom Kreise ab als die Erdbahn. Es ist ε bei der Bahn der Erde $\frac{1}{60}$, des Jupiter $\frac{1}{20}$, des Mars fast schon $\frac{1}{10}$ und bei der des Merkur $\frac{1}{5}$; dieser hat von den Hauptplaneten die größte numerische Excentricität, dagegen Venus die kleinste, $\frac{1}{150}$. Um die Rundung der Erdbahn zu erkennen, wurde in Nr. 168 ein Kreis mit dem Radius $a = 1^{m}$ gedacht. Eine Ellipse mit dieser großen Halbachse a von der Form der Erdbahn tritt bei den Scheiteln der kleinen Achse vom Kreisumfange nur $\frac{1}{7}^{mm}$ zurück, eine von der Gestalt der Marsbahn schon $4\frac{1}{3}^{mm}$ (für die der Jupiterbahn ähnliche kam $1\frac{1}{6}^{mm}$). Diese Abweichung von der Kreisrundung würde selbst in unserer kleinen Figur 80, in welcher für die Mars-Ellipse $a_2 = 45^{mm}$ genommen wurde, schon darstellbar sein, weil hiermit $a_2 - b_2 = 0{,}2^{mm}$ ist. Der Abstand des Sonnenbrennpunktes S von dem Mittelpunkte M_m der Marsbahn wird hier $e_2 = \varepsilon a_2 = 4{,}2^{mm}$. Aus $a_2 = 45^{mm}$ folgt für die Darstellung der Erdbahn $a = 29{,}5^{mm}$ und $e = 0{,}5^{mm}$. Man sieht aus der Figur, daß für die Messung

Figur 80. Lage der Marsbahn um die Erdbahn.

des Abstandes Erde-Mars die Stellung Anfang September 1862 sehr günstig war. Näher der Opposition, die Oktober 5 13^h eintrat, würde das dann schmale Dreieck EMS durch die Kleinheit des Winkels M Unsicherheit im Durchschnitt bei S herbeigeführt haben, und jenseit SM_1 ist an der dem 1. September entsprechenden Stelle (für Nov. 8) der Abstand E_2M_2 erheblich größer als EM, würde also weit mißlicher für die Messung geworden sein.

Anmerkung 2. **Sonnenparallaxe mittels des Planetoiden Flora statt Mars.** In derselben Weise, wie in Nr. 199 für den Planeten Mars angegeben, wurden auf Wunsch des Direktors der Breslauer Sternwarte, Gottfried Galle, im Herbste 1873 auf mehreren nördlichen und südlichen Sternwarten zusammengehörige Beobachtungen des Planeten Flora um die Oppositionszeit angestellt. Das Ungünstige der größeren Entfernung dieses Planetoiden (Nr. 204, b in der Tabelle) wird aufgewogen durch den Vorteil, daß das Fadenkreuz des Fernrohrs auf dieses Sternchen sehr scharf eingestellt werden kann. Das Ergebnis, auf den Erdkugelradius r bezogen, lautet: Sonnenparallaxe 8,863″ [nach astronomischer Angabe (Note zu Nr. 202) $\pi = 8{,}873''$].

201. IV. **Aus des Planeten Venus Vorübergang vor der Sonne.** Zu ebensolcher Bestimmung des mittleren Abstandes a der Erde von der Sonne ist der Planet Venus geeigneter als Mars. Denn in größter Erdnähe bleibt uns Mars noch 0,4 a entfernt, während Venus auf weniger als 0,3 a herankommt (s. die Figuren zu Nr. 200 und 192), so daß für sie der Winkel $(p + p_1)$ erheblich größer ausfällt. (Figur 62 zu Nr. 152.) Allein da der Neigungswinkel zwischen den Ebenen der Venusbahn und der Erdbahn $i = 3^0\,23'\,30''$ beträgt, der scheinbare Halbmesser der Sonne aber nur 16′ erreicht, so zieht die Venus fast immer über oder unter der Sonne vorüber und kann, weil dann die Nachtseite uns zugewandt ist, durch den Glanz, welchen unsere Atmosphäre rings um die Sonne legt, in fadenfeiner Sichelgestalt nicht gesehen werden. Nur in den äußerst seltenen Fällen, wo die Venus nahe der Durchschnittslinie beider Bahnebenen anlangt, während die Erde auch gerade dort ist, wird sie erblickt als ein vor der Sonnenscheibe vorübergehender schwarzer Fleck. Daß solches Vorüberziehen mit einem guten Fernrohre und einer guten Uhr von weit entfernten Orten aus zu beobachten, das beste Mittel zur Bestimmung der Sonnenparallaxe sei, erkannte der englische Astronom Halley*), als er am

*) Edmund Halley, geb. 1656 Okt. 29 zu Haggerston bei London, gest. 1724 Jan. 14 in Greenwich. Seine Schrift über diese Bestimmung der Sonnenparallaxe veröffentlichte er 1716. Infolge derselben wurden die beiden nächsten Vorübergänge der Venus 1761 und 1769 von Astronomen, die nach mehreren

7. November 1677 einen Vorübergang des Merkur von Anfang bis Ende gesehen hatte von der Insel St. Helena aus, wohin er zur Aufnahme eines Verzeichnisses der Sterne des südlichen Himmels gereist war.

Es sind zunächst, um die Seltenheit des Eintreffens festzustellen,

1) die Tage im Jahre zu ermitteln, an welchen ein Venusvorübergang nur stattfinden kann. Von dem Orte des Widderpunktes aus, welchen er Anfang 1874 in der Ekliptik einnahm, ist die heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens der Venusbahn 75° 33′ 30″. Dieser Winkel wurde in die Figur 78 zu Nr. 192 als ♈ SA eingetragen. Bei A ist die Venus V_6 über die Ebene der Figur getreten, sie erhebt sich weiter bei V_7, geht wieder näher heran bei V_2 und V_3 und steigt bei N nieder auf die Südseite der Erdbahnebene, so daß also die Standorte V_4 und V_5 unter der Ebene der Ekliptik sich befinden. Zu dem Radius-Vektor SD der Erdbahn, auf welchem SA liegt, kommt die Erde am 7. Dezember (weil dann für die Erde die Länge der Sonne 180° mehr hat) und das hinter N liegende Ende J der Durchschnittslinie ASN überschreitet die Erde am 6. Juni. Es fragt sich, wie weit die Erde von jenen beiden Stellen D und J in ihrer Bahn entfernt sein darf, damit bei jener Größe der Steigung der Venusbahn es möglich sei, von der Erde aus ein Vorübergehen der Venus vor der Sonnenscheibe noch zu sehen.

Der Leser zeichne wagerecht eine 14,2^cm lange gerade Linie, setze an sie links A, rechts G, beschreibe um G oberhalb der Linie mit 8,4^mm Radius einen kurzen Bogen und ziehe von A aus an ihn eine Tangente, die ihn in V berührt. Der entstandene Winkel VAG hat die Größe des Neigungswinkels i der Venusbahn gegen die Erdbahnebene. Denkt man in der Figur zu Nr. 192 sich bei dem Dezemberstandorte D in E versetzt und sieht man hinüber zu der kurzen Tangente AG, so erkennt man, daß die angefertigte Zeichnung des Neigungswinkels VAG auf der Ebene dieser Figur senkrecht stehen muß in der Tangente AG und daß dann der Schenkel AV in größerem Maßstabe darstellt ein Stückchen der Venusbahn von A an nach V_6 zu. Die fortrückende Erde E läßt den Radius-Vektor SE auf der Tangente AG hingleiten. Seinen

auf der nördlichen und südlichen Erdhalbkugel günstig gelegenen Orten gereist waren, beobachtet und aus beiden bald darauf die Sonnenparallaxe bestimmt. Nach genauer Prüfung aller Beobachtungen erhielt Encke 1822 aus denen von 1761 8,5309″ und 1824 aus denen von 1769 8,6030″ und (1835) aus allen 8,571″ als Äquatorial-Horizontalparallaxe der Sonne. Dieser Wert, welcher für den Erdkugelradius auf 8,562″ sich vermindert (Note zu Nr. 202), erschien gegen die später auf andere Weisen gewonnenen Ergebnisse (Nr. 197 bis 199) zu klein und veranlaßte die Größe der Ausrüstungen für die Vorübergänge 1874 und 1882.

jetzigen Schnittpunkt nehme man in der Zeichnung als S_1 zwischen A und G an und beschreibe um S_1 mit $8{,}1^{mm}$ Radius einen Kreis, dann mehr nach rechts ebensolchen um S_2, weil später die Erde weiter gekommen ist, und die Sonne nun an dieser Stelle durch die Ebene des Neigungswinkels gesehen wird. Ferner mache man auf der Linie AV ein schwarzes Pünktchen von $\frac{1}{2}^{mm}$ Durchmesser und lasse auch dieses auf der Bahn AV nach rechts, doch mit $1\frac{1}{2}$ facher Geschwindigkeit von S_1 wandern. Erreicht dieses die Venus darstellende Pünktchen den Sonnenkreis, so zieht es mit dem Überschusse seiner Geschwindigkeit vor der Sonnenscheibe vorüber. Dabei wird es eine um so kleinere Sehne beschreiben, je weiter die Erde E voraus war und den Kreis S_1 schon zu Anfang in die Nähe von G brachte. Kommt derselbe in G an und die Venus erst in demselben Augenblicke in V, so hat man für E die Grenze des Abstandes von D erreicht, denn hier würde der kleine schwarze Kreis den Sonnenkreis nur noch von außen berühren, also am Himmel schon nicht mehr bemerkt werden. Man verbinde nun noch den Berührungspunkt V des zuerst beschriebenen Kreisbogens mit seinem Mittelpunkte G.

Bei der Beobachtung von solchem Punkte E aus projiziert sich das Dreieck VAG auf die Himmelskugel. Seine Projektion ist ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck, in welchem wir kennen den spitzen Winkel VAG als $i = 3^0\,23'\,30''$ und die ihm gegenüberliegende Kathete als die Summe der scheinbaren Halbmesser der Sonne und der Venus, $\sigma = 16'\,16{,}0''$ und $\varrho = 31{,}4''$. Nach diesen Werten hat der Leser die Zeichnung entworfen; jede Bogenminute ist durch $\frac{1}{2}^{mm}$ dargestellt. Wir finden die Hypotenuse des sphärischen Dreiecks aus

$$\sin h = \frac{(\sigma + \varrho)\sin 1''}{\sin i} \qquad h = 4^0\,44'\,7''.$$

So viel Grade beträgt also der Winkel, unter welchem die Strecke AG dem Beobachter in E erscheint. Aus diesem Gesichtswinkel $= h$ finden wir [da in vorliegender Berechnung der Sonnenabstand der Erde $= a$ und der der Venus nach dem dritten Keplerschen Gesetze $= ca$ ($c = 0{,}723332$) genommen werden kann] den Winkel α, unter welchem die Tangente AG von der Sonne aus erscheint, mittels

$$AG = ca\,\mathrm{tg}\,\alpha = (a - ca)\,\mathrm{tg}\,h \qquad \text{(für D statt E)}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1-c}{c}\,\mathrm{tg}\,h \qquad \alpha = 1^0\,48'\,53''.$$

Der eine Schenkel dieses Winkels α läuft von S über A nach D, der andere von S über G nach dem Grenzpunkte der Orte E. Also ist der äußerste Abstand DE kleiner als $1^0\,48'\,53''$ und ebenso nach der andern Seite von D. Da nun die Erde, wie die Längendifferenzen bei den Kulminationen der Sonne lehren, um den 7. De=

zember in einem Tage $1^{0}\,0'\,59''$ in ihrer Bahn fortschreitet, so sind ihr für den Bogen α nur $1{,}785^{d}$, für den ganzen Spielraum 3,57 Tage erforderlich, in denen ein Venusvorübergang erfolgen kann. Am andern Ende J der Knotenlinie wird der Spielraum kleiner, nämlich $\alpha_1 = 1^{0}\,45'\,43''$, weil der scheinbare Sonnenhalbmesser da nur $\sigma_1 = 15'\,46{,}9''$ ist; aber die Erde schreitet dort in ihrer Bahn langsamer fort, täglich nur $57'\,22''$, und darum kommt nun für die Zeit sogar etwas mehr. Es sind für das Zurücklegen dieses Abstandes $1{,}84^{d}$ und für den ganzen Spielraum um J $3{,}68^{d}$ nötig.

2) Nun ist zu berechnen, nach wieviel Jahren Zwischenzeit Venusvorübergänge eintreten. An den beiden soeben abgegrenzten Stellen der Bahnen sollen Erde und Venus mit ihren ungleichen Geschwindigkeiten zusammen eintreffen. Die Umlaufszeit der Erde beträgt $e = 365{,}2564^{d}$, die der Venus nur $v = 224{,}7008^{d}$. Haben nun, von der Sonne aus gesehen, beide Planeten irgend einmal gleiche Längen (solche Konjunktionsstelle ist in der für das Jahr 1871 geltenden Figur 78 zu Nr. 192 bald hinter E_5), so läuft von hier an die Venus voraus und holt (vergleichbar mit der Bewegung des Minuten- und des Stundenzeigers einer Uhr) die Erde nach einer Zwischenzeit von u Tagen wieder ein, die gefunden werden aus

$$u \cdot \frac{360^{0}}{v} = 360^{0} + u \cdot \frac{360^{0}}{e} \qquad u = \frac{ev}{e - v} = 583{,}9213^{d}.$$

Nun beginnen beide ihren Weg gemeinsam nach derselben Richtung von neuem, und darum heißt u die synodische Umlaufszeit der Venus. Da

$$u \cdot \frac{360^{0}}{e} = 3 \cdot 180^{0} + 35{,}5^{0}$$

ist, so kommt die nächste Konjunktion auf eine ganz andere Gradzahl der Ekliptik, und erst nach einer vielleicht langen Reihe synodischer Umläufe treffen die Stellen wieder in dieselbe Gegend der Ekliptik. Diese Orte müssen, für das Zustandekommen eines Vorüberganges vor der Sonnenscheibe, nahe der Knotenlinie DJ sein, entweder an demselben Ende oder gerade gegenüber. Einem Vorübergange folgt also der nächste, wenn x halbe Erdumläufe nahe übereinstimmen mit y synodischen Umläufen der Venus, und es sind aus $x \cdot \frac{1}{2} e = y \cdot u$ für x und y ganze Zahlen zu ermitteln, welche $\frac{x}{y}$ nahe gleich machen (vergl. die Angabe in Nr. 90)

$$\frac{u}{\frac{1}{2}e} = \frac{583{,}9213}{182{,}6282} = 3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

woraus, wenn man den Kettenbruch mit einem, zwei oder drei Nennern abbricht, hervorgehen die Näherungswerte

x	16	227	243
y	5	71	76

Für sie wird

$$8\ e - 5u = +2{,}445^d$$
$$113\tfrac{1}{2}e - 71u = -1{,}81^d$$
$$121\tfrac{1}{2}e - 76u = +0{,}63^d.$$

Diese Unterschiede sind kleiner, als die nach 1) zum Durchlaufen der Bogen $2\alpha'$ und $2\alpha_1$ erforderlichen $3{,}57^d$ und $3{,}68^d$. Befindet sich also die Erde bei einem Venusvorübergange etwa 1 Tagereise hinter der Knotenlinie, so ereignet sich 8 Jahre darauf wieder ein Vorübergang, weil dann nur 2,445 Tagereisen vor der alten Stelle die Konjunktion erfolgt, und zwar nun vor der Knotenlinie noch innerhalb jenes Spielraums. Darauf kann frühestens 113½ Jahre nach dem ersten, das ist 105½ Jahre nach dem zweiten wieder ein Vorübergang eintreten, drüben dem ersten Standorte entsprechend hinter der Knotenlinie, dem nach 8 Jahren der nächste zur Seite steht. Spätestens aber muß, nach der dritten der obigen Differenzen, 121½ Jahre nach jenem zweiten der erste Vorübergang des nächsten Paares erfolgen. Daß der erste dieser beiden Fälle mit 71 synodischen Umläufen beim Hinüberspringen vom Juni- zum Dezember-Termin, der letztere mit 76u für den Sprung Dezember-Juni gilt, zeigt folgende nähere Betrachtung.

Trat der erste Vorübergang (Figur zu Nr. 192) rechts von J ein, wie es 1761 Juni 5 der Fall war, so fiel die nächste Konjunktion, nach obiger Berechnung, wenig über 35,5° links von D. (E_7 nimmt die Mitte dieses Bogens ein.) Von diesem Punkte aus kam nach noch 5 synodischen Umläufen die Konjunktionsstelle 2,445 Tagereisen näher nach E_7, und von Punkt zu Punkt in dieser Richtung weiter für je 5u. In jener Gegend ihrer Bahn sind aber die Tagereisen der Erde am größten, (bei P_e ist die Erde in ihrer Sonnennähe und bei E_7 ist sie am 24. Dezember) täglich 1° 1′, und es werden $14 \cdot 2{,}445 \cdot 1^0\,1'$ zu $34{,}80^0$. In der That kommt also nach $(1 + 14 \cdot 5)\,u = 71\,u$ eine Konjunktionsstelle bei E, d. h. dicht hinter D an und es findet jetzt ein Vorübergang statt. Nach 5u ist vor D der mit ihm zu einem Paare verbundene. Die folgende Konjunktion springt nach fast 35,5° rechts von J in die Mitte zwischen E_3 und E_4, und von hier aus (Ort der Erde für Juli 12) rücken nun die zu der Reihe der je 5u gehörigen Konjunktionspunkte über E_3 und E_2 auf J zu. Sie stehen aber enger bei einander, als jene um E_7, denn die Tagemärsche der Erde sind um den 1. Juli nur 57,2′, und deshalb bringen, nicht wie zum Dezember-Orte 14, sondern erst $15 \cdot 5u$ die Konjunktion nahe genug

an J heran; denn $15 \cdot 2,445 \cdot 57,2'$ geben die hinreichenden $34,96^0$. (Die 15te Strecke ist 2,445 Tagereisen der Erde, während der Abstand von J, nach 1), weniger als 1,84 Tagereisen sein muß.)

Hier findet, wenn die von jenseit kommende Erde den Punkt J passiert hat, ein Venusvorübergang statt, vom letzten des zweiten Paares an nach $(1 + 15 \cdot 5)\,u = 76\,u$. Von Anfang an sind nun $(71 + 5 + 76)\,u = 2 \cdot 76$ synodische Umläufe der Venus vergangen, und diese haben, wie die dritte der obigen Differenzen zeigt, den Punkt sehr nahe an die Stelle gebracht, von welcher unsere Betrachtung ausging. Mithin wiederholen sich die Venusvorübergänge periodisch nach 243 ganzen Jahren.

Die Knoten der Venusbahn rücken im Sinne der abnehmenden Gradzahlen der Ekliptik langsam fort, jährlich um 17,38″, (eine ebensolche Veränderung der Lage sahen wir an der Bahnebene Jupiters, in Nr. 182;) der Widderpunkt bewegt sich in derselben Richtung, aber schneller, durchschnittlich jährlich 50,24″ (Nr 96); daher nimmt die Länge der Knoten zu, jährlich um 32,86″, in 243 Jahren also um etwa $2^0\,13'$. Ein so großer Bogen der Erdbahn ist etwas mehr als 2 Tagereisen der Erde. Da nun der Widderpunkt das Datum, den 21. März, mit fortführt (Nr. 89; siehe Figur 68 in Nr. 165 und dann Figur 78 in Nr. 192), so kommt im Laufe der Jahrhunderte ein anderes Datum an die Stellen der Venusvorübergänge; der Monatstag schiebt sich in jeder neuen Periode um (mindestens) 2 Tage weiter hinaus. Demnach sind zwei

Perioden der Venusvorübergänge

Juni		Dezember		Juni		Dezember	
8	105½	8	121½	8	105½	8	121½
1761	1769	1874	1882	2004	2012	2117	2125
Juni 5	Juni 3	Dez. 8	Dez. 6	Juni 7	Juni 5	Dez. 10	Dez. 8

wo bei Angabe des Datums der Tagesanfang astronomisch (mittags) gerechnet ist.

3) Nun berechnen wir den Radius-Vektor der Erde und den der Venus für den Vorübergang 1874. Die Rektascensionen und Deklinationen, welche Sonne und Venus bei der Kulmination in Berlin an einer nicht kurzen Reihe von Nachbartagen um den 8. Dez. 1874 hatten, ergaben Längen, die für die Sonne wuchsen, für die Venus abnahmen. Durch Interpolieren konnte man also die Zahl der Länge finden, wo beide Reihen übereinstimmten. Es war $256^0\,59'\,32''$ für Dezember 8 $17,54^h$ mittlerer Berliner Zeit. Zu dieser Zeit waren also, von der Sonne aus betrachtet, die Längen für Erde und Venus gleich geworden, und zwar (180^0 weniger) $76^0\,59'\,32''$.

Die Größe des Radius-Vektor der Erde folgt aus dem Winkel-

abstande vom Perihel der Erde, dessen heliocentrische Länge $100^0 46' 23''$ zur Zeit war. (Dasselbe ist in der Figur zu Nr. 192 bei P_e bezeichnet, auf das der Venus weist der Pfeil P_v.) Der Radius-Vektor hatte also die Anomalie $\vartheta = 336^0 13' 9''$. Hieraus ergiebt sich (Nr. 167 und 166) durch

$$r = \frac{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon\cos\vartheta} \cdot a$$

jener Radius-Vektor der Erdbahn

$$ES = 0{,}984\,617\,a \quad (0{,}984\,613\,a).$$

Bei der Venusbahn hat das Perihel $129^0 45' 7''$ heliocentrische Länge, folglich war dort $\vartheta_1 = 307^0 14' 25''$ und daraus findet man mit der Excentricität $\varepsilon_1 = 0{,}0068235$ und wegen $a_1 = ca$, wo nach dem dritten Keplerschen Gesetze $c = 0{,}723\,332$ ist, den Radius-Vektor

$$VS = 0{,}720\,324\,a \quad (0{,}720\,338\,a).$$

Demnach ist der damalige Abstand der Venus von der Erde

$$EV = 0{,}264\,293\,a \quad (0{,}264\,275\,a).$$

4) Mit welchen Winkelgeschwindigkeiten drehen sich diese Radien-Vektoren um den Sonnenmittelpunkt?

Die Differenzen der täglichen Längen der Sonne lehren, daß am 9. Dezember ihre Länge stündlich 152,530″ wächst. Also ist die stündliche Winkelgeschwindigkeit des Radius-Vektors der Erde

$$w = 152{,}530''.$$

Die Umlaufszeit der Venus $v = 224{,}7008^d$ giebt durch das zweite Keplersche Gesetz die Größe jedes Ausschnitts, welchen der Radius-Vektor der Ellipse in einer Stunde überstreicht, $\frac{\pi a_1 b_1}{24\,v}$. (Nr. 194.) Drückt man die kleine Halbachse b_1 mittels der numerischen Excentricität ε_1 durch a_1 aus und setzt wieder $a_1 = ca$ ein, so wird der Ausdruck $\frac{\pi c^2 a^2 \sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{24\,v}$. Da nun die Venusbahn fast ganz kreisrund ist, so wird der Inhalt solches Ausschnitts hier übereinstimmen mit dem eines Kreisausschnitts von jenem Radius $VS = fa$, wo der in 3) berechnete Faktor von a mit f bezeichnet ist. Der Centriwinkel w_1 des Ausschnitts geht also hervor aus der Gleichung

$$\frac{w_1}{1\,296\,000''}\,\pi f^2 a^2 = \frac{\pi c^2 a^2 \sqrt{1-\varepsilon_1^2}}{24\,v}$$

und giebt die stündliche Winkelgeschwindigkeit der Venus zur Zeit des Vorüberganges

$$w_1 = \frac{c^2 \sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{f^2 v} \cdot 54000'' = 242{,}325'' \; (242{,}323'').$$

Sie ist größer als die der Erde um

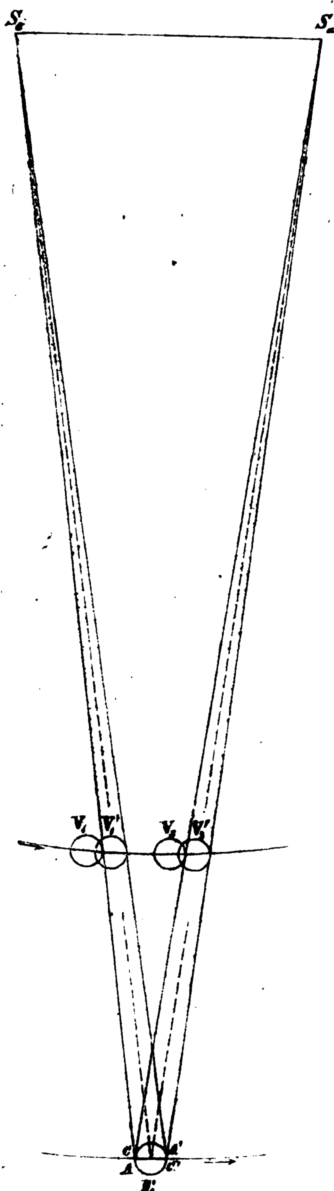
$$\gamma = w_1 - w = 89{,}795'' \; (89{,}793'').$$

5) Nach diesen Vorbereitungen läßt sich die Sonnenparallaxe aus den Augenblicken der scheinbaren Berührung der Venus- und der Sonnenscheibe auf zwei Weisen finden: erstens durch Beobachtung der Zeit des Eintritts oder des Austritts an übereinstimmenden Chronometern für solche Orte, die in der Richtung Ost-West nahezu um einen Erddurchmesser von einander entfernt sind; und zweitens aus der Dauer des ganzen Vorüberganges an zwei Orten, die möglichst weit über und unter der Erdbahnebene sind.

In der Figur 81 ist von dem letzten Punkte A der nach rechts fortschreitenden Erde E über die Venusbahn $V_1 V_3'$ diejenige Tangente AS_e an die Sonnenkugel gelegt, welche dieselbe an der Eintrittsstelle S_e berührt. Von der Sonne ist weiter nichts gezeichnet, als die Sehne $S_e S_a$, welche die Venus durch ihr Vorübergehen auf der Sonnenscheibe zog. Das Fortrücken der Erde kann der Leser sich dadurch vorführen, daß er das Buch um den mit einer Fingerspitze festzuhaltenden Sonnenmittelpunkt langsam unten nach rechts dreht. Die schneller wandernde Venus holt in V_1 soeben die Tangente AS_e ein und der Beobachter in A sieht kurz vor Sonnenuntergang als der erste von allen den Eintritt. Beim Bemerken kann die geometrische Berührung der Ränder leicht schon vor etlichen Sekunden stattgefunden haben.*) Nun schreitet die Venus über die Tangente fort mit dem Überschusse γ ihrer Winkelgeschwindigkeit über die der Erde, und erreicht erst in V_1' die Tangente $A'S_e$, welche von dem vordersten Beobachter A′ nach demselben Sonnenrande geht. Er sieht den Eintritt bei aufgehender Sonne. Kommt die Venus über die von der Erde mitgenommene erste Tangente AS_e ganz hinweg, so sieht vielleicht noch der erste Beobachter oder ein anderer, B, der nicht weit westlich von ihm stationiert ist,

*) Bei der Beobachtung des Merkur-Vorüberganges am 6. Mai 1878 sah Langley zu Allegheny durch ein Fernrohr mit polarisierendem Okular die ganze Merkurscheibe außerhalb der Sonne etwa eine halbe Minute vor dem ersten äußeren Kontakte. Trotz des atmosphärischen Schimmers ist also der Korona-Hintergrund hell genug, um diese Wirkung hervorzubringen. (Sklareks Zeitschrift „Der Naturforscher", IX [1878] S. 297.) Mit dem tangential zum Sonnenrande gestellten Spektroskope erblickte Respighi 4 Minuten vor dem ersten Kontakte oberhalb der Chromosphäre der Sonne den dunklen Einschnitt des Merkur, der langsam weiter über dieselbe vorrückte. (Daselbst Seite 471.)

Man besitzt also nun zwei Hilfsmittel, welche auf den Augenblick der äußeren Berührung vorbereiten, so daß dieser Zeitpunkt mit weit größerer Sicherheit, als bisher, festgestellt werden kann.



Figur 81. Venusvorübergang. Ein- und Austritt.

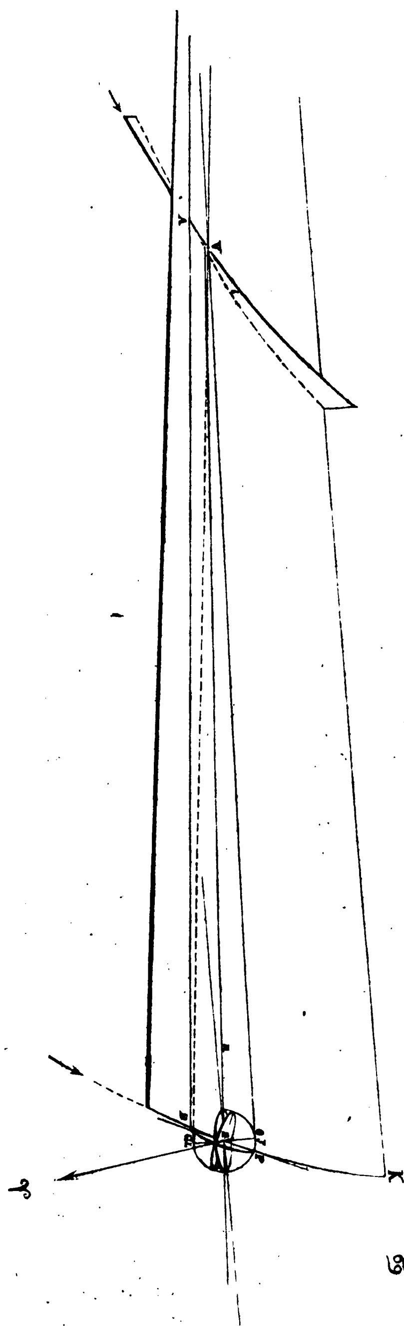
die innere Berührung der Ränder entstehen, wenn Venus, etwa wie ein noch hängender Tropfen, der zum Herabfallen sich dehnt, vom Sonnenrande sich lösen will (Ablenkung der Sonnenstrahlen beim Durchgange durch die Atmosphäre der Venus), und notiert den Augenblick, in welchem der Sonnenrand sich wieder schloß. Später kommt ebensolche Erscheinung für einen Beobachter B′ auf der andern Seite der Erde. Nun geht die Venus für alle Erdorte, die Tag haben, vor der Sonnenscheibe vorüber. Dies dauerte 1874 mehr als 4 Stunden. Derselbe Vorgang, nur in umgekehrter Ordnung, wiederholt sich bei der Austrittsstelle S_a, wenn die Venus die (in Figur 81 gezeichnete) zweite innere Tangente (Erde-Sonne) CS_a erreicht. C sieht zuerst die zweite innere Berührung im Augenblicke der sogenannten Tropfenbildung, C′ sieht dies zuletzt, und dann erfolgt schließlich die zweite äußere Berührung. Bei dem Vorübergange 1874 waren Orte, wie A und C die Sandwich-Inseln und die Gesellschafts-Inseln im großen Ocean, und wie A′ und C′ die Ostseite Afrikas.

Winkel AS_eA' oder CS_aC', ferner der für die erste innere und der für die zweite äußere Berührung, also vier Winkel, von denen jeder gleich der doppelten Sonnenparallaxe ist, werden nun ihrer Größe nach gefunden durch die Zeit, welche die Venus, jeden zu durchwandern, nötig hatte. Geht aus den Angaben der Chronometer, die vor und nach den Beobachtungsreisen mit der Normaluhr einer bestimmten Sternwarte verglichen und in ihrem Gange geprüft wurden,

hervor, daß für je zwei nahezu um einen Querdurchmesser der Erde von einander entfernte Beobachtungsorte, wie A und A', C und C' die Zeit zwischen je zwei zusammengehörigen von den 4 einzelnen Berührungen t Stunden betrug (t ist ein echter Bruch, wenig kleiner als $\frac{1}{5}$), so wird die doppelte Parallaxe $t\gamma$, also

$$\pi = t \cdot 44{,}90''.$$

6) Für die Beobachtungen in Nord und Süd erkennt man die ihrer Lage nach geeignetsten Orte aus Figur 82. Sie zeigt uns in größerem Maßstabe den Ausschnitt KSD der Figur 78 zu Nr. 192 ohne seine Spitze. Die Figur ist perspektivisch gezeichnet mit der Längeneinheit Erdkugelradius $r = 0{,}02^{mm}$; die Erde selbst aber mußte in 200facher Größe des Radius dargestellt werden. Man hat beim Schnittpunkte der nach links zusammenlaufenden Radien-Vektoren die Sonne S halb so groß wie die gezeichnete Erdkugel zu denken, und für Erde und Venus nur einen haarfeinen Stich. Dann erkennt man, daß die über der Erdbahnebene langsam ansteigende Venus V in der That von der Erde aus oben vor der Sonne gesehen werden mußte. Die Entfernungen und die Winkel DSK und ESK, sowie auch der Neigungswinkel i der Venusbahn, sind nach ihren wirklichen Größen perspektivisch genau wiedergegeben. Der Mittelpunkt E der Erde nimmt in der Bahn den Ort ein, welchen er beim Vorübergange 1874 inne hatte, als, von der Sonne aus betrachtet, die Längen für Erde und Venus gleich wurden, 76° 59' 32'', 1874 Dez. 8 $17{,}54^{h}$ mittlerer Berliner Zeit. Da es an diesem Dezembertage in Berlin morgens halb 6 Uhr war, so haben wir uns in der Figur den Ort für Berlin auf der abgewandten Erdhälfte zu denken, und zwar fast genau hinter der Erdachse. Ein in diese Stellung gebrachter Erdglobus läßt sehen, daß der in E auf der Ebene der Erdbahn senkrecht stehende Erddurchmesser an seinem oberen Ende J bei der Achsendrehung der Erde passiert wurde etwa von Jakutsk im östlichen Sibirien, und daß beim unteren Ende L das Meer zwischen der Südspitze Amerikas und der Küste Grahams-Land des Südpolarlandes sich befand. In diese Gegenden waren also Beobachter zu senden nach solchen Orten, welche zu der Zeit Vormittag hatten, damit der Vorübergang seinem ganzen Verlaufe nach gesehen werden konnte. Weil die Venus schon über die Ekliptik getreten war, so beschrieb ihr Mittelpunkt einem Beobachter O in der Stadt Olekminskoi in Sibirien (deren nördliche geographische Breite 60° 22' und deren östliche Länge von Greenwich 119° 35', von Ferro 137° 15' ist) eine Sehne auf der Sonnenscheibe etwas näher dem Mittelpunkte, als die in der Richtung GV zu treffende kürzere Sehne, in welcher sie für einen Beobachter auf einer Südsee-Insel oben an der Sonnenscheibe vorüberzog. Die Größe dieser beiden parallelen Sehnen läßt sich aus der Dauer des



Figur 82. Der Vorübergang der Venus, 1874 Dezember 8.

Vorüberganges berechnen und dann findet man durch den bekannten Halbmesser der Scheibe ihren gegenseitigen **Abstand**.

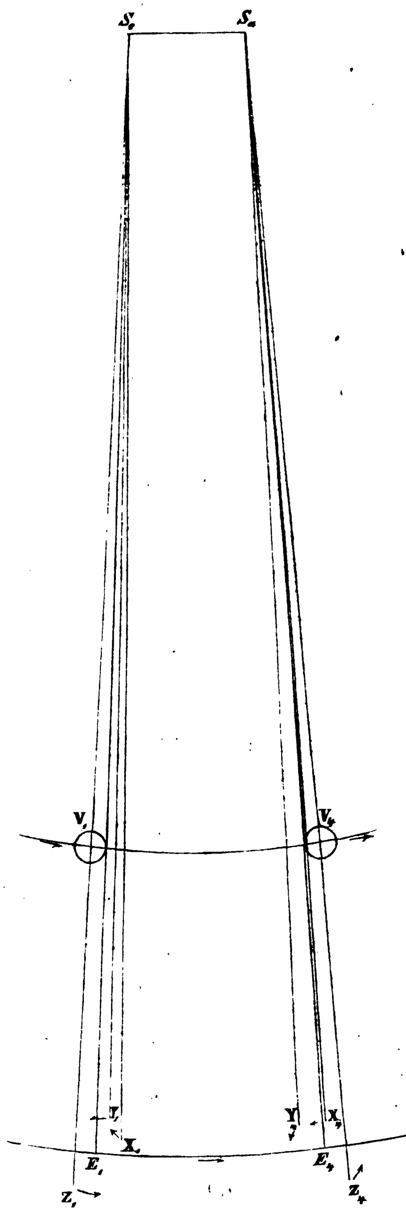
Aus den Differenzen der oben erwähnten Reihen von Längen für Sonne und Venus, welche sie von Tag zu Tag um 0^h hatten, ging hervor, daß am 9. Dezember die Länge der Sonne stündlich 152,530″ wuchs, d. h. wir sahen die Sonne um so viel stündlich an der Himmelskugel (der täglichen Bewegung entgegengesetzt) nach links fortrücken. Die Venus bewegte sich aber nach rechts, ihre Länge nahm stündlich ab um 91,024″. Beide Gestirne treten also, von der Erde aus gesehen, auseinander stündlich um $g = 243{,}554''$. [Die Geschwindigkeit g ist nicht zu verwechseln mit der obigen Geschwindigkeit γ, welche ein Beobachter von der Sonne aus sehen würde.] Mit dieser Größe g der Bewegung sieht ein Beobachter die Venus auf der Sonnenscheibe fortrücken, welcher von der Erde nur in ihrer Bahn fortgetragen würde, nicht aber noch durch die Achsendrehung der Erde seinen Ort veränderte.

Nehmen wir zunächst nur die für diese Auflösung der Aufgabe am günstigsten gelegenen Orte, nahe den Enden J und L des auf der Erdbahnebene senkrecht stehenden Durchmessers, so sind dies Stellen der Erdoberfläche, welche in 24 Stunden nur kleine Parallelkreise beschreiben; es wird also die durch die Achsendrehung hervorgerufene Verkürzung oder Verlängerung der Vorübergangsdauer dort nur klein sein, und wir können einstweilen davon absehen. Betrug die Zeit entweder zwischen den beiden äußeren oder den beiden inneren Berührungen der Ränder am Beobachtungsorte in der Südsee t_1 Stunden, so war die Größe der Sehne $t_1 g$; der Beobachter im hohen Norden erhielt $t_2 g$ Bogensekunden. Da nun der scheinbare Halbmesser der Sonne $\sigma = 976{,}0''$ und der der Venus $\varrho = 31{,}4''$ war, so läßt sich auch der Abstand d der beiden parallelen Sehnen in dem Kreise mit dem Radius $\sigma + \varrho$ oder $\sigma - \varrho$ leicht in Bogensekunden angeben.

Beschreibt man nun in der Ebene des Winkels OVG mit EV um V einen Bogen (GO), so stimmt dessen Länge mit dem Erddurchmesser 2r überein; denn jener Punkt auf Grahams Land hat 64° 48′ südliche Breite (und 296° 40′ östliche Länge von Greenwich, 314° 20′ von Ferro), so daß das Meridianstück GO 175° 34′ besitzt. Ebenso wird der um V mit VS in derselben Ebene beschriebene Bogen zwischen den Schenkeln des Scheitelwinkels von OVG durch den berechneten Abstand d der Sehnen der Sonnenscheibe bestimmt. Demnach hat man die Bogen

$$2\,r = \frac{V^0}{180^0}\,\pi\,EV \quad \text{und} \quad d = \frac{V^0}{180^0}\,\pi\,VS$$

also $$r = \frac{EV}{2\,VS}\,d = 0{,}183454\,d \ (0{,}18344\,d).$$



Figur 83. Einwirkung der Erdumdrehung auf die Messungen der Durchgangsdauer.

Folglich erscheint von der Sonne aus der Erdradius so groß, wie uns 0,183454 d, d. h. es ist die Sonnenparallaxe $\pi = 0{,}183454\,d''$.

7) Wie die Achsendrehung der Erde die Dauer des Vorüberganges für verschiedene Beobachtungsorte ungleich verändert, ist aus Figur 83 leicht ersichtlich. Von den Punkten X und Y auf der der Sonne zugewandten Erdseite, bei welcher die Umdrehungsrichtung dem Laufe der Venus entgegengesetzt ist, sieht im Vergleiche mit dem nicht mit rotierenden Erdmittelpunkte E der Punkt Y die Venus später ein- und früher austreten, X später ein- und etwas später austreten; aber Z, wie Grahams Land in der über den Südpol übergreifenden Tagseite, läuft in gleicher Richtung mit der Venus, und sieht deshalb den Eintritt früher und den Austritt später. Durch die Umdrehung der Erde wird der Vorübergang bei Z verlängert, bei Y und X ungleich verkürzt. Für den Punkt X vergehen, da er an dem Platze X_4 mittags quer zurückgeführt wird, zwischen der dritten und vierten Ränderberührung weniger Minuten, als zwischen der ersten und zweiten morgens bei X_1, wo die Umdrehung kaum störte.

Da aus der Dauer des Vorüberganges die Größe der Sonnensehne zu berechnen ist, so würde die kurze Sehne für

den hinter dem Südpol herumlaufenden Punkt, dessen Projektion auf die Erdbahnebene Z ist, zu lang werden, dagegen die längere Sehne für den nördlichen Punkt, der sich in Y projiziert, zu kurz. Mithin würde ihr Abstand d zu klein ausfallen und man würde die Parallaxe zu gering finden. Die durch die Erdumdrehung herbeigeführte Änderung in der Dauer des Vorüberganges muß aus den Beobachtungen durch Rechnung herausgeschafft werden.

Die Stelle Y der Erdbahnebene (Figur 83), über welcher der Ort O im Augenblicke einer Beobachtung war, finden wir durch die nach O mitgenommene Uhr. Figur 84 giebt die Erde noch einmal in der Stellung, wie in Figur 82, aber nun in tausendfacher Größe des dortigen Maßstabes.

1874 Dez. 8 war 0^h mittlerer Berliner Zeit $= 17^h 8^m 8{,}84^s$ Sternzeit. Diesen Wert wollen wir bezeichnen mit s Stunden Sternzeit. Für jeden Tag mittlerer Zeit wuchs s um $3^m 56{,}56^s$ (Nr. 80), der stündliche Zuwachs sei z Stunden. Giebt die nach Berliner Zeit gehende Uhr an u Stunden nach Dez. 8 0^h, so ist es in dem Augenblicke $s + uz$ Stunden Sternzeit; folglich befindet sich der Fußpunkt des Berliner Meridians auf dem Erdäquator von F aus (die Durchschnittslinie des Äquators und der Ekliptik, EF, läuft zum Widderpunkte) in der Richtung über Q $(s + uz) \cdot 15^0$ entfernt und für den Beobachtungsort O, welcher L Grade östlicher Länge von Berlin hat (Nr. 117), ist $FQC = (s + uz) \cdot 15^0 + L^0$. Ein Auge im Mittelpunkte E würde den Punkt O in der Richtung EO wie einen Stern sehen, dessen Rektascension $a = FQC$ und für den die Deklination durch die geographische Breite $OC = \varphi$ angegeben wird. Demnach finden wir in der Ebene der Ekliptik die Lage der

Figur 84. Stellung der Erde während des Venusvorüberganges 1874 Dez. 8.

Projektion Y von O, indem wir zur Rektascension a und der Deklination φ die Länge $FMH = l$ und die Breite $OH = b$ berechnen. (Nr. 94.) Hierdurch wissen wir, daß in jenem Augenblicke, in welchem die Uhr u Stunden zeigte, der Beobachtungsort O sich in der Höhe OY $h = r \sin b$ über der Ebene der Erdbahn befand, ferner, wenn die Eintritts- oder die Austrittsstelle des Sonnenrandes die Länge λ hat (die Richtung ER läuft zum Endpunkte von λ), daß der Abstand YB von ER ist

$$y = r \cos b \cdot \sin(\lambda - l).$$

Aus 5) ist bekannt, daß die Venus eine Tangente, wie $S_e E_1$ in Figur 83 über den Erdradius r, welcher in der Erdbahnebene rechtwinklig gegen ER liegt (Figur 84), fortschiebt in der Zeit T. Folglich war, um sie über den Abstand y fortzubringen, die Zeit $T \cos b \sin(\lambda - l)$ nötig. Um solche Größe ist die beobachtete Vorübergangsdauer t an ihrem Anfange und Ende zu verbessern. Dann hat der Beobachter die Dauer des Vorüberganges so, wie er sie gesehen hätte, wenn er ohne Erdumdrehung auf dem Punkte, in welchem er während der Mitte des Vorüberganges sich befand, nur in der Richtung der Erdbahn fortgetragen wäre. Die verbesserte Zeit t_1 giebt ihm die Vorübergangssehne $t_1 g$, und auf der entgegengesetzten Station kommt $t_2 g$.

Für den Schluß der Entwicklung sind wir nun auch frei von der Annahme, daß die Beobachter auf den beiden am günstigsten gelegenen Stellen der Erdkugel gewesen seien. Hat der Beobachter auf der nördlichen Halbkugel zur Zeit der Mitte des Vorüberganges die Höhe über der Erdbahnebene $h_1 = r \sin b_1$ und der auf der südlichen $h_2 = r \sin b_2$, so wird jener in 6) mit VE um V beschriebene Bogen durch $h_1 + h_2$ angegeben und es lauten die Gleichungen

$$r(\sin b_1 + \sin b_2) = \frac{V^0}{180^0} \pi EV \quad \text{und} \quad d = \frac{V^0}{180^0} \pi VS$$

woraus, wenn man $\sin \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \cos \frac{1}{2}(b_1 - b_2)$ mit m bezeichnet, hervorgeht

$$r = \frac{1}{m} \frac{EV}{2VS} d = \frac{0{,}183454}{m} d$$

also ist die Parallaxe

$$\pi = \frac{0{,}183454}{m} d''.$$

Anmerkung. Der Koefficient von d zeigt die Güte der Bestimmung der Parallaxe mittels der Venusübergänge. Denn wenn b_1 und b_2 sogar bis 25^0 von 90^0 entfernt sind, ist m noch größer als 0,9, und dann beeinflußt der in d etwa noch vorhandene Fehler nur mit seinem fünften Teile den Wert der Parallaxe. Die öfter

eintretenden Vorübergänge des Merkur eignen sich nicht dazu, weil bei dem weit größeren Erdabstande des Merkur d viel zu klein und unsicher wird.

Die nach unsern Formeln leicht auszuführende Ausrechnung der Parallaxe können wir noch nicht anstellen, weil man die Beobachtungen des Venusvorüberganges vom Jahre 1874 erst veröffentlichen will, wenn auch die von 1882 fertig vorliegen und das Gesamt-Ergebnis festgestellt ist.

202. Abschluß. Von den erhaltenen Ergebnissen stimmen die beiden aus der Opposition des Mars abgeleiteten sehr genau überein mit dem Werte, welcher zur Zeit von allen Astronomen zur Rechnung benutzt wird*) und wahrscheinlich auch bis zur Schlußbestimmung nach dem Venusvorübergange des Jahres 1882 bleibt, nämlich mit dem aus der

Äquatorial-Horizontalparallaxe $\pi = 8{,}848'' + 0{,}013''$

hervorgehenden $23338\,r + 34\,r$. (Diese Unsicherheit ist kaum mehr als $\frac{1}{700}$.)

Wir werden den Berechnungen zu Grunde legen die abgerundete, durch die Folge der Ziffern leicht im Gedächtnis zu behaltende Zahl

der mittlere Abstand der Erde von der Sonne
$a = \mathbf{23340}$ Erdkugelradien
von der Größe $r = 6370{,}26$ Kilometer.

Dieser Abstand ist die Entfernungseinheit im Sonnensystem.

*) Im Jahre 1868 gab Newcomb als Anhang zu dem vom Observatorium zu Washington veröffentlichten Bande von Beobachtungen eine Untersuchung über den Wert der Sonnenparallaxe. Mit Rücksicht auf das ungleiche Gewicht von 6 auf 5 verschiedenen Wegen erhaltenen Ergebnissen berechnete er die zuverlässigste Größe der Sonnenparallaxe 8,848″ mit dem wahrscheinlichen Fehler + 0,013″.

Die Astronomen wenden zur Angabe der Parallaxe den Radius des Äquators des Erdsphäroids an. Unser r kommt gleich dem mittleren Halbmesser des Erdsphäroids. (Nr. 226.) Da jener nach Bessel $\alpha = 6377{,}397^{km}$, unser $r = 6370{,}26^{km}$ ist, so muß, wegen $\alpha = r + \frac{1}{900}r$, jede der oben abgeleiteten Parallaxen um ihren 900sten Teil vergrößert werden, damit man das Ergebnis mit astronomischen Angaben vergleichen könne. So wird aus I und II 8,867″ und aus III 8,847″. Dem $a = 23340\,r$ entspricht die astronomisch angegebene Parallaxe 8,847″, und zu $a = 23338\,r$ gehört 8,848″. Also jedes Tausendstel der Parallaxe mehr oder weniger verkleinert oder vergrößert den Sonnenabstand um einen Erddurchmesser.

Zur Angabe der Parallaxe den Erdkugelradius zu nehmen, ist für die Zukunft besser, weil man diesen mittleren Halbmesser des Erdsphäroids mit weit größerer Sicherheit, als den Radius des Äquators, genau erhalten wird. (Siehe Nr. 226 und Nr. 258.)

Der halbe Abstand der Brennpunkte der Erdbahn-Ellipse ist

$$e = \varepsilon a = 391 r$$

daher kleinster Abstand $a - e = 22949$ Erdkugelradien
größter Abstand $a + e = 23731$ Erdkugelradien.

Da der Abstand der beiden Brennpunkte der Bahn-Ellipse 5 Millionen Kilometer ist, so bewegt sich die Entfernung der Erde von der Sonne hin und her zwischen 146 und 151 Millionen Kilometer.

Ferner $a - b = 3{,}28$ r. (Nr. 168.) An den Enden der kleinen Achse sind wir dem Mittelpunkte der Bahn-Ellipse nur 3 Erdradien näher, als wenn wir uns an einem Ende der großen Achse befinden. Die Erdbahn ist sehr nahe kreisrund.

§ 23. Die Erde als Glied des Planetensystems.

203. Größe der Sonne. Aus dem nun bekannten mittleren Abstande der Erde von der Sonne, $a = 23340$ r, ergiebt sich durch die mittlere scheinbare Größe des Sonnendurchmessers, $2\sigma = 32' \, 0{,}88''$, die Länge des Radius der Sonne, sowie ihre Raumgröße, im Vergleich mit der Erde.

Man findet den Sonnenradius $s = 108{,}7$ r und die Sonnenkugel 1280000 mal so groß, als die Erde.*)

Denkt man die Erde mit dem Monde mitten in die Sonne versetzt, so kommt der Mond in seinem Erdabstande nicht nur auch hinein in diesen Raum, sondern es findet sich hinter dem Monde noch eine Weite von 0,8 des Mondabstandes, also fast ebensoviel; da erst trifft man an die Oberfläche der Sonnenkugel. (Nr. 152.)

204. Das Planetensystem. Das dritte Keplersche Gesetz giebt uns Aufschluß über die Weite des Raumes, in welchem die Erde und die übrigen Planeten in elliptischen Bahnen (vom Nordpole aus gesehen, entgegengesetzt der Uhrzeigerbewegung) um die Sonne laufen, und aus dem mittleren Abstande eines jeden, in Verbindung mit seinem dazu gehörigen scheinbaren Halbmesser, erhalten wir auch die Größe der Planeten. Aus den in der Tabelle unter I (vergl. § 20) in Spalte 2, 6 und 7 stehenden Angaben berechne man für irgend einen Planeten das, was die Überschriften unter II fordern.

*) Nimmt man den als das arithmetische Mittel aus acht Bestimmungen der Sonnenparallaxe erhaltenen Wert $\pi = 8{,}90''$, so kommt $s = 107{,}9$ r und die Raumgröße 1260000.

Die zahlreichen **Planetoiden** durchziehen in vielfach durchschlungenen Bahnen einen weiten Ringgürtel, welcher, mit beträchtlichem Zwischenraume innerhalb und außerhalb, das Planetensystem scheidet in einen kleinen inneren Teil, in welchem auch die Erde sich bewegt, und in einen weiten Außenraum mit mondreichen großen Planeten.

Unter den Planetoiden sind für die Tabelle ausgewählt α) Ceres, als der größte dieser kleinen Himmelskörper, welcher als der erste von ihnen entdeckt wurde am 1. Januar 1801, dem Anfange des Jahrhunderts;*) β) Pallas, als der Planet mit größter Abweichung von der Ekliptikebene, und γ) Polyhymnia, als der Planet mit stärkster Excentricität. Die vor den Namen stehenden, von einem Kreise umgebenen Zahlen, 1, 2, 33, sind die astronomischen Zeichen der Planetoiden nach der Reihenfolge der Entdeckung. Die recht erhebliche Veränderlichkeit der Bahn-Elemente der Planetoiden nötigt, die Zahlen in der Weise abzurunden, wie für die Tabelle geschah. Die scheinbaren Durchmesser sind nicht durch Mikrometer zu erhalten. Die Astronomen haben durch Messen der Lichtstärke im Vergleich zu den übrigen Planeten auf die Größe der wahren Durchmesser geschlossen. Die in Spalte 14 stehenden Werte sind hier also die ursprünglichen Angaben.

Die Bedeutung der Zahlen in den Spalten 11 und 12 wird klarer durch die Zeitangaben unter 13. (Die Lichtzeit s. Nr. 196 am Ende.)

Zur Vervollständigung der Vorstellung, die der Leser durch das Studum der Tabelle gewinnen soll, sind die Größen, welche die **Lage der Bahnen** bestimmen, in den Spalten 3, 4 und 5 mit aufgenommen. Dieselben sind, so wie auch die Excentricität, langsamen Veränderungen unterworfen. Dies zeigte sich für Jupiter bei unserer Berechnung der Bahn in Nr. 182, 183 und 187. Dadurch, daß der Widderpunkt jährlich um 50,241″ in der Ekliptik zurückgeht, (Nr. 96) ändern sich die Zahlen für die Längen viel bedeutender, so daß trotz des Zurückschreitens aller Knoten die Längen dieser Punkte doch wachsen. Um alle Angaben auf einen Zeitpunkt zu bringen, von dem aus die Werte für irgend eine andere Zeit sich bequem berechnen lassen, wurde eine runde Zahl, der Anfang des Jahres 1900, gewählt. Bei solcher Übertragung wird man nur die Ortsveränderung des Widderpunktes zu berücksichtigen brauchen, da die übrigen Veränderungen gering sind, wovon man sich überzeugen kann durch Vergleich der an anderen Stellen dieses Buches stehenden mit den Werten, die in die Tabelle gesetzt sind.**)

*) Der 100. der Planetoiden wurde 1868, der 200. im Jahre 1879 entdeckt.

**) Hatte irgend eine dieser Größen im Jahre 1800 den Wert a, so setzte man den t Jahre später geltenden Wert w gleich $a + bt + ct^2$ und noch einen $w_1 = a + bt_1 + ct_1^2$. Aus zwei solchen Gleichungen fand man Zahlen für die

Bahn-Elemente und Größe der Planeten.

I. Gegeben.

Nr.	Planet	1. Zahl der Monde	2. Umlaufszeit (siderisch) in Tagen mittlerer Zeit	3. Heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn (für den Anfang des Jahres 1900)	4. i, Neigung der Bahn gegen die Ebene der Ekliptik (für den Anfang des Jahres 1900)	5. Heliocentrische Länge des Perihels (für den Anfang des Jahres 1900)	6. e, numerische Excentricität der Bahn-Ellipse (für den Anfang des Jahres 1900)	7. Mittlere scheinbare Größe des Äquatorial- Durchmessers	des Polar- Durchmessers
	a) 4 innere, kleine Planeten.								
1.	Merkur	—	87,969 26ᵈ	47° 8,8′	7° 0′ 12″	75° 53,2′	0,205 621	6,6974″	
2.	Venus	—	224,700 79	75 47,7	3 23 32	130 7,1	0,006 811	17,13″	
3.	Erde	1	365,256 37	—	—	101 13,2	0,016 751	—	
4.	Mars	2	686,979 65	48 47,1	1 51 3	334 12,9	0,093 307	9,5″	
	b) Gruppe der Planetoiden (Asteroiden), von denen seit 1879 mehr als 200 bekannt sind.								
(1)	Ceres	—	1 682ᵈ	80,9°	10° 37,2′	150°	0,076 3	(0,177″)	
(2)	Pallas	—	1 685	172,8	34 41,2	122°	0,238 9	(0,130″)	
(83)	Polyhymnia	—	1 768	9,5	1 56,4	342°	0,340 0	(0,033″)	
	c) 4 äußere, große Planeten.								
5.	Jupiter	4	4 332,584 8ᵈ	99° 27,6′	1° 18′ 32″	12° 42,0′	0,048 289	38,4″	35,9″
6.	Saturn mit 4 Ringen	8	10 759,219 8	112 26,8	2 29 23	90 59,3	0,055 887	17,053″	15,381″
7.	Uranus	4	30 686,82ᵈ	73 29,8	0 46 30	168 59,2	0,046 584	4,28″	3,86″
8.	Neptun	1	60 117ᵈ	130° 48′	1° 46,9′	50° 57′	0,009 174	2,6″	

II. Zu berechnen.

Nr.	Planet	8. 1 Umlauf in Jahren	9. a, mittlerer Abstand von der Sonne	10. e, halbe Excentricität	11. Die kleinste Entfernung von der Sonne	12. Die größte Entfernung von der Sonne	13. Wird in der Sonnennähe erreicht vom Sonnenlicht in	13. Wird in der Sonnenferne erreicht vom Sonnenlicht in	14. Halbmesser des Äquators in Erdradien r, r = 6370,26 km	14. Halbe Achse in Erdradien r	15. Raumgröße, im Vergleich mit der Erde
			Entfernungseinheit = 23340 Erdkugelradien								
1.	Merkur	0,24	0,387 10	0,079 60	0,307 50	0,466 70	2m 33s	3m 52s	0,3789 r		$\frac{1}{18}$
2.	Venus	0,62	0,723 33	0,004 93	0,718 40	0,728 26	5 58	6 3	0,969 r		0,9
3.	Erde	1	1	0,016 75	0,983 25	1,016 75	8 9	8 26	—		1
4.	Mars	1,88	1,523 69	0,142 17	1,381 52	1,665 86	11 28	13 49	0,82 r		0,55
(1)	Ceres	4,60	2,768	0,211	2,557	2,979	21m 13s	24m 43s	0,028 r = 177 km		$\frac{1}{47000}$
(2)	Pallas	4,61	2,771	0,662	2,109	3,433	17 30	28 29	0,020 r = 130 km		$\frac{1}{120000}$
(33)	Polyhymnia	4,84	2,861	0,973	1,888	3,834	15 40	31 49	0,005 r = 34 km		$\frac{1}{6600000}$
5.	Jupiter	11,86	5,201*)	0,251	4,950	5,452	41m 4s	45m 14s	11,30 r	10,56 r	1350
6.	Saturn	29,46	9,538	0,533	9,005	10,071	1h 14 43	1h 23 33	9,203 r	8,300 r	703
7.	Uranus	84,02	19,182	0,894	18,288	20,076	2 31 44	2 46 34	4,645 r	4,19 r	90
8.	Neptun	164,59	30,033	0,2755	29,757 5	30,308 5	4 6 53	4 11 28	4,4 r		86

*) Es kann hier nur erwähnt werden, daß das dritte Keplersche Gesetz durch die gegenseitige Anziehung der Planeten und der Sonne eine kleine Änderung erleidet. Es beschreibt nämlich auch der Sonnenmittelpunkt eine kleine Ellipse um den gemeinsamen Schwerpunkt der Sonne und der Planeten. Ist M die Masse der Sonne, m und m_1 die zweier Planeten, so lautet das von Newton verbesserte Gesetz

$$t^2 : t_1^2 = \frac{a^3}{M+m} : \frac{a_1^3}{M+m_1}.$$

[Zu finden in Bohnenberger, Astronomie (Tübingen, Cottasche Buchhandlung, 1811) S. 525.] Hiernach kommt der mittlere Abstand vom Sonnenmittelpunkt für Jupiter 5,20280, Saturn 9,53885, Uranus 19,18264 und für Neptun 30,03354. 204.

Nach den Ergebnissen kann man sich eine Karte des Planetensystems zeichnen, wie dies in Figur 80 zu Nr. 200 für Erde und Mars geschehen ist. Besser aber ist es für das Erkennen der kleinen Verschiedenheiten der Lage, die drei Gruppen der Bahnen getrennt und mit ungleichen Maßstäben darzustellen, dabei aber, des Vergleiches wegen, auf der zweiten und dritten Karte auch die Erdbahn wieder mitzuzeichnen in der ihr dort zukommenden Größe. Man nehme für die erste, „die Bahnen der inneren Planeten", als Entfernungseinheit 5^{cm} $(= \frac{1}{2} \cdot 100^{mm})$ [dazu reicht ein Quartblatt aus], für die zweite, die Bahnen jener drei Planetoiden, die Hälfte des Maßstabes der Figur I [auf einem halben Bogen] und für die dritte, „die Bahnen der äußeren Planeten", ein Zehntel der ersten Maßeinheit, 5^{mm} [wozu ein ganzer Bogen erforderlich ist]. Von dem in der Mitte angesetzten Standorte S der Sonne ziehe man nach rechts eine gerade Linie, die zum Widderpunkte gehen soll, trage an sie oberhalb den betreffenden Winkel aus Spalte 5 an, verlängere den Schenkel über S um die für Figur I mit $\frac{1}{2} \cdot 100^{mm}$ berechnete Größe e (Spalte 10) und beschreibe um den gefundenen Bahnmittelpunkt mit dem ebenso berechneten a einen Kreis. Diesen muß man bei Polyhymnia und Pallas mit Bleistift zeichnen und an ihm hin die Ellipse führen, nachdem ihre erheblich kleinere Nebenhalbachse eingetragen ist. Die Abweichung der Bahnellipse von der Kreisrundung ist bei jenen Maßstäben nur noch für Merkur darstellbar, für Mars kaum. Außer dem Perihel und Aphel (Sonnenferne) markiere man noch die Knotenlinie der Bahn mit dem Zeichen des aufsteigenden und des niedersteigenden Knotens. (Figur 78 zu Nr. 192.)

Auf solcher Karte hat man die Planetenbahnen niedergelegt in die Ebene der Erdbahn, während sie in Wirklichkeit unter verschiedenen Neigungswinkeln aus ihr heraustreten. Die Größe dieser Abweichungen wird deutlich, wenn man die Steighöhe berechnet, bis zu welcher der Planet sich über die Erdbahnebene erhebt oder unter sie hinabgeht. Die Hypotenuse zu dieser dem Neigungswinkel i gegenüberliegenden Kathete kann man in der Figur auf dem zur Knotenlinie rechtwinkligen Durchmesser der Bahn abmessen, wodurch man die Höhe zu vorliegendem Zwecke der Darstellung genau genug erhält. Die Ergebnisse bringt die folgende kleine Tabelle für dieselbe Entfernungseinheit der obigen großen Tabelle.

Koefficienten b und c, und zwar c sehr klein. Dadurch war für diese Größe ein Ausdruck gewonnen, der wegen der langsamen Veränderung jeden später erhaltenen zutreffend lieferte, wenn man für t die neue Zahl der Jahre nach 1800 nahm. Die Formelausdrücke findet man in dem Werke: Hermann J. Klein, das Sonnensystem nach dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft. 2. verbesserte Auflage. Braunschweig, Vieweg u. Sohn, 1871. (351 Seiten.)

Nr.	Planet	Steighöhe über der Erdbahnebene	Steighöhe unter der Erdbahnebene
1.	Merkur	+ 0,042	— 0,052
2.	Venus	+ 0,042	— 0,043
3.	Erde	—	—
4.	Mars	+ 0,054	— 0,045
(1)	Ceres	+ 0,473	— 0,546
(2)	Pallas	+ 1,867	— 1,284
(33)	Polyhymnia	+ 0,108	— 0,077
5.	Jupiter	+ 0,124	— 0,113
6.	Saturn	+ 0,423	— 0,405
7.	Uranus	+ 0,247	— 0,271
8.	Neptun	+ 0,942	— 0,925

205. Eine Darstellung des Planetensystems. (Saturnringe.) Eine Vorstellung vom Planetensystem erhält man erst dadurch, daß man die Größe der Planeten mit in Betracht zieht. Dazu aber ist es durchaus notwendig, daß man nach den Ergebnissen in Spalte 14 die Planeten sorgfältig selber aufzeichnet. Am zweckmäßigsten ist es, für den Erdradius r 3 Millimeter zu nehmen. (In dieser Darstellung hat die Erde die Größe einer Erbse.) Dann erhält der Mond $1\frac{1}{2}^{mm}$ Durchmesser und kommt in seiner Erdnähe $17{,}1^{cm}$ weit vom Erdmittelpunkte; für die Erdferne wächst der Abstand auf $19{,}1^{cm}$. (Nr. 152 und 153.) Den beträchtlichen Unterschied gut zu sehen, setze man den Mond „in Erdnähe" und „in Erdferne" auf dieselbe Seite der Erde. Der Abstand Erde-Mond dient als Anhalt zum Vergleiche. Nachdem die vier inneren Planeten möglichst genau gezeichnet sind, beschreibt man für Jupiter zuerst mit der großen Halbachse $33{,}9^{mm}$ mit spitzem Bleistift einen Kreis; man muß ihn, wenn man durch die Endpunkte der kleinen Achse aus freier Hand die Ellipse gelegt hat, nicht wegreiben, damit man die Stärke der Abplattung vor Augen habe. Ebenso für Saturn und Uranus. Bei Neptun wurde bisher eine Abplattung nicht bemerkt.

Um auch die Ringe um Saturn, wodurch er einzig im ganzen Planetensystem dasteht, als flache Ellipsen in verhältnismäßiger Größe darstellen zu können, ist noch folgendes anzugeben. Saturn wird von 4 Ringen umgeben*), die mit kaum bemerkbaren Abweichungen in der Erweiterung der Ebene seines Äquators rundlaufen. Die beiden äußeren und der innerste sind schmal, der dritte

*) Nach seinen Beobachtungen mit den großen Refraktoren in Washington und Cambridge (1875) giebt L. Trouvelot fünf Trennungslinien, also sechs Ringe an.

ist breit und heller als die beiden äußeren. Die Dicke der Ringe ist unmeßbar klein. Das ganze Ringsystem hat in mittlerer Entfernung von der Erde den äußeren scheinbaren Durchmesser $2\varrho_1 = 39{,}31''$, der breite dritte Ring den inneren Durchmesser $2\varrho_2 = 26{,}67''$ und den äußeren $2\varrho_3 = 33{,}70''$; der zweite hat den inneren Durchmesser $2\varrho_4 = 34{,}52''$ und für die Teilung zwischen den beiden äußeren Ringen, welche kaum ein Drittel so breit ist, wie der Raum zwischen dem dritten und zweiten Ringe, fand man den scheinbaren Durchmesser $2\varrho_5 = 36{,}4''$. Der vierte, innerste Ring, welcher wegen seiner schwärzlich grünen Farbe sehr schwer sichtbar ist, nimmt die Mitte ein zwischen Saturn und dem Hauptringe.

Hieraus ergiebt sich durch die in Erdradien ausgedrückte Größe von a (Spalte 9)

der Radius des äußersten Randes $r_1 = 21{,}21\,r$
der des inneren Randes vom 3. Ringe $r_2 = 14{,}39\,r$

also ist die Breite der drei äußeren Ringe mit den beiden Zwischenräumen $6{,}82\,r.$

Ferner

Radius vom inneren Rande des 2. Ringes $r_4 = 18{,}63\,r$
vom äußeren des dritten $r_3 = 18{,}19\,r$

daher die Breite des Raumes zwischen dem 3. und 2. Ringe $r_4 - r_3 = 0{,}44\,r$

folglich, nach obiger Angabe, der Abstand zwischen den beiden äußeren Ringen $0{,}14\,r$
und der Radius dieser Teilung $r_5 = 19{,}64\,r.$

Die Entfernung vom Saturn-Äquator bis zum Hauptringe, $5{,}19\,r$, ist kaum mehr als $\frac{1}{12}$ des Abstandes unseres Mondes von der Erde; und mitten in diesem Raume kreist noch der dunkele vierte Ring.

Schließlich ist, entsprechend den übrigen Angaben der Tabelle, noch herzusetzen: der Neigungswinkel i des Ringsystems gegen die Ebene der Ekliptik ist $28^{\circ}\,10'\,10''$; beim Fortschreiten des Saturn rotieren die Ringe in fast parallel bleibender Lage so fort, daß, vom Mittelpunkte aus gesehen, der aufsteigende Knoten in $168^{\circ}\,10{,}6'$ der Ekliptik kommt.

Die Mühe des Zeichnens wird durch den immer wieder Staunen erregenden Anblick reich belohnt. Zu diesen Figuren gehört die Sonne als eine Kugel von $32{,}6^{\text{cm}}$ Radius oder $65{,}2^{\text{cm}}$ Durchmesser. (Diese Größe wird man, vielleicht mit Benutzung eines Bildrahmens an der Wand, sich zur Anschauung bringen.)

In welchen Entfernungen aber muß man sich diese Kügelchen und Bälle um die so große Sonnenkugel, entsprechend der Wirklichkeit, laufen denken? — Die gewählte Längeneinheit $r = 3^{\text{mm}}$ giebt die Entfernungseinheit (den mittleren Abstand der

Erde von der Sonne) = 70 Meter. Folglich werden die kleinste und die größte Entfernung für Merkur 21,5^{m} und 32,7^{m}, für Venus 50,3^{m} und 51,0^{m}, für die Erde 68,8^{m} und 71,2^{m}, und so weiter, wie der Leser bis für Neptun aufschreiben wird, um durch diese Zahlen den Einfluß der Excentricität auf die Ausdehnungen der Bahnen klarer zu erkennen. Nun bemühe sich der Leser, von der Größe dieser Strecken eine **deutliche Vorstellung** sich zu verschaffen, entweder mit Hilfe eines guten Planes der Umgegend, oder indem er etwa auf einer Chaussee, die von 100 zu 100 Metern gesetzten Steine benutzt, um von einem auch in der Ferne sichtbaren Anfangspunkte aus die aufgeschriebenen Abstandsweiten abzuschreiten und anzusehen.*)

*) Für Berlin. Wir denken uns „Unter den Linden", in der Mitte des Durchschnitts mit der großen Friedrichstraße, eine glühende Kugel von 65^{cm} Durchmesser als Darstellung der Sonne, und von hier nach Osten die Richtung zum Widderpunkte. Das Senfkorn „Merkur" würde in der ihm zukommenden Bahn durch die Breite der Straße „Unter den Linden" nicht behindert. Bei seinem sehr excentrischen Laufe streift es im Süden die Eckhäuser der Friedrichstraße und erreicht drüben nur den nördlichen Fahrstraßendamm. Dabei steigt es in Nordwest bis 2,9^{m} empor und senkt sich in Südost 3,6^{m} unter die Grundebene. Nicht so verschieden ist Steigung und Senkung des wie eine Erbse großen Venuskügelchens, in West + 2,9^{m}, in Ost — 3,0^{m} bei 50^{m} Bahnradius. Nur noch 20^{m} weiter nach außen bewegt sich die kaum größere Erde in der Grundebene herum. Erst „Mars", von der Größe eines Pfefferkorns, kommt bis an die nächste Parallelstraße der Linden, die Mittelstraße, und schneidet drüben, nicht ganz so weit von der Sonnenkugel, die Friedrichstraße in dem halben Abstande der Behrenstraße. Dabei hat seine Steighöhe in Nordwest, + 3,75^{m}, die Höhe eines Zimmers, in Südost geht er bis — 3,1^{m} hinunter. Ganz anders schweifen die beiden ersten Planetoiden ab. Das Sandkörnchen „Ceres" erhebt sich 33^{m} hoch 180^{m} weit in West und geht 207^{m} weit östlich auf — 38^{m} hinab. Diese Höhen übertreffen die des Königlichen Schlosses, welches 30^{m} hoch ist. Die „Pallas" aber, deren Bahnneigungswinkel bei weitem größer ist, als die aller andern Planeten, schwingt sich in Süd, wo sie die Französische Straße fast erreicht, empor auf 131^{m}, das ist die doppelte Höhe der Gendarmen-Türme; der nördliche ist 67,34^{m}, der südliche 66,80^{m} über der Grundfläche des Schillerdenkmals. Da dies Körnchen von 0,1^{mm} Durchmesser in Nord dem Centralpunkte näher bleibt (in der Mitte zwischen der Mittel- und Dorotheenstraße), wird die Tiefe kleiner als jene Höhe, nämlich — 90^{m}. (Der Rathausturm bis zur Spitze der Fahnenstange ist 93,4^{m} über dem Bürgersteige der Königstraße.) — Gehen wir in der Friedrichstraße nach Süden fort, so ist der Ball „Jupiter" in den Durchschnitt der Jägerstraße zu bringen, „Saturn" zur Kronenstraße, „Uranus" in die Mitte zwischen der Koch- und der Puttkammerstraße und die Kugel „Neptun" kommt an die Viktoria-Säule auf dem Belle-Alliance-Platze. Die Bahn des „Saturn", eines Apfels von 5^{cm} Achse, hat zum Durchmesser die ganze Länge der Straße Unter den Linden, von der Schloßbrücke (in einer Tiefe von 28^{m}) bis zum Anfange des Pariser Platzes in der Höhe des Adlers auf dem Stabe, welchen die Viktoria auf dem (20,60^{m} hohen) Brandenburger Thore in der Rechten hält (die Krone des Adlers ist 28,63$_{m}$ über dem Steinpflaster unter dem Thore); er steigt zu solcher Höhe auf von Norden hinter der Weidendammbrücke an und erhebt sich nach Südwest zu noch bis auf 29,6^{m}. Die Weite, in welcher diese Bahn umgeben wird von der des kleinen Sphäroids „Uranus", markieren in Ost der Rathausturm, hinter

Wohin kommt nun zu dieser Darstellung des Planetensystems von 4,2 km Durchmesser der der Sonne nächste Fixstern? Es ist der an der südlichen Himmelshalbkugel sichtbare Stern erster Größe α Centauri. (Tabelle in Nr. 174.) — Der Abstand von der Erbse „Erde" wird 15561 km, das ist das $2\frac{1}{2}$ fache des wirklichen Erdradius. Also durch die ganze Erde hindurch, noch einen halben Erdradius nach außen — dort haben wir zu unserer Darstellung des Planetensystems den nächsten Fixstern zu denken.

206. Geschwindigkeiten in der Bahn. Aus den in Kilometern angebbaren Entfernungen und aus der Umlaufszeit in Sekunden findet man leicht die Geschwindigkeiten bei den vier Scheitelpunkten der Bahn nach den in Nr. 194 entwickelten Formeln. Wenn die Grenzen, zwischen welchen die Geschwindigkeit eines Planeten sich ändert, wegen geringer Excentricität der Bahn nur wenig verschieden sind, so tritt der Unterschied deutlicher hervor in der Zeit, in welcher die dort im Planeten liegende Strecke der Bahn zurückgelegt wird.

Nr.	Planet	1. Mittlere	2. Größte	3. Kleinste	4. In mittlerer Entfernung	5. In der Sonnennähe	6. In der Sonnenferne
		Geschwindigkeit in der Bahn			wird die im Planeten liegende Strecke der Bahn zurückgelegt in Zeit von		
1.	Merkur	47,579 km	58,615 km	38,621 km	1 m 41,5 s	1 m 22,4 s	2 m 5,0 s
2.	Erde	29,602	30,102	29,111	7 10	7 3	7 18
3.	Polyhymnia	17,50	24,93	12,28	3,9	2,7	5,5
4.	Jupiter	12,980	13,623	12,368	3 h 4 m 51 s	2 h 56 m 8 s	3 h 14 m 1 s
5.	Neptun	5,402	5,451	5,352	2 53 40	2 52 5	2 55 16

Nach Nr. 194 hat man für die mittleren Geschwindigkeiten zweier Planeten

$$v = \frac{2\pi a}{t} \quad \text{und} \quad v' = \frac{2\pi a'}{t'}, \quad \text{folglich} \quad \frac{v}{v'} = \frac{t'}{t} \cdot \frac{a}{a'}.$$

Beseitigt man mittels des dritten Keplerschen Gesetzes entweder die Umlaufszeiten oder die Abstände, so erhält man für die mittleren Geschwindigkeiten der Planeten die Beziehung

$$v : v' = \sqrt{a'} : \sqrt{a} = \sqrt[3]{t'} : \sqrt[3]{t}.$$

207. Größe, Abstand und Geschwindigkeit der Jupitermonde. Bei mittlerer Entfernung Jupiters sind die scheinbaren

dem Nord-Ende der Friedrichstraße die ersten Häuser der Chausseestraße und in West Krolls Etablissement. Und dahinter, noch um die Hälfte dieses Bahnradius ferner, die Neptunbahn — (zu ersehen aus einem Plane von Berlin).

Durchmesser der Monde, vom innersten anfangend, nach den Messungen von

Struve	$2\varrho_1 = 1{,}015''$	$2\varrho_2 = 0{,}911''$	$2\varrho_3 = 1{,}488''$	$2\varrho_4 = 1{,}273''$
Secchi	0,985	1,054	1,608	1,496

Hieraus findet man die Größe ihrer Kugelradien, ausgedrückt durch den Erdradius r,

nach Struve	$r_1 = 0{,}299\,r$	$r_2 = 0{,}268\,r$	$r_3 = 0{,}438\,r$	$r_4 = 0{,}375\,r$
Secchi	0,290 r	0,310 r	0,473 r	0,440 r

Der Radius des Merkur ist 0,379 r und der des Mondes der Erde 0,273 r. (Nr. 153.) Der größte der 4 Monde Jupiters, der dritte, ist größer als der Planet Merkur, wahrscheinlich auch der vierte; der kleinste, der zweite, ist mindestens gleich dem Monde der Erde. Wiewohl der zweite Mond der kleinste ist, erscheint er gewöhnlich heller als der vierte.

Aus den Angaben in der Tabelle am Ende der Nr. 191 erhält man den Abstand vom Jupitermittelpunkte, den Radius R der Bahn,

$R_1 = 68{,}35\,r.$ $R_2 = 108{,}74\,r$ $R_3 = 173{,}45\,r$ $R_4 = 305{,}07\,r$

und die Geschwindigkeit in der Kreisbahn um Jupiter

$v = 17{,}90^{km}$ $14{,}19^{km}$ $11{,}23^{km}$ $8{,}47^{km}$

Dem Äquator Jupiters ist der erste Mond etwas näher, als uns der Erdmond; er wird dort also ein wenig größer erscheinen, als uns unser Mond; die andern Monde aber müssen dort kleiner aussehen wegen der bedeutenden Entfernungen.

Die beiden inneren Monde haben in ihrer Bahn um Jupiter größere Geschwindigkeit, als Jupiter in seinem Laufe um die Sonne. Da Jupiter sie langsamer fortführt, so kommt jeder dieser beiden, wenn er zwischen Jupiter und die Sonne tritt, zurück. Folglich muß des Mondes Bahn um die Sonne an diesen Stellen Schleifen haben. Bei den beiden langsamer gehenden äußeren Monden aber sind die Bahnen um die Sonne gestreckte Cykloiden, die innerhalb der Jupiterbahn keine Spitzen haben, da, von der Sonne aus gesehen, die Bewegung auch als Differenz der beiden Geschwindigkeiten stets positiv, und selbst beim dritten Monde noch erheblich von Null fern bleibt.

Anmerkung. Der innerste Mond legt in seiner Kreisbahn um Jupiter eine Strecke, die gleich seinem eigenen Durchmesser ist, in $3\frac{1}{2}$ Minuten zurück. Bei einer Verfinsterung also dauert es, weil der Mond fast um seine ganze Geschwindigkeit die des Jupiterschattens übertrifft, $3\frac{1}{2}$ Minuten vom Augenblicke der Berührung des Kernschattens bis zum vollendeten Eintritt, und am Ende der Verfinsterung

ebenso lange beim Heraustreten. Allerdings wird für unsere Beobachtung diese Zeit durch den verdunkelnden Halbschatten vermindert, besonders bei Fernröhren, die wegen Kleinheit der Objektivlinse nur mäßige Lichtstärke haben; aber auf Sekunden genau können mehrere Beobachter das Verschwinden und Wiedererscheinen nicht mit Sicherheit angeben. Dies schränkt die Genauigkeit bei Bestimmung geographischer Längen, zu der man die Verfinsterung der ersten Jupitermonde als Zeichen für die Uhrvergleichung benutzt, erheblich ein; so daß dies Verfahren bei kleinen Längendifferenzen unbrauchbar wird. (Nr. 117, Note.)

§ 24. Lauf des Mondes, des Begleiters der Erde.

208. Veränderung des Ortes am Himmel. Phasen des Mondes. Wenn man am Abendhimmel die Mondsichel sieht, so merke man sich ihren Standort an dem senkrecht darunter erblickten irdischen Gegenstande und notiere die Zeit der Beobachtung. Am folgenden Abende trete man zu der aufgeschriebenen Zeit wieder an dieselbe Stelle. Dann steht der Mond bedeutend weiter links von dem gestrigen Standorte, und die Sichel ist merklich breiter geworden. Setzt man das Beobachten eine Reihe von Tagen hindurch fort, so findet man, daß der Mond immer weiter nach links gekommen ist. Bald hat er 90° Abstand von der Sonne erreicht, und dabei hat sich die Sichel zur Halbkreisscheibe verbreitert. Die Lichtgestalt des Mondes (Phase) verwandelt sich nach dem „ersten Viertel"*) während der folgenden Woche allmählich in den Vollmond. Dieser steht am Himmel der Sonne gerade gegenüber; sein Abstand ist auf 180° gewachsen. Von nun an geht der Mond erst nach Sonnenuntergang auf, von Tag zu Tag später. Seine Lichtgestalt nimmt jetzt von der rechten Seite her ab. Ist sie zum „letzten Viertel" geworden, so steht der Mond bei Sonnenaufgang im Süden und geht in der folgenden Woche immer kürzere Zeit vor der Sonne als Sichel auf, die in den nächsten Tagen so schmal wird, daß man sie nun nicht mehr bemerken kann. Bei diesem Verschwinden in der Helle des Morgenhimmels stand der Mond rechts von der Sonne. Wenige Tage nachher ist er über die Richtung Erde-Sonne hinweggekommen nach links von der Sonne, wo wir ihn, nun also am Abendhimmel, bemerken, wenn er so weit fortgerückt ist, daß er vom Sonnenglanze unserer Atmosphäre nicht mehr verdeckt wird.

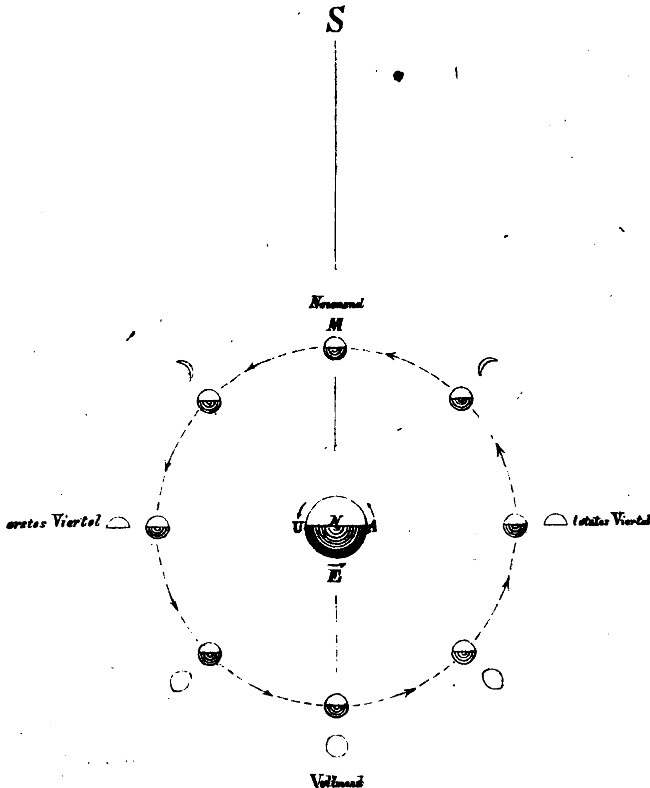
So ist der Mond, ein an sich dunkler, von der Sonne erleuchteter Himmelskörper, in einem Monate an der Himmelskugel, und

*) Die Benennung „Viertel" bezieht sich auf die Viertelbahn, die der Mond zurückgelegt oder noch zu durchlaufen hat.

zwar unter den Sternbildern des Tierkreises, rund herum gewandert, und hat diesen Rundlauf um die Erde vollführt, nicht um die Sonne, da er innerhalb 64 Erdradien der Erde nahe bleibt, die Sonne aber mindestens 23000 Erdradien Abstand von uns hat. (Nr. 152 und 202.) Dabei war die Bewegung von West über Süd nach Ost, also entgegengesetzt dem Uhrzeigerlaufe, mithin in derselben Richtung, wie alle Planeten um die Sonne, und die vier Monde um Jupiter laufen; die Richtung ist auch dieselbe, in welcher die Sonne, die Erde und andere Planeten um ihre Achsen sich drehen.

Die Figur 85 zeigt den Mond an den Hauptstellen seines Rundlaufes um die Erde. Außen beigesetzt sind die Lichtgestalten, welche man, wenn man sein Auge in E versetzt denkt, von der erleuchteten Hälfte der Mondkugel (Nr. 112) sehen kann.*) Die Figur soll aber

*) Die Regel für das Erkennen des zunehmenden oder abnehmenden Mondes ist schon am Ende des ersten Abschnittes der Nr. 176 angegeben.



Figur 85. Lauf des Mondes um die Erde.

hauptsächlich dazu dienen, daß man den Zusammenhang jeder Phase mit dem Unter- oder Aufgange der Sonne und des Mondes klar erkenne und sich einpräge, um die Übereinstimmung mit der Wirklichkeit selber zu finden. Man muß sich auf irgend einen Punkt der Erdkugel E versetzen und diese rotieren denken, wie die Pfeile zeigen (bei N ist der Nordpol). Kommt der Beobachter auf die durch U gehende Nachtgrenze, so geht ihm die Sonne unter und die Sichel des zunehmenden Mondes sieht er in West, so daß sie auch bald untergehen wird. Der Mond im ersten Viertel steht bei Sonnenuntergang über Süden und geht um die Zeit, wenn der Beobachtungsort beim Mitternachtsmeridian ist, unter. Und so betrachte man weiter, bis man sieht, daß die Sichel des abnehmenden Mondes erst kurz vor der Sonne aufgehen muß. — Ferner erkennt man, daß, wenn man bei klarem Wetter außer der sehr schmalen Mondsichel auch die Nachtseite des Mondes in mattem, aschfarbenem Lichte als volle Fläche sieht, dieser Lichtschimmer dasselbe ist, wie bei uns der Mondschein, nämlich Erdschein auf dem Monde; denn die Erde wird dann vom Monde aus fast voll erleuchtet erblickt, und zwar mit 3⅔fachem Durchmesser unseres Vollmondes. (Nr. 153.) Stets ist, vom Monde aus gesehen, die Erd-Phase die Kreis-Ergänzung der uns gleichzeitig sichtbaren Mond-Phase.

Durch die zu Anfang besprochene Beobachtung ist erkannt, daß bei der täglichen scheinbaren Umdrehung der Himmelskugel der Mond hinter den Sternen zurückbleibt. Dies kann man mit Hilfe eines Sextanten schon nach wenigen Minuten wahrnehmen. (Nr. 22.) Hat man den Abstand des Mondrandes von einem ihm westlich voranschreitenden Sterne gemessen und wiederholt man die Messung nach 8 Minuten, so findet man, daß die Entfernung inzwischen um 4 bis 5 Bogenminuten größer geworden ist, wiewohl Stern und Mond nun weiter nach West gerückt sind. Mißt man 24 Stunden später den Abstand des Mondes von demselben Sterne, so sieht man, wie viel Grade in seiner Bahn der Mond in einem Tage weiter gewandert ist. Das so mit Benutzung näherer Sterne fortgesetzte Messen zeigt, daß der Mond mit recht ungleichförmiger Geschwindigkeit in seiner Bahn läuft; innerhalb eines Monats ändert er seine Tagemärsche von etwas weniger als 12 Grad bis über 15 Grad. Doch erreicht die kleinste und besonders die größte Gradzahl nicht in allen Monaten dieselbe Größe.

209. Siderische und synodische Umlaufszeit des Mondes. Wegen der ungleichförmigen Geschwindigkeit des Mondes muß man zur Bestimmung seiner Umlaufszeit eine große Anzahl von Umläufen nehmen. Sieht man den Mond wieder bei demselben Fixsterne, bei welchem er vor vielen Jahren war, so dividiert man die inzwischen verflossene Zeit durch die Zahl der seitdem entstandenen Mondumläufe. So ist gefunden

der siderische Umlauf, die wahre Umlaufszeit des Mondes.
27,3216609 Tage mittlerer Zeit $= 27^d\ 7^h\ 43^m\ 11{,}5^s$.

In dieser Zeit dreht sich der Radius-Vektor Erde-Mond um 360°. Ging man vom Neumonde aus, so steht nach dieser Zeit der Mond noch nicht wieder vor der Sonne, weil sie inzwischen am Himmel in derselben Richtung fortgerückt ist, wie der Mond von der Konjunktionsstelle ablief. Wie das abermalige Zusammentreffen des Minuten- und Stundenzeigers einer Uhr mehr als einen Umlauf des Minutenzeigers erfordert, so ist auch die Zeit von einem Neumonde zum nächsten Neumonde größer als die wahre Umlaufszeit des Mondes. Die Zeit von einer Konjunktion bis zur folgenden heißt die synodische Umlaufszeit, weil dann Mond und Sonne ihre Wege am Himmel zusammen wieder beginnen. Ist der siderische Umlauf des Mondes m Tage, so dreht sich der Radius-Vektor Erde-Mond durchschnittlich täglich um $\frac{360}{m}$ Grade, und aus der Umlaufszeit e der Erde, dem siderischen Jahre (Nr. 99), wissen wir, daß der Radius-Vektor Erde-Sonne im Mittel täglich $\frac{360}{e}$ Grade mit derselben Drehrichtung beschreibt; nach x Tagen holt jener diesen wieder ein;*) dann ist

$$x \cdot \frac{360^0}{m} = 360^0 + x \cdot \frac{360^0}{e} \quad \text{folglich} \quad x = \frac{e\,m}{e - m} \text{ Tage.}$$

Die mittlere synodische Umlaufszeit des Mondes ist

$$29{,}530589^d = 29^d\ 12^h\ 44^m\ 2{,}9^s.$$

Anmerkung. In einem Jahre läuft der Mond $\frac{e}{m} = 13{,}37$ mal um die Erde; aber Neumond tritt nur $\frac{e}{x} = \frac{e}{m} - 1 = 12{,}37$ mal ein. Die zwölf Monate des Jahres stammen aus den synodischen Mondumläufen. (Note zu Nr. 86.)

*) Leichter ist die Vorstellung so, wie wir den Vorgang am Himmel sehen, also mit ruhend gedachter Erde. Wer die Betrachtung, der Wirklichkeit entsprechend, anstellen will, lege seine Taschenuhr umgekehrt vor sich auf den Tisch, so daß das Zifferblatt unten ist. Die Erde wird bei der Zeigerachse gedacht, der Mond sitzt an der Spitze des Minutenzeigers, und der Stundenzeiger weist auf die Sonne, welche um die etwa 400fache Länge des Minutenzeigers von der Uhr entfernt steht. Dorthin zeige in diesem Augenblicke auch der Minutenzeiger. Während dieser nun seinen Rundlauf vollführt (man sieht ihn von der verkehrten Seite an!) bewege man die Uhr in der Richtung, wie die Erde um die Sonne läuft, fort. — Jetzt soll der Minutenzeiger 360° beschrieben haben: der siderische Mondumlauf ist beendet, der synodische noch nicht. Die Uhr kommt noch eine kurze Strecke in ihrer Bahn weiter, bis der Minutenzeiger mit dem Stundenzeiger wieder zusammentrifft.

210. Lage des Mondlaufes am Himmel. Weil der Mond im Vergleich zu andern Gestirnen sehr nahe bei der Erde ist, so wird seine Deklination an Orten, bei welchen er in demselben Augenblicke kulminiert, von erheblich verschiedener Größe gefunden. [Man vergleiche die in Nr. 152 in der Aufgabe angegebenen beobachteten Deklinationen δ und δ_1.] Die Figur 62 zu Nr. 152 zeigt für die Orte B und C, daß eine beobachtete Deklination des Mondes nur eine scheinbare, und die wahre Deklination diejenige ist, welche ein im Mittelpunkte der Erde gedachtes Auge zu derselben Zeit sehen würde. Die Berechnung der geocentrischen Deklination läßt sich in folgender Weise leicht ausführen. Der wirkliche Mondradius beträgt (nach Nr. 153) k Erdradien r. Mißt man mit dem Sextanten kurz vor oder nach der Kulmination den scheinbaren Durchmesser 2ϱ des Mondes, so hat man den Abstand des Mondmittelpunktes M vom Beobachtungsorte B

$$\text{aus } BM \sin\varrho = kr \qquad BM = \frac{k}{\varrho \sin 1''} \cdot r.$$

Durch die bei der Kulmination beobachtete Zenitdistanz z kennt man nun in dem Dreiecke EBM zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel (in der Figur 62 zu Nr. 152 bedeutet M jetzt den Mittelpunkt des Mondes), kann also die derzeitige Höhenparallaxe p, sowie den Radius-Vektor EM, berechnen, und man hat [Parallele ML] die geocentrische Deklination AEM

$$d = \delta + p$$

d. h. die beobachtete Deklination ist um die Höhenparallaxe des Ortes zu vergrößern (und zu vermindern an einem Beobachtungsorte auf der südlichen Erdhalbkugel). Die im folgenden angegebenen Deklinationen des Mondmittelpunktes sind die geocentrischen.

Um die Lage der Mondbahn gegen die Ebene der Erdbahn zu erkennen, hat man aus der Rektascension und der wahren Deklination die Länge und Breite des Mondmittelpunktes im Augenblicke der Kulmination für viele Tage eines Monats zu berechnen. (Nr. 94.) Dann zeigt sich, daß mit zunehmender Länge die Breiten in der Weise sich ändern, wie es der Fall ist bei Peripheriepunkten eines größten Kreises, welcher die Ekliptik unter einem schiefen Winkel schneidet. Zur Bestimmung der Lage solches größten Kreises (eines Mondumlaufes am Himmel) ist die Länge λ des aufsteigenden Knotens und der Neigungswinkel i zu ermitteln aus der letzten negativen und der ersten positiven Breite. Es sei b die absolute Größe der letzten südlichen Breite des Mondmittelpunktes, ihr Fußpunkt auf der Ekliptik liege vor dem aufsteigenden Knoten in der Entfernung x und hinter ihm im Abstande x_1 der Fußpunkt der positiven Breite b_1 bei der Kulmination am folgenden Tage. Die aus

$$\sin x_1 = \operatorname{tg} b_1 \operatorname{cotg} i \qquad \text{und} \qquad \sin x = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} i$$

durch Dividieren entstehende Proportion liefert

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x_1 - x) = \frac{\sin(b_1 - b)}{\sin(b_1 + b)} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(x_1 + x)$$

dazu die Differenz der zugehörigen Längen

$$\tfrac{1}{2}(x_1 + x) = \tfrac{1}{2}(l_1 - l)$$

und man hat die Länge des aufsteigenden Knotens

$$\lambda = l + x = l_1 - x_1$$

und den Neigungswinkel i aus

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} b_1}{\sin x_1}.$$

Endlich ist aus den Kulminationszeiten auch anzugeben, wann der Mondmittelpunkt aufwärts durch die Ebene der Ekliptik ging. Wir geben dazu drei Beispiele aus Monaten, die 2 und 4 Jahre voneinander getrennt sind. Da in der Zwischenzeit der Widderpunkt jährlich um 50,241″ in der Ekliptik zurückgegangen ist (Nr. 96), so muß man zum Vergleiche der Ergebnisse die Knotenlängen schließlich auf einen gemeinsamen festen Anfangspunkt beziehen. (Spalte 8 der Tabelle.)

Die Ergebnisse in Spalte 8 lehren, daß der aufsteigende Knoten seinen Ort an der Himmelskugel verändert; er geht in der Ekliptik zurück, wie dies, vom Sonnenmittelpunkte aus gesehen, auch bei allen Planetenbahnen der Fall ist (Nr. 182), nur ist das Zurückschreiten der Knoten des Mondlaufes, vom Erdmittelpunkte aus betrachtet, ein bedeutend schnelleres. Denn es ergiebt sich durch die Zeiten zwischen den Terminen in Spalte 10 von 2,014 und 4,023 Jahren aus den Differenzen der Größen in Spalte 8 das Zurückweichen für ein Jahr bei 1872 bis 74 $19{,}37^0$ und bei 1874 bis 78 $18{,}70^0$, also durchschnittlich jährlich 19^0; so daß der Knoten in fast 19 Jahren alle 360^0 der Ekliptik am Himmel durchwandert. — Auch der Neigungswinkel i (Spalte 9) ändert seine Größe, er nimmt ein wenig zu und ab.

Das Zurückweichen der Knotenlinie, welches bei einmaligem Mondumlaufe etwa $\frac{19^0}{13{,}37} = 1{,}4^0$ beträgt, fordert, daß man den Weg des Mondmittelpunktes beim Entstehen enthalten denkt in einer beweglichen Ebene, die in der Erde sich stützt. Ihre beiden Lagen, zu Anfang und am Ende eines Umlaufes, schließen einen Winkel ein von $1{,}4^0 \sin i = \frac{1}{8}$ Grad. In Nr. 183 fanden wir, daß bei der Jupiterbahn die Drehung der Ebene während eines Umlaufes nur 3 Winkelsekunden beträgt. Streng genommen, ist also die Bahn

Nr.	1. Der Mond kulminierte in Berlin (in mittlerer Zeit)	2. Rektascension	3. Deklination	4. Schiefe der Ekliptik ε	5. Berechnete Breite	6. Berechnete Länge
		des Mondmittelpunktes für den Ort des Widderpunktes am Anfange des Jahres			des Mondmittelpunktes	
I	1872 Sept. 21 15h 54,4m 22 16 44,5	3h 59m 29s 4 53 42	+ 20° 13,3′ + 23 23,4	23° 27′ 21,0″	— 0° 20′ 28,22″ (27,8″) + 0 48 14,31 (14,8)	61° 53′ 58,04″ (56,8″) 74 49 11,73 (12,1)
II	1874 Sept. 26 12h 48,5m 27 13 41,5	1h 10m 54s 2 8 5	+ 6° 44,9′ + 13 42,8	23° 27′ 20,0″	— 0° 43′ 7,41″ (7,3″) + 0 42 46,23 (46,6)	18° 54′ 51,85″ (57,0″) 34 32 16,89 (22,7)
III	1878 Okt. 5 7h 58,1m 6 8 42,0	20h 55m 24s 21 43 18	— 17° 23,7′ — 12 32,9	23° 27′ 18,1″	— 0° 1′ 10,51″ (11,0″) + 1 5 4,82 (4,1)	311° 22′ 58,95″ (23′ 0,8″) 323 52 21,37 (25,3)

Nr.	7. Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn für den Ort des Widderpunktes am Anfange des Jahres der Beobachtung	8. des Jahres 1872	9. Neigungswinkel i der Mondbahn-Ebene gegen die Ekliptik	10. Der Mondmittelpunkt ging aufwärts durch die Ebene der Ekliptik
I	65° 44′ 21,72″ (16,0″)	65° 44′ 21,72″ (16,0″)	5° 4′ 52,06″ (51,4″)	1872 Sept. 21 23h 17,25m (17,1m)
II	26 45 30,68 (33,5)	26 43 50,20 (53,0)	5 15 6,25 (6,9)	1874 Sept. 27 1h 18,1m (18,0m)
III	311 36 10,37 (17,7)	311 31 8,92 (16,3)	5 5 28,20 (26,1)	1878 Okt. 5 8h 24,2m (24,4m)

210.

des Mondes um die ruhend gedachte Erde keine in sich zurücklaufende Kurve.

Anmerkung. Eine eingehende derartige Untersuchung, ausgedehnt auf die einzelnen Monate vieler Jahre, lehrt, daß je nach der Stellung der Sonne gegen die Knotenlinie der Neigungswinkel i zwischen den Grenzen $5^{\circ}0'$ und $5^{\circ}18'$ periodisch auf und nieder schwankt um die mittlere Neigung $5^{\circ}8'40''$; ferner, daß jeder der beiden Knoten in der Weise ungleichmäßig geht, daß er zu Zeiten sogar etwas vorschreitet und dann viel weiter zurückläuft. Dies spricht sich in obiger Schlußrechnung aus den 2 und 4 Jahren dadurch aus, daß die beiden Ergebnisse, $19{,}37^{\circ}$ und $18{,}70^{\circ}$, nicht übereinstimmen. Der ganze Rundlauf eines der beiden Knoten erfolgt in 18,6 Jahren.

211. Bahn des Mondes um die Erde. Die Hypotenusen c und c_1 jener beiden rechtwinkligen sphärischen Dreiecke mit den Katheten b und x, b_1 und x_1, berechnet man, wegen der Kleinheit der Breiten b und b_1, besser aus

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos i}$$

dann ist ihre Summe $c + c_1 = \gamma$ der Bogen zum Centriwinkel MEM_1, welchen die nach den beobachteten Standorten M und M_1 gerichteten Radien-Vektoren der Mondbahn beim Erdmittelpunkte E einschließen. Es ergiebt sich

Nr.	Winkel γ zwischen den Radien-Vektoren	Er wurde beschrieben in
I	$12^{\circ}58'14{,}87''$ $(16{,}2'')$	$24^{h}\,50{,}1^{m}$
II	15 41 19,22 (20,3)	24 53,0
III	12 32 15,18 (17,1)	24 43,9

Da der Radius-Vektor diese 3 Winkel in fast gleichen Zeiten beschrieb, so ist hieraus ersichtlich, daß der Mond in seiner Bahn um die Erde mit recht ungleichförmiger Geschwindigkeit läuft. Bei I befand er sich 5 und 4 Tage vor der Erdferne (Apogäum Sept. 26 15^{h}), bei II war er am ersten der beiden Tage in der Erdnähe (Perigäum Sept. 26. 7^{h}) und bei III war er in beiden Kulminationen der Erdferne 3 Stunden näher, als bei I (Apogäum Okt. 10. 5^{h}). (Nr. 190.)

In dieser Weise könnte man nun zu allen aus den Beobachtungen erhaltenen Radien-Vektoren desselben Mondumlaufes die von ihnen eingeschlossenen Winkel finden, dann ebenso, wie in Nr. 186 und 187 zur Bestimmung der Jupiterbahn geschah, aus dreien derselben die Lage, Form und Größe einer Ellipse berechnen, und man

würde finden, daß die übrigen Radien-Vektoren sich ihr einfügen hinreichend genau, um sagen zu können, daß der Mond damals eine dieser Ellipse räumlich nahe kommende elliptische Bahn um die Erde beschrieb.*) Dies ganz so, wie in Nr. 187 durchzuführen, unterlassen wir, weil aus vorstehenden Ergebnissen ersichtlich ist, daß der Mond die Lage seiner Bahn fortwährend schnell ändert, die lange Rechnung also keine dauernd gültige Zahlenwerte liefern würde. Denn als im September 1872 der Mond die Ebene der Ekliptik aufsteigend passiert hatte, erreichte er nach $4\frac{2}{3}$ Tagen die Erdferne. Nach zwei Jahren war dieser Punkt so viel weiter herumgerückt, daß der andere Endpunkt der großen Achse der Bahn, die Erdnähe, weniger als eine Mond-Tagereise unter der Ebene der Ekliptik lag, und 4 Jahre später, nach doppelt so großer Zwischenzeit, hatte der Erdferne-Punkt den Raum unterhalb der Ekliptik ganz durchschritten und war so weit, wie zuerst, wieder über die Ekliptik getreten. Jedoch hatte in dieser Stellung der Erdferne-Punkt noch durchaus nicht einen ganzen Rundlauf am Himmel vollführt, weil, wie das Entgegenkommen der Knotenlinie ($6 \cdot 19^0 = 114^0$) zeigt, die Bahnebene inzwischen dort sich gehoben hatte. Wir sehen also aus der Ortsveränderung der beiden Scheitelpunkte der Bahn-Ellipse, daß die große Achse (die Apsidenlinie) sich um den in der Erde ruhenden Brennpunkt in der Richtung herumdreht, wie der Mond läuft. Eine über viele Jahre ausgedehnte Untersuchung läßt erkennen, daß dieser vorwärts gehende Rundlauf des Perigäums vollendet wird im Mittel bereits in 8,85 Jahren; so daß die große Achse sich durchschnittlich jährlich etwa 40^0 weit herumwendet, während eines Mondumlaufes ungefähr 3^0. In Nr. 187 fanden wir, daß Jupiters Perihel in demselben Sinne sehr langsam vorschreitet. (Vergl. dort die Länge des Perihels der Ellipsen A und B.)

Die Form der Bahn-Ellipse ist aus dem größten und dem kleinsten scheinbaren Mondradius (Nr. 152), $\varrho_1 = 986{,}57''$ und $\varrho_2 = 883{,}87''$, zu erhalten wie in Nr. 166. Man findet

die numerische Excentricität der Mondbahn $\varepsilon = 0{,}054907 = \frac{1}{18{,}21}$;

und um die Abweichung von der Kreisrundung zu erkennen, hat man wie in Nr. 168 zu berechnen

$$(a - b) : a = 0{,}001508 \ (0{,}00151).$$

---

*) Zur Veranschaulichung bewege man die Spitze eines Zeigefingers (Mond) in einer Ellipse um die geballte Faust der andern Hand (Erde). Man wird die Bahn auch noch eine Ellipse um die Faust nennen, wenn man diese Bewegung bei der Fahrt in einem Eisenbahnwagen ausführt, während doch der eigentliche Weg, den die Fingerspitze über dem Erdboden beschreibt, ein ganz anderer ist, nämlich eine wegen der schnellen Fahrt sehr ausgereckte krumme Linie. (Lauf des Mondes mit der Erde um die Sonne.)

Für $a = 1^m$ wird $a - b$ gezeichnet $1{,}5^{mm}$ und der Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkte, $e = \varepsilon a$, schon 55^{mm}. Die Form der Mondbahn weicht also sehr erheblich mehr von der Kreisrundung ab, als die Erdbahn (Nr. 168), noch etwas mehr, als die Bahn Jupiters (Nr. 187 am Ende), aber nicht so sehr, wie die des Mars (Nr. 200).

Die Größe der Ellipse wird bestimmt durch den schon in Nr. 152 berechneten mittleren Mond-Abstand. Es ist

die große Halbachse $a = 60{,}33419$ Erdradien ($60{,}3338\,r$).

Den Weg bei einem Umlaufe des Mondes um die Erde können wir uns wie einen Draht denken, welcher in der angegebenen Form elliptisch gekrümmt, aber an einer Stelle zersprungen ist, so daß dort das Ende, von einem Brennpunkte aus betrachtet, aus der ursprünglichen Ebene ein wenig rechts heraustritt, und zwar um eine Viertel-Vollmondsbreite ($\frac{1}{8}$ Grad, nach Nr. 210 am Ende). Diese Bruchstelle liegt, als aufsteigender Knoten, in der durch jenen Brennpunkt gehenden Ebene der Ekliptik, und gegen sie neigt sich die ursprüngliche Ringebene unter einem Winkel von 5,0 bis 5,3 Grad. Nun denken wir uns einen zweiten Draht von derselben Form. Seine Bruchstelle liegt aber etwas weiter zurück, so daß sein erster Bogen bis zum nächsten Scheitel etwa 3^0 größer ist, als beim ersten Drahte. Dadurch daß wir den länger gemachten Bogen an das Ende des ersten Drahtes in schwach veränderter Neigung ansetzen, kommt er oben über den entsprechenden Teil des ersten Drahtes hinweg und läuft, vom Brennpunkte angesehen, nun wieder rechts neben ihm in höchstens $\frac{1}{8}^0$ Abstand zur Ekliptik-Ebene, bleibt unter derselben beim Umbiegen nach außen, wegen des kürzeren Endes, innerhalb der ersten Windung und liefert rechts von seinem Anfange den neuen aufsteigenden Knoten. In dieser Weise setzen sich die elliptischen Bahnen des Mondes um die festgedachte Erde zu einem Gürtel-Systeme zusammen. Dies ist die Gestalt, welche wir vor dem Sternhimmel sehen würden, wenn der Mond im Raume eine sichtbare Spur zurückließe; dies ist die geometrische Darstellung der Ergebnisse der Beobachtungsberechnungen.

212. Geschwindigkeit des Mondes in seiner Bahn um die Erde. Nach den Formeln in Nr. 194 ist die mittlere Geschwindigkeit, an einem Scheitel der kleinen Achse,

$v = 1{,}0230^{km}$

die größte, in der Erdnähe, $v_1 = 1{,}0808$

und die kleinste, in der Erdferne, $v_2 = 0{,}9683$

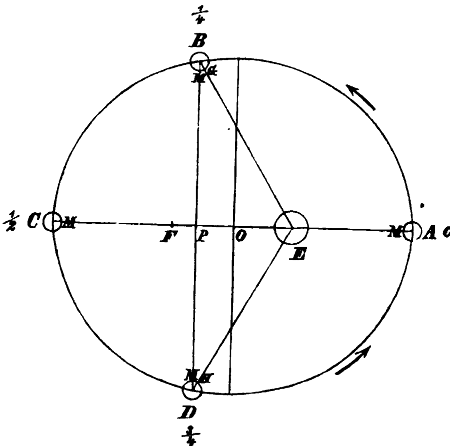
also nur etwa 1 Kilometer. (Vergl. Nr. 206 und 207.)

Vom Erdnähe-Punkte an gerechnet, kommt in $\frac{1}{4}$ der Umlaufs-

zeit der Mond schon hinter den Scheitel der kleinen Achse der Ellipse; er erreicht den andern noch nicht nach $\frac{3}{4}$ der Umlaufszeit.

213. Achsendrehung des Mondes. Bei jeder Wiederkehr der Mondphasen sieht man auf der Lichtgestalt mit freien Augen die Gegenden ungleicher Helligkeit immer in derselben Gestalt, und durch ein Fernrohr stets dieselben, jede Stelle kennzeichnenden Landschaften wieder. Der Mond kehrt uns also immer dieselbe Seite zu. Daraus folgt, daß die Mondkugel in derjenigen Zeit, in welcher sie um die Erde läuft, eine Achsendrehung vollführt. Um von der Richtigkeit dieser Behauptung sich zu überzeugen, führe man die eine flache Hand um die zur Faust geballte andere so herum, daß die innere Handfläche stets der Faust zugekehrt ist. Dann fühlt man, daß die flache Hand um ihre Achse sich dreht. Die Achsendrehung des Mondes geht links herum, wie die der Erde, der Sonne und der Planeten.

Vergleicht man Photographien des Mondes miteinander (Nr. 112), so bemerkt man, daß derjenige Punkt M, welcher bei der Aufnahme in der Erdnähe mitten auf dem Bilde ist, bei der in der Erdferne sich wieder in der Mitte befindet, auf den übrigen Bildern aber in Richtung der Ekliptik seitlich verschoben sich zeigt. Nimmt man den Erdnähe-Punkt als Anfang des Umlaufes, so ist jene Verschiebung am weitesten nach links, wenn der Mond der Zeit nach in $\frac{1}{4}$ des Umlaufes stand, und am weitesten nach rechts, wenn er nach $\frac{3}{4}$ des Umlaufes gekommen war.*) Hieraus folgt, daß der Mond gleichförmig um seine Achse sich dreht. Die Mond-Meridianebene jenes mittelsten Punktes M geht, erweitert, immer durch denjenigen Punkt P der großen Achse der Bahn-Ellipse [Figur 86**)], welchen die Sehne



Figur 86. Umdrehung und Umlauf des Mondes.

*) Die Aufnahmen zweier Standorte des Mondes müssen von denen der beiden anderen $^1/_2$ Jahr, $1^1/_2$ Jahr .... getrennt sein, damit jener Punkt von den Sonnenstrahlen getroffen werden konnte.

**) Diese Figur hat nicht die Gestalt der Mondbahn-Ellipse. Der Deutlichkeit wegen mußte die Excentricität zu groß gezeichnet werden.

BD, zwischen den Standorten in $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$ der Umlaufszeit, überschreitet. Die scheinbare Verschiebung (GM und HM), welche bei jenem Meridiane die stärkste von allen Mondmeridianen ist, heißt, weil sie in Richtung der Längen gesehen wird, die Schwankung (Libration) in Länge. Der Mond schwankt aber nicht; der Name ist nur nach dem Anblick gewählt, den wir von unserm Standorte im Brennpunkte aus erhalten müssen. Dies ermöglicht, je zwei solcher Photographien zu einem Stereoskopbilde zu vereinigen. (Nr. 112.)

Nun vergleichen wir eine Photographie, die angefertigt wurde, als der Mond in der Ekliptik (in einem der Knoten seiner Bahn) stand, mit der von einem Standorte, der weit über oder unter der Ekliptik war. Diejenigen Punkte des ersten Bildes, welche fast in Richtung der Ekliptik in geraden Linien nebeneinander liegen, sieht man auf dem andern in Bogen aneinander gereiht. Befand sich der Mond nördlich von der Ekliptik, so krümmen sich die Bogen wie die Punktreihen in Figur 67, b (in Nr. 162), und war er unterhalb der Ekliptik, so wie in Figur 67, a. Dies ist derselbe Anblick, wie der der Parallelkreise der Erde in Figur 68 (zu Nr. 165) von S aus gesehen nach E_3 und E_1. Deshalb heißt diese scheinbare Verschiebung der Mondoberfläche die Schwankung in Breite. Auch sie ist keine wirkliche, sondern sie folgt aus der Blickrichtung von unten hinauf oder von oben hinunter. Bei zwei Bildern, die den Mond in den beiden Knoten seiner Bahn darstellen, passen die als Sehnen erscheinenden Parallelkreise dann aufeinander, wenn der Durchschnitt der Ekliptik auf dem einen um 3° gegen den auf dem andern Bilde gedreht wird. Legt man ebenso das dem Monde im aufsteigenden Knoten entsprechende Bild E_2, wie es in Figur 68 von S aus gesehen wird [man zeichne es mit dem Ekliptik-Durchmesser], mit den zu parallelen Sehnen gewordenen Breitenkreisen auf die von E_0, so wird der Winkel zwischen den beiden Lagen der Ekliptik vom Äquatordurchschnitt halbiert. Deshalb ist auch auf den beiden Mondbildern der Winkel zwischen dem Mond-Äquator und der Ekliptik die Hälfte von jenen 3 Grad, oder die Mond-Achse (welche in der Ebene dieser Bilder sich befinden muß) bildet mit der durch den Mondmittelpunkt gehenden Ekliptik-Normale einen Winkel von $1\frac{1}{2}$ Grad. Es steht das Bild des Mondes im niedersteigenden Knoten gegen die Ekliptik schief in der Richtung, wie die Figur der Erde in E_0. Die Achse des Mondes liegt also überall in einer Ebene, die auf der herumwandernden Knotenlinie rechtwinklig bleibt, und bildet mit der durch den Mondmittelpunkt senkrecht zur Ebene der Ekliptik gezogenen Geraden einen Winkel von $1\frac{1}{2}$ Grad, und zwar stets auf der Seite des Lotes, auf welcher der spitze Winkel die Neigung der Mondbahnebene gegen das Ekliptik-Lot angiebt.

214. Bahn des Mondes um die Sonne. In seiner Bewegung um die Erde hat der Mond eine Geschwindigkeit m, die nur

etwa 1 Kilometer beträgt. (Nr. 212.) Die Erde, die mit einer Geschwindigkeit e von 29 bis 30 Kilometer um die Sonne läuft (Nr. 206), hat den Mond als Begleiter. Folglich ist die Geschwindigkeit v des Mondes in seiner Bahn um die Sonne am größten $v_1 = e + m$, wenn er (von der Sonne aus betrachtet) jenseits der Erde läuft, zur Zeit des Vollmondes, und diesseits vermindert sie sich dort, wo wir ihn Neumond nennen, zum kleinsten Werte $v_2 = e - m$.*) Es hat also v die Grenzen 31 und 28 Kilometer. Mithin schreitet der Begleiter der Erde, für einen Beobachter auf der Sonne, immer vorwärts mit einer Bewegung, die nur wenig von der der Erde abweicht. Deshalb ist die Bahn des Mondes um die Sonne viel mehr gestreckt, als die, welche der äußerste Jupitermond um die Sonne beschreibt, und hat völlig andere Gestalt, als die Kurven, welche aus dem schnellen Rundlaufe der beiden innersten Jupitermonde hervorgehen, da hierbei innerhalb der Jupiterbahn Schleifen entstehen. (Nr. 207.)

Um eine Windung der Bahn des Mondes um die Sonne, der Wirklichkeit entsprechend, darzustellen, wurde für März 1876 aus Rektascension und Deklination des Mondes seine Länge und Breite für die vier Haupt-Phasen und für je zwei Zwischenstellungen berechnet. (Tabelle I.) Der Ort der Erde wird durch die Länge der Sonne angegeben, und daraus geht auch der zugehörige Radius-Vektor der Erdbahn hervor. (Nr. 167.) Jener Monat wurde ausgewählt, weil bei diesem Umlaufe um die Erde der Mond außerhalb und innerhalb der Erdbahn sehr nahe gleich lange sich bewegte. In demselben Jahre traten auch die größten Verschiedenheiten auf, nämlich

vom ersten zum letzten Viertel $15{,}9^d$, und $13{,}5^d$ vom letzten zum ersten sowie
vom „ „ „ „ $13{,}6^d$, und $16{,}1^d$ „ „ „ „

und so wurden, um auch von den stärksten Abweichungen der beiden Teile einer Windung ein Bild zu geben, die Tabellen II und III hinzugefügt.

Für das Zeichnen der Figuren 87 I, II und III wurde die Längeneinheit, Erdradius r, als $0{,}015^{mm}$, also der mittlere Abstand der Erde von der Sonne, a, als 35 Centimeter genommen. Dies giebt für die größte Entfernung des Mondes von der Erde $0{,}955^{mm}$ und für die kleinste $0{,}855^{mm}$. (Nr. 152.) Der Mittelpunkt der Sonne, die hier als eine Kugel von $3\frac{1}{4}^{mm}$ Durchmesser zu denken ist (Nr. 203), kommt in der Richtung AH von A aus für Figur 87 I $34{,}87^{cm}$ weit, für Figur 87 II $35{,}57^{cm}$ und für Figur 87 III $34{,}43^{cm}$. Der punktierte Bogen EEE′ ist ein Zwölftel der Erd-

*) Note zu Nr. 211.

I. Lauf des Mondes im März 1876. (Figur 87 I.)

Nr.	1. Zeitangabe (mittlerer Berliner Zeit) 1876 März	2. Mondphase, Erdnähe und Erdferne	3. Länge des Mondes l	4. Länge der Sonne λ	5. l + 360° — λ zuletzt l — λ	6. Radius-Vektor der Erdbahn (in Erdradien r)	7. Breite des Mondes b
1	2. 22h 41,1m	erstes Viertel	73° 12′ 23,7″	343° 12′ 33,5″	90°	23 153 r	+ 5° 3′ 47,3″
2	5. 0h	3h vor der Erdnähe	102 30 20,3	345 15 57,2	117,2°	23 165 r	+ 5° 7 18,0
3	7. 0h		131 4 0,5	347 15 54,0	143,8°	23 177 r	+ 3 55 4,6
4	9. 19h 5,7m	Vollmond	170 3 9,1	350 3 19,8	180°	23 195 r	+ 0 48 55,4
5	12. 0h		199 18 3,4	352 15 10,4	207,0°	23 209 r	— 1 50 9,5
6	15. 0h		236 46 17,5	355 14 21,6	241,5°	23 228 r	— 4 28 19,2
7	17. 13h 53,25m	Mitte der Zwischenzeit		357° 48′ 10,2″		23 245,6 r	
8	17. 14h 18,0m	letztes Viertel 1h nach der Erdferne	267° 49′ 7,2″	357 49 11,5	270°	23 245,7 r	— 5° 17′ 0,5″
9	20. 0h		296° 33′ 55,1″	0° 12′ 25,2″	296,4°	23 262 r	— 4° 41′ 22,3″
10	23. 0h		333 58 4,4	3 10 53,9	330,8°	23 282 r	— 2 14 44,5
11	25. 9h 5,1m	Neumond	5 32 1,4	5 32 12,2	0°	23 298 r	+ 0 35 45,3
12	28. 0h		42 7 23,3	8 7 42,8	34,0°	23 316 r	+ 3 36 25,0
13	30. 0h	1h nach der Erdnähe	70 42 19,1	10 6 11,3	60,6°	23 329 r	+ 5 0 18,6
14	32. 5h 5,4m	erstes Viertel	102 17 2,8	12 17 2,7	90°	23 343 r	+ 5 7 29,5

II. im Juni 1876. (Figur 87 II.)

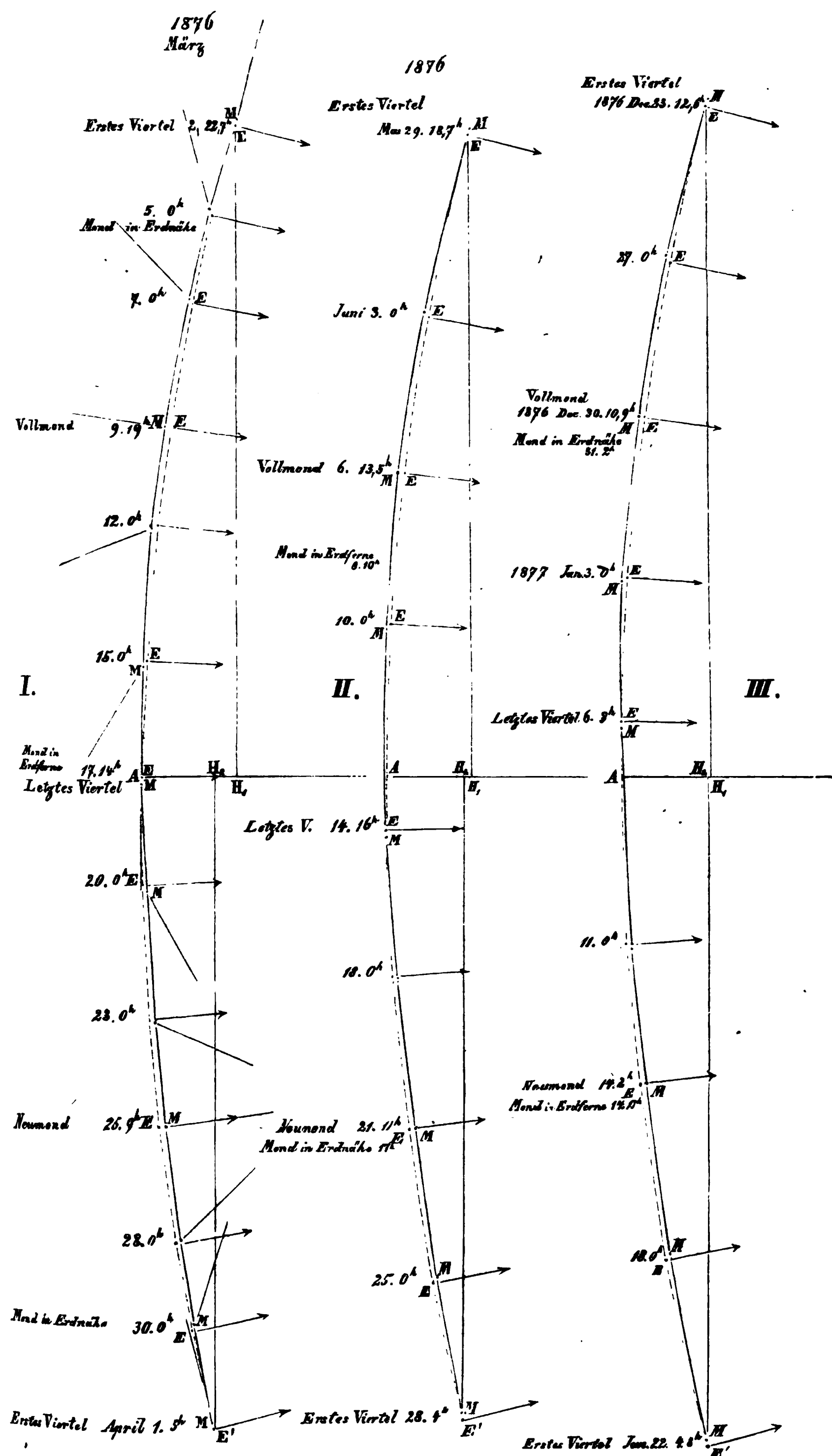
Nr.	1. Zeitangabe 1876	2. Mondphase	3. Länge der Sonne	4. Radius-Vektor der Erdbahn
1	Mai 29. 18h 42,0m	erstes Viertel	69° 6′ 29,2″	23 671 r
2	Juni 6. 13 30,7	Vollmond	76 33 20,9	23 695 r
3	13. 11 24,75	Mitte der Zeit	83 9 29,2	23 713 r
4	14. 16 8,1	letztes Viertel	84 18 2,1	23 715 r
5	21. 11 10,4	Neumond 6h vor der Erdnähe	90 47 1,5	23 726 r
6	28. 4 7,5	erstes Viertel	97 10 46,6	23 731 r

III. im Januar 1877. (Figur 87 III.)

Nr.	1. Zeitangabe	2. Mondphase	3. Länge der Sonne	4. Radius-Vektor der Erdbahn
1	1876 Dez. 23. 12h 35,1m	erstes Viertel	272° 34′ 19,8″	22 952 r
2	30. 10 52,4	Vollmond	279 37 57,9	22 947 r
3	1877 Jan. 6. 3 10,7	letztes Viertel	286 27 13,4	22 950 r
4	7. 8 40,9	Mitte der Zeit	287 42 24,1	22 951 r
5	14. 2 21,5	Neumond 13h vor der Erdferne	294 34 19,4	22 960 r
6	22. 4 46,7	erstes Viertel	302 49 7,0	22 976 r

bahn;*) der nur durch die Standorte M des Mondes unterbrochene Kurvenbogen zeigt die Gestalt einer Windung der Bahn des Mondes um die Sonne. Die 1 cm lang gezeichneten Enden der Radien-Vektoren der Erdbahn sind als Pfeile markiert, zum Hinweis auf die Sonne. Die Richtungen Erde-Mond (Spalte 5 der Tabelle I) wurden in Figur 87 I bis $1\frac{1}{2}$ cm verlängert. Verfolgt man der Reihe nach die Stellungen dieser Geraden und des Pfeiles, so erkennt man, daß sie dem stündlichen Fortschreiten des Minuten- und des Stundenzeigers einer auf dem Erdbahnbogen fortgeschobenen Taschenuhr entsprechen, die man von der Rückseite ansieht. Dadurch tritt aus dem gemeinsamen Dahinfliegen um die Sonne das Umlaufen des Mondes um die Erde hervor, und man sieht, daß ein synodischer Umlauf (zwischen zwei aufeinander folgenden ersten Vierteln) mehr ist, als ein wahrer Umlauf von 360°. — Spalte 7 der Tabelle I sagt, daß der Mond gleich nach dem Anfange des

*) Um die Biegung genau zu zeichnen, wurden die hinter den Höhen HE liegenden Strecken der Radien-Vektoren berechnet.



Figur 87. Drei Zwölftel von der Bahn des Mondes um die Sonne.

gezeichneten Laufes am weitesten nördlich von der Ebene der Erdbahn sich bewegte. Diese Größe der Breite fordert, daß wir beim Anfang den Mond weniger, als ein Zehntel-Millimeter ($0{,}076^{mm}$) über der gezeichneten Kurve hinschreiten denken. Als Vollmond geht er durch die Ebene der Zeichnung, er kommt bei A im letzten Viertel am tiefsten $0{,}088^{mm}$ unter die Fläche, d. h. er dringt nur so eben durch das Blatt Druckpapier hindurch,*) tritt als Neumond wieder daraus hervor und erhebt sich zuletzt zu der Anfangshöhe. Die Kleinheit dieser Senkung und Hebung kann also das Bild des wahren Mondlaufes in der Darstellung nicht ändern. Der Weg des Mondes ist eine fast platt gedrückte Schraubenwindung. Fügt man die drei Figuren ein in die den Monaten entsprechenden Stellen des Umfangs eines die Erdbahn darstellenden Kreises von 35^{cm} Radius,**) und denkt die zwischenliegenden Plätze ausgefüllt mit Windungen, bei denen die beiden Teile sich weniger voneinander unterscheiden, wie die in Figur 87 II und III, wo die Kreuzung der Mond- und Erdbahn ungewöhnlich weit hinter oder vor der Mitte A liegt, so hat man eine Vorstellung von der Bahn des Mondes um die Sonne.

Als Ergebnisse sind folgende Sätze hinzustellen:

1) Die Bahn des Mondes um die Sonne ist eine sehr platt gedrückte Schraubenlinie, welche um die nahe kreisrunde Erdbahn jährlich 12,37 mal sich rechts herum***) windet. (Nr. 209 Anm.) Nach Ablauf eines Jahres trifft das Ende nicht den Anfang. Die neuen Windungen gehen zwischen den alten hindurch [wenn der Ort der Sonne im Raume fest gedacht wird].

2) Die Windungen sind ungleich lang: etwas kürzer, wenn die Erde mit dem Monde in der Sonnenferne langsam geht, und länger, wenn beide zusammen in der Sonnennähe schneller laufen. (Die ganze Strecke MAE' ist in Figur 87 II kürzer, als in Figur 87 III.)

3) Es wird die zu einer Windung gehörige Aus- und Einbiegung am meisten ungleich, wenn Vollmond und Neumond in Erdnähe oder Erdferne kommen; weil dann die größte Geschwindigkeit im Umlaufe um die Erde den Mond am schnellsten wieder auf die andere Seite der Erdbahn bringt.

4) Die Bahn des Mondes um die Sonne ist, von der Sonne aus gesehen, überall konkav.†)

---

*) Mißt man am zusammengedrückten Schnitte eines gebundenen Buches die Dicke von 100 Blättern (200 Seiten), so findet man, daß ein Blatt Druckpapier 0,07 oder $0{,}08^{mm}$ dick ist.

**) In Nr. 168 wurde bewiesen, daß bei solcher Kleinheit der Figur die Erdbahn-Ellipse von einem Kreise nicht zu unterscheiden ist.

***) Das heißt: in dem Sinne, wie die Spitze eines Korkziehers beim Einbohren sich bewegt.

†) Vergl. Martus, mathematische Aufgaben, Nr. 1416.

215. Mondfinsternis. In Tabelle I zu Nr. 214 zeigt Zeile 4 in Spalte 7, daß zur Zeit des Vollmonds die Breite des Mondmittelpunktes gering war. Es trat damals eine kleine Mondfinsternis ein. Wir wollen die Größe der Verfinsterung berechnen.

Es sei vom Erdmittelpunkte E an, der Abstand des Sonnenmittelpunktes S s, der des Mondmittelpunktes M m, und a der der Spitze A des Kernschattens der Erde, welcher durch die äußeren gemeinsamen Tangenten der Sonnen- und Erdkugel bestimmt wird. Da der Sonnenradius n Erdradien beträgt (n = 108,7 nach Nr. 203), so hat man aus einer Proportion $a = \frac{s}{n-1}$ und findet für den 9. März 1876 a = 215,37 Erdradien r. Aus dem damaligen scheinbaren Halbmesser des Mondes $\varrho = 15'50''$ und dem wahren Mondradius kr, wo nach Nr. 153 k = 0,2727349 (0,27273) ist, ergiebt sich

$$m = \frac{k}{\varrho \sin 1''} r = 59{,}216\, r.$$

Die Achse jenes Schattenkegels ist also über $3\frac{1}{2}$mal so lang, als der Abstand des Mondes. Der Winkel, welchen eine Seitenlinie mit der Achse des Kegels bildet, war

$$\alpha = \frac{r}{a \sin 1''} = 15'57{,}7''.$$

Die durch den Mondmittelpunkt rechtwinklig zur Achse gelegte Ebene liefert im Schattenkegel einen Querschnitt vom Radius q. Denkt man nun um E mit m von der Achse an einen Bogen beschrieben bis zum Kegelmantel, so wird die Länge dieses Bogens nicht merklich abweichen von q, und noch weniger der ebenso um A mit a — m zu beschreibende Bogen. Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke erhält man den Winkel σ, unter welchem der Halbmesser des Schattenkreises q von E aus erscheint,

$$\sigma = \frac{a}{m}\alpha - \alpha = 42'5{,}5''.$$

Man zeichne diesen Kreis, indem man jede Bogenminute durch ein Millimeter darstellt. Sein Querdurchmesser liegt in der Ebene der Erdbahn. Senkrecht auf ihm errichte man im Mittelpunkte Q das Lot QM, dessen Größe durch die Breite b des Mondmittelpunktes M angegeben wird (Spalte 7, Zeile 4). Da der Mond zum niedersteigenden Knoten sich bewegte, hat man in M an MQ links einen Winkel $90^\circ - i$ anzutragen, um den Weg des Mondmittelpunktes in der Figur zu haben. Dabei kann der Neigungswinkel der Mondbahn $i = 5^\circ 10'$ genommen werden. Der um M mit ϱ zu beschreibende Kreis wird an seinem unteren Teile vom

Kreise Q bedeckt und dieses Stück giebt die Verfinsterung im Augenblicke des Vollmonds an. Das dunkele Zweieck wird noch sehr wenig breiter, wenn der Mondmittelpunkt zum Fußpunkte F des von Q auf die Mondbahn gefällten Lotes gelangt. Der um F mit ϱ beschriebene Mondkreis zeigt den Anblick während der Mitte der partiellen Verfinsterung. Wie breit zu dieser Zeit der größten Verdunkelung der Rest der Mondscheibe war, welcher hell blieb, findet man, wenn QF bis zur oberen Grenze G des Kreises verlängert wird,

$$x = b \cos i + \varrho - \sigma = 1348''$$

also 0,71 des Monddurchmessers. Demnach war die Verfinsterung vom 10. März 1876 eine von 3 Zehnteln des Monddurchmessers.

Anmerkung. Es entsteht eine totale Mondfinsternis, wenn die Ekliptik-Breite des Vollmondes, absolut genommen, kleiner ist, als $\frac{\sigma - \varrho}{\cos i}$. Ist sie größer, als $\frac{\sigma + \varrho}{\cos i}$, so kommt nicht einmal eine partielle Verfinsterung zu stande. In dem behandelten Falle, in welchem der Mond der Erde etwas näher war, als in mittlerer Entfernung (Nr. 152), mußte die Breite kleiner sein, als $0^\circ 58' 10''$, und wäre sie schon geringer gewesen, als $0^\circ 26' 22''$, so würde die Verfinsterung eine totale geworden sein.

216. Der total verfinsterte Mond, sichtbar in kupferrotem Licht. Mißt man mit einem Sextanten die Breite der kleinsten hell bleibenden Mondsichel bei mehreren partiellen Finsternissen, so findet man sie um 2 bis 4 Hundertstel des Monddurchmessers (etwa eine Bogenminute) kleiner als die berechnete Größe x. Dies rührt offenbar daher, daß die Sonnenstrahlen, welche fast als Tangenten an der Erde vorbeigehen wollten, in der Atmosphäre gebrochen werden, nun, abgelenkt, in den geometrischen Schattenkegel hineingeraten und also nicht jene Randgegend erleuchten können.

Der Strahl vom höchsten Punkte der auf- oder untergehenden Sonne kommt zur Erdoberfläche abgelenkt um etwa $34' 50''$. (In der Höhe 0° würde die Refraktion $34' 54''$ betragen, nach Nr. 49.) Er streicht noch über den Erdboden hin, läuft, der eben erhaltenen Krümmung symmetrisch, weiter durch die Luft und verläßt die Atmosphäre der Erde mit einer Gesamt-Ablenkung von zweimal $34' 50''$, bildet also mit der Tangente, welche zur Spitze A des geometrischen Schattenkegels geht, einen Winkel $\delta = 1^\circ 9' 40''$. Alle diese Strahlen, rings um die Erde, umhüllen den wahren Kernschatten der Erde, dessen Achse a_1 kleiner ist, als

$$\frac{r}{\sin(\alpha + \delta)} = 40{,}15\,r$$

also nur 40 Erdradien beträgt. Dies ist weniger als der fünfte Teil der Länge des geometrischen Schattens und nur zwei Drittel des Mondabstandes.

Diese Strahlen, welche uns die Morgen- und Abendröte geben, sind besonders in der heißen Zone der Erde sehr lebhaft rot, orangefarben und gelb. Sie durchsetzen, mit den in höheren Luftschichten weniger stark abgelenkten, den Kegelraum vor dem Monde und kreuzen sich bei der Achse. Ist der Mond fast ganz in den Kernschatten getreten, so zeigt sich schon überall Rot, nur nach der Seite der noch hellen Sichel bemerkt man ein Graublau. Schreitet er darauf nahe bei der Kegelachse hin, so kommt er in das Gemisch der stärker gefärbten Strahlen und wirft es uns kupferrot zurück. Die Stärke des rötlichen Schimmers ist davon abhängig, ob an den Randgegenden rings um die Erde bei vielen Orten heiteres oder trübes Wetter herrscht. — Richtet man ein Spektroskop auf die kupferrote Vollmondscheibe, so zeigt sich in der Zerlegung der Mischfarbe ein breiter dunkler Absorptionsstreifen im Gelb. Dort ist diejenige Stelle des Sonnenspektrums, an welcher eine starke Bande (δ) um so breiter wird, je näher die Sonne dem Horizonte kommt, die also dadurch entsteht, daß die Erdatmosphäre Lichtstrahlen dieser Art auslöscht und zwar um so besser, je mehr Luft (bei flach hinstreichenden Strahlen) dabei thätig gewesen ist. Das Spektroskop beweist demnach, daß jenes kupferrote Licht des Mondes von Sonnenstrahlen herrührt, welche durch eine dicke Schicht der Erdatmosphäre gegangen waren.*)

217. Sonnenfinsternis. Bei dem auf die kleine Mondfinsternis folgenden Neumonde (Tabelle I, Zeile 11) war die Breite noch kleiner, als beim Vollmonde. Es mußte also, da sie positiv war, für einen Teil der nördlichen Erdhalbkugel der Mond vor die Sonne treten und dort eine Sonnenfinsternis geben. Während eine Mondfinsternis zu sehen ist auf der ganzen Erdhälfte, die zu der Zeit Nacht hat, wird eine Sonnenfinsternis sichtbar nur an einem

---

*) Das Spektroskop lieferte auch einen dritten Beweis dafür, daß der Mond *keine irgend merkliche Atmosphäre* besitzt; weil das Spektrum eines Fixsterns in dem Augenblicke, in welchem der Mondrand vor den Stern tritt, verschwindet, ohne vorher durch Auslöschen von Farben im mindesten verändert worden zu sein. Der zweite Beweis war, daß, wenn der Mond eine Atmosphäre, wie die Erde, hätte, eine kurze Zeit lang nach dem Eintritt einer Sternbedeckung das seine Luft durchstreichende Sternlicht durch Brechung noch zu uns kommen müßte, farbig und abgeschwächt. Im Fernrohr sieht man aber beim Anrücken des Mondrandes den Stern in ungetrübtem Glanze plötzlich verschwinden, und die Dauer der Sternbedeckung wird am Anfang und Ende gar nicht verkürzt. Auf das Fehlen von Luft und Wasser auf dem Monde hatte man zuerst daraus geschlossen, weil man in den Mondlandschaften niemals Dämmerungserscheinungen und Wolkentrübungen wahrnimmt.

Teile der Tageshälfte der Erde. Wir wollen uns eine Vorstellung davon verschaffen, auf welchem Gebiete jene Sonnenfinsternis gesehen werden konnte.

Als am 25. März 1876 die Länge des Mondes, der der Sonne gleich wurde, war (nach der Bezeichnung wie in Nr. 215) der Winkel MES der Centriwinkel zur Breite b des Mondes. Ferner haben wir nach Tabelle I, Spalte 6 ES $= s = 23298\,r$ und aus dem scheinbaren Halbmesser des Mondes, $\varrho = 15' 50{,}7''$, die Seite EM $m = 59{,}173\,r$. Es ist aber aus den zu Figur 87 I in Nr. 214 gemachten Angaben in Betreff der Erhebung des Punktes M über ES klar ersichtlich, daß der Winkel EMS fast 180° beträgt, und deshalb können wir (wie in Nr. 215) den Winkel ESM $= \sigma$ dadurch finden,*) daß wir die innerhalb dieses sehr schmalen Dreiecks liegenden Bogen, mit den Mittelpunkten S und E und den Radien $s - m$ und m, als nicht angebbar verschieden nehmen, $(s - m)\sigma = mb$, woraus

$$\sigma = \frac{m}{s - m} b = 5{,}4625''.$$

Nun zeichne man zur weiteren Betrachtung eine Figur, welche selbstverständlich nicht der Wirklichkeit ähnlich werden kann. Dabei werde der die Erde darstellende Kreis im Vergleich zum Mond- und Sonnenkreis zu groß gemacht. Die Verlängerung der Linie SM treffe die Erdoberfläche im Orte O. Der Winkel OES $= \beta$ geht hervor aus

$$\sin(\beta + \sigma) = \frac{s}{r} \sigma \sin 1'' \qquad \beta = +38^0 5' 46{,}8'' (46{,}7'').$$

Durch β ist die Lage des Ortes O auf der Erdkugel bestimmt.**) Man sieht in Figur 68 zu Nr. 165 die Stellung, welche die Erde mit schräger Achse am 21. März hat. Auf dieser Darstellung der Erdkugel denke man vor ihrem Mittelpunkte den Ort O in $\beta = 38^0$ Höhe über die Ebene der Erdbahn, und verfolge nun den Mond, wie er vor der Erde von links nach rechts schwach ansteigend über O hin vorüberzog; dann erkennt man, daß die Verlängerung der Centrale

---

*) Die logarithmische Rechnung nach dem Tangentensatze wird bei einem so gestalteten Dreiecke ganz unbrauchbar.

**) Von E aus gesehen, hat der Punkt O die Ekliptik-Breite β (b ist ein Teil von ihr) und dieselbe Länge, wie die Sonne $\lambda = 5^0 32' 12{,}2''$. Nun zeigt Figur 84 (in Nr. 201, 7), daß, wenn man für den Ort O aus dieser Länge FMH $= \lambda$ und der Breite OH $= \beta$ Rektascension und Deklination berechnet (was wie die umgekehrte Aufgabe in Nr. 94 ausgeführt wird), die erhaltene Deklination die geographische Breite OC $= \varphi$ bedeutet und die Rektascension FQC $= l$ ein Bogen des Erdäquators ist, von welchem der Anfangspunkt F $l_0 = 3^0 37' 23''$ westliche Länge von Berlin hatte, weil im Augenblicke des Neumonds $0^h 14^m 29{,}53^s$ Sternzeit in der Berliner Sternwarte war; so daß also der Ort O in $l - l_0$ Grad östlicher Länge von Berlin auf der geographischen Breite φ liegt.

Sonne-Mond auf der Erdoberfläche einen Strich machte, der von Südwest nach Nordost über die nördliche Halbkugel ging mit wenig über 1^{km} Geschwindigkeit. (Nr. 212.) Die überstrichenen Orte waren es, an welchen die centrale Sonnenfinsternis zu sehen war. Für die einzelnen Orte kam der Vorübergang auf die verschiedensten Tagesstunden. Von allen zuerst sah ihn der westlichste Punkt; der Mond stand vor der aufgehenden Sonne. Im Orte O war es gegen Mittag, als für diese Stelle der Erdoberfläche der Mittelpunkt des Mondes den der Sonne bedeckte; und, wo in Ost die Linie SM die Erde verließ, war es Abend. Als die Centrale SM den Punkt O traf um $9^h\,5{,}1^m$ mittlerer Berliner Zeit (Tabelle I, Zeile 11), befand sich Berlin (Sonnenuntergang am 25. März $6^h\,21^m$) schon $2\frac{3}{4}$ Stunden lang auf der Nachtseite der Erde. Der Zug der Verfinsterung strich also über den großen Ocean und Nordamerika.

Im Orte O war wegen des geringeren Abstandes $OM = m'$ der scheinbare Halbmesser des Mondes etwas größer, als ϱ für den Erdmittelpunkt E, nämlich

$$\varrho' = \frac{m}{m'}\varrho = \frac{\sin(\beta + \sigma)}{\sin(\beta - b)}\varrho = 16'\,3{,}6''.$$

Der scheinbare Halbmesser der Sonne war $\varrho_1 = 16'\,2{,}9''$. Mithin bedeckte für O der Mond die Sonne vollständig, überragte jedoch nur mit 0,7″. Die beiden Orte aber in West und Ost, welche die centrale Verfinsterung zuerst und zuletzt sahen, hatten den Abstand m vom Monde, wie E; dort also erschien der Mondhalbmesser nur $\varrho = 15'\,50{,}7''$ groß, er ließ mithin vom Sonnenrande ringsherum $\varrho_1 - \varrho = 12{,}2''$ ($\frac{1}{80}$ des Sonnenhalbmessers) frei, und deshalb sah man an den fernen Erdorten in dem Augenblicke, in welchem dort der Mondmittelpunkt vor dem Sonnenmittelpunkte war, das Schauspiel einer ringförmigen Sonnenfinsternis. Der prachtvolle Anblick des strahlenden Ringes um den schwarzen Mond wird dem Beobachter durch das östliche Fortrücken des Mondes nach wenigen Sekunden zerstört. Der Lichtring mußte um so feiner ausfallen, je näher die Beobachtungsorte dem Monde waren. Nachbarpunkte zu beiden Seiten von O, für welche ϱ' genau gleich ϱ_1 wurde, waren die Stellen der Erdoberfläche, welche der Scheitelpunkt des Kernschattens des Mondes traf. Bei O selbst schnitt der Erdboden die äußerste Spitze des Kernschattens ab, und darum wurde hier die Sonnenfinsternis eine totale. Die kurze Dauer derselben wird dadurch ein wenig vergrößert, daß die Achsendrehung der Erde den Beobachtungsort nach derselben Himmelsgegend, nach welcher der Mondschatten läuft (nach Ost), fortbewegt, ihn also, je nach der Größe dieser Geschwindigkeit, länger im Schatten sein läßt. (Nr. 156.)

In der Figur werde nun vom oberen Rande der Sonne nach dem unteren des Mondes die gemeinsame Tangente gezogen bis zur

Erde, welche sie in O_1 trifft, ferner von E aus die obere Tangente zur Sonne und die untere zum Monde. Dadurch ist ein Dreieck M_1ES_1 entstanden, in welchen der Winkel $M_1ES_1 = b - \varrho - \varrho_1$ ist. Daher findet man, wie vorher, den Winkel bei S_1

$$\sigma_1 = \frac{m}{s - m} (b - \varrho - \varrho_1) = 0{,}5900''$$

und die Ekliptik-Breite des Ortes O_1

aus $\sin(\beta_1 - \varrho_1 + \sigma_1) = \frac{s}{r} \sigma_1 \sin 1'' \qquad \beta_1 = + 4^0 5' 17{,}8''$.

Der hierdurch gefundene Ort O_1, nur 4^0 über der Erdbahn-Ebene, (s. Figur 68 in Nr. 165) schließt den südlichen Teil der Erdoberfläche ab, wo von der Sonnenfinsternis nichts gesehen werden konnte. In dem durch $\beta - \beta_1$ bestimmten Streifen, der also 34^0 Querausdehnung hatte, war die Finsternis eine partielle, in welcher den Orten der obere Teil der Sonne um so mehr durch den Mond verdeckt wurde, je näher sie den Central-Strich nördlich hatten.

Endlich ist noch in der Durchschnittsfigur die zweite innere gemeinsame Tangente zwischen Sonne und Mond bis zur Erde zu ziehen (dort O_2) und von E aus die beiden anderen Tangenten. Dann kommt ebenso

$$\sigma_2 = \frac{m}{s - m} (b + \varrho + \varrho_1) = 10{,}335''$$

und $\sin(\beta_2 + \varrho_1 + \sigma_2) = \frac{s}{r} \sigma_2 \sin 1''$.

Die Rechnung sagt, daß bei dieser Sonnenfinsternis die Tangente S_2M_2 über die Erde hinwegging. Deshalb hatten alle Orte nördlich von O eine partielle Sonnenfinsternis, bei welcher sie den oberen Teil der Sonne umsomehr frei behielten, je weiter nach Nord sie vom Central-Strich entfernt waren.

218. Über die Wiederkehr der Verfinsterungen. In Spalte 7 der Tabelle I zu Nr. 214 ist aus der Veränderung der Breite zu ersehen, daß die Knotenlinie der Bahn des Mondes um die Erde die Richtung der Mittellinie AH in Figur 87 I hatte und daß die obere Hälfte der Bahn-Ellipse mit dem oberen Teile der Figur den Neigungswinkel i bildete. Im folgenden Monate konnten also nicht wieder Finsternisse zu stande kommen; es mußte der nächste Vollmond (April 8) unter dem Erdschatten fortgehen, und der nächste Neumond (am Vormittage des 24. April) über der Sonne am Himmel hinschweben. Erst ein halbes Jahr nach dem März, im September, hatte das andere Ende der Knotenlinie die Richtung zur Sonne, und so traten am 3. Sept. eine Mondfinsternis und

am 17. Sept. eine Sonnenfinsternis als die nächstmöglichen ein. Dann kamen 1877 Febr. 27 eine totale Mondfinsternis und März 14 eine partielle Sonnenfinsternis. Das Datum mußte gegen 1876 sich verfrühen, weil die Knotenlinie im Sinne des Uhrzeigerlaufes sich um 19° in einem Jahre dreht. (Nr. 210.) Diesen beiden entsprachen im Jahre 1878 Febr. 1 eine Sonnen- und Febr. 17 eine Mondfinsternis. Gewöhnlich treffen jährlich 4 Verfinsterungen ein, 2 Sonnen- und 2 Mondfinsternisse (aber nicht für einen gegebenen Beobachtungsort); doch können es, wenn um eine lange dauernde Mondfinsternis 2 kleine Sonnenfinsternisse am Anfang und Ende desselben Mondumlaufes liegen, auch 5 oder 6 werden, oder es sind, wenn gar keine Mondfinsternis zu stande kommt, nur 2 Verfinsterungen in einem Jahre.

Bei der vielfach veränderlichen Bewegung des Mondes findet eine regelmäßige Wiederkehr der Finsternisse nach Ablauf eines bestimmten Zeitraums nicht statt. Die schon in uralter Zeit den Chaldäern bekannte Regel, daß nach 223 synodischen Monaten die Finsternisse in ähnlicher Ordnung wieder zu erwarten sind, kann nur zu vorläufiger Beurteilung der Möglichkeit des Eintretens dienen. Denn 223 mittlere synodische Umläufe haben $6585\frac{1}{3}$ Tage, das sind 18 Jahre und nur 11 oder 10 Tage, bei 4 oder 5 Schalttagen in den 18 Jahren; die Knotenlinie kommt aber erst nach etwa 18,6 Jahren wieder in die Anfangsrichtung (Anmerkung zu Nr. 210), sie ist also dann der alten Lage erst nahe. Deshalb können von den dagewesenen (durchschnittlich) 70 Finsternissen, 41 an der Sonne und nur (etwa) 29 am Monde, manche kleine Verfinsterungen ausfallen und an anderen Stellen partielle Finsternisse nun eintreten.

IV. Kapitel.

Das Erdsphäroid.

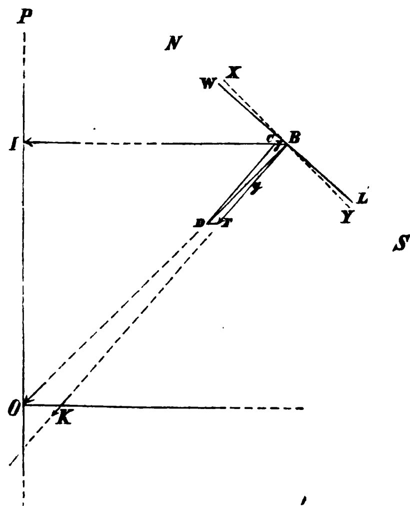
§ 25. Allgemeine Entwicklung für die Länge der Halbachsen aus Breitengradmessungen.

219. Änderung der Erdgestalt durch die Umdrehung.*) Wenn keine Störung vorhanden wäre, würde die Schwerkraft einer kugelförmigen Erde jedes Teilchen an ihrer Oberfläche nach dem Mittelpunkte hin anziehen. (Nr. 188 am Ende.) Die Achsendrehung veranlaßt eine Änderung. Um die Teilchen in ihren Parallelkreisen

*) Zuerst dargelegt von Huygens (Noten zu Nr. 39 und 188), dann von Newton.

herumzuführen, ist eine Schwungkraft erforderlich; die Schwerkraft muß diese hergeben.

Es sei (Figur 88) BD = G die Schwerkraft der nicht rotierenden Erdkugel, d. h. BD sei die Geschwindigkeit, welche das Teilchen B, nachdem die Massenanziehung eine ganze Sekunde lang ungestört gewirkt hat, zum (fernen) Mittelpunkte O der Erde hin erlangen würde. Der Parallelkreis der Erde, auf welchem das Teilchen B sich befindet, habe den Radius BJ = x. Die Richtung, in welcher B bei der Erdumdrehung gegenwärtig sich bewegt, steht in B auf der Ebene der Figur senkrecht und geht nach hinten. Um diesen tangentialen Weg des Teilchens B, z. B. eines Wassertropfens oder eines Wolken-Dunstbläschens, umzubiegen zum Umfange des Parallelkreises um J, ist die Schwungkraft BC $\gamma = \frac{4\pi^2 x}{u^2}$ nötig, wo u die Umdrehungszeit der Erde, 86164 Sekunden, bedeutet. (Nr. 188.) Demnach ist BD durch das Parallelogramm der Geschwindigkeiten BCDF zu zerlegen in die Komponenten BC und BF. Da BC zur Führung des Teilchens B verbraucht wird, bleibt BF = g als wirksame Schwerkraft übrig. Ein im Orte B aufgehängtes Senklot erhält durch diese Anziehung die Richtung BF, weist also nicht zum Erdmittelpunkte O. Es stellt sich zum Lote rechtwinklig ein Wasserspiegel WL, der bei nicht rotierender Erdkugel die Lage der Berührungsebene XY, rechtwinklig zum Kugelradius BO, haben würde. Die Umdrehung der Erde läßt den Wasserspiegel im Norden sich senken und im Süden emporsteigen, wenn er auf der Nordhälfte der Erde sich befindet; umgekehrt auf der Südhälfte. Da nun der größere Teil der Erdoberfläche (drei Viertel derselben) mit Wasser bedeckt ist, so muß die Gestalt der rotierenden Erde an den Polen abgeplattet sein und beim Äquator eine Anschwellung besitzen. Die Achsendrehung verändert die Kugel in ein Sphäroid.



Figur 88. Änderung der Erdgestalt durch die Umdrehung.

Auch auf dem Festlande erhalten wir an jedem Orte durch die Libellen der Meßinstrumente die dortige Lage der sphäroidischen

Wasserfläche. Die Sphäroidform ist bei den in 10 Stunden sich umdrehenden großen Planeten Jupiter und Saturn deutlich sichtbar. (Nr. 164 und 204 Spalte 14 der Tabelle, auch Nr. 205.) Es ist aber fraglich, ob bei der viel kleineren Erde und bei ihrem erheblich langsameren Rotieren die aus diesen beiden Gründen geringere Änderung der Kugelgestalt nachweisbar ist.

220. Vier Formel-Entwicklungen für den elliptischen Erdmeridian. Um für diejenige Ellipse, welche durch Umdrehung um die kleine Achse 2b die Gestalt des Erdsphäroids giebt, die Größe der Achsen aus zwei gemessenen Meridianbogen zu finden, hat man zunächst folgende 4 Aufgaben zu lösen.

1) Die Polhöhe eines Beobachtungsortes durch die rechtwinkligen Koordinaten dieses Punktes auszudrücken.

Auflösung. In Figur 89 stelle die Ellipse den Erdmeridian dar, auf welchem der Beobachtungsort B liegt. Aus der Gleichung der Ellipse für den Punkt B (Nr. 194 Note) hat man

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Von ihr subtrahiere man die entsprechende für den dem Punkte B benachbarten Punkt B_1, dessen Koordinaten x_1 und y_1 sind, und forme durch Zerlegung der Differenz der Quadrate die Gleichung so um, daß man den Bruch $\frac{y - y_1}{x_1 - x}$ erhält. Dieser bedeutet die Kotangente des Winkels DBB_1 oder CBE, und man hat

$$\operatorname{cotg} CBE = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x}{y + y_1}.$$

Rückt nun der Punkt B_1 nach B, so geht die Sekante BB_1E über in die Tangente NBS. Dieselbe ist diejenige gerade Linie, welche in der Ebene des Horizontes für B vom Nordpunkte nach dem Südpunkte läuft, also die Mittagslinie des Ortes B. Daher wird aus dem Winkel CBE der Scheitelwinkel der Polhöhe φ, und die letzte Gleichung hat sich für $x_1 = x$ und $y_1 = y$ verwandelt in

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

welche den gesuchten Zusammenhang zwischen φ und den Koordinaten angiebt.

2) Die Vertikallinie des Beobachtungsortes schneidet die Ebene des Äquators in welcher Entfernung vom Mittelpunkte?

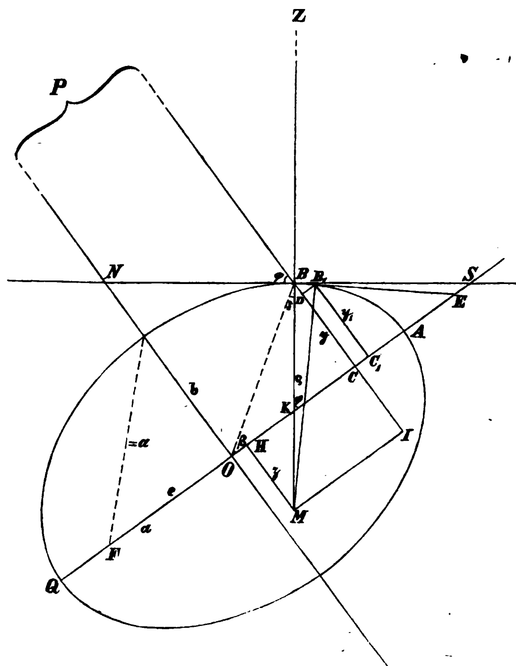
Auflösung. Die Verlängerung der Vertikallinie BZ ist die Normale BK. Sie schneidet die Ebene des Äquators unter dem Winkel φ, und darum hat man mittels der eben entwickelten Formel $KO = x - \frac{b^2}{a^2}x$, das ist $\frac{e^2}{a^2}x$. Es heißt aber $\frac{e}{a} = \varepsilon$ die numerische Excentricität der Ellipse. Daher ergiebt sich

$$KO = \varepsilon^2 x.$$

3) Die Normalen der beiden Nachbarpunkte schneiden sich in M unterhalb des Äquators. Wie weit ist der Punkt M von der Ebene des Äquators entfernt?

Auflösung. Diese Entfernung $MH = z$ giebt für den Abstand des Punktes M von der Erdachse $HO = \varepsilon^2 x - z \operatorname{cotg} \varphi$ oder nach 1) $\varepsilon^2 x - \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}z$, außerdem aber noch ebensolchen Ausdruck vom Punkte B_1 her. Mithin hat man die Gleichung

$$\varepsilon^2 x - \frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}z = \varepsilon^2 x_1 - \frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}z$$



Figur 89. Ein elliptischer Meridian.

aus welcher folgt

$$\frac{b^2}{a^2}[x_1 y - x y_1] z = \varepsilon^2 (x_1 - x) y y_1.$$

In der links stehenden Klammer subtrahiere und addiere man xy, so daß dieselbe wird

$$[(x_1 - x) y + x (y - y_1)]$$

und wenn man nun die Gleichung durch $x_1 - x$ dividiert, so bekommt man wieder den Bruch $\frac{y - y_1}{x_1 - x}$, für den man die in der ersten Aufgabe besprochene Kotangente einzusetzen hat. Rückt nun wieder B_1 nach B, so lautet die Gleichung

$$\left[\frac{b^2}{a^2} y + \frac{b^2}{a^2} x \operatorname{cotg} \varphi\right] z = \varepsilon^2 yy$$

oder gemäß 1)

$$\left[\frac{b^2}{a^2} + \operatorname{cotg}^2 \varphi\right] z = \varepsilon^2 y.$$

Da aber $b^2 = a^2 - e^2$, also $\frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$ ist, so wird die Klammer zu $\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \varepsilon^2$ und man hat

$$z = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} y.$$

Erklärung. Ist der Punkt B_1 außerordentlich nahe bei B, so hat das Flächenstück MBB_1, weil MB und MB_1 senkrecht auf dem Bogen stehen, die Gestalt eines Kreisausschnitts. Deswegen heißt M der Krümmungsmittelpunkt für das Bogenelement BB_1 und MB der Krümmungsradius der Ellipse an dieser Stelle.

4) Man soll den Abstand des Beobachtungsortes von der Ebene des Äquators durch den Krümmungsradius ϱ und die Excentricität ε ausdrücken.

Auflösung. Das Dreieck BMJ liefert $\varrho \sin \varphi - y = z$ oder durch den in 3) gefundenen Wert für z

$$\varrho \sin \varphi - y = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} y$$

und es ergiebt sich sogleich

$$y = \varrho \sin \varphi (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi).$$

221. Formelausdrücke für die Halbachsen. Mittels der in der ersten und vierten Aufgabe entwickelten Formeln aus der Ellipsengleichung die halbe Umdrehungsachse b und aus ihr durch die Excentricität ε den Radius a des Äquators zu finden.

Auflösung. Aus 1) hat man $y = \frac{b^2}{a^2} x \operatorname{tg} \varphi$. Dies in die Ellipsengleichung eingesetzt, giebt

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg}^2 \varphi\right) = 1$$

und wenn man $\frac{b^2}{a^2}$ durch $1 - \varepsilon^2$ ersetzt und dann zusammenzieht, kommt

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}.$$

Dies und das Ergebnis der vierten Aufgabe gestaltet die Ellipsengleichung $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ zu

$$\frac{\varrho^2 \sin^2 \varphi}{b^2} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^2 = \frac{\sin^2 \varphi - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}$$

woraus hervorgeht

$$b = \frac{\varrho (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Schließlich hat man aus der demnächst zu ermittelnden numerischen Excentricität

$$a = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

222. Ausdruck für die Excentricität. Der in Nr. 221 gefundene Wert für die halbe Umdrehungsachse b lautet für einen andern Ort

$$b = \frac{\varrho_1 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Beide Ausdrücke geben die Gleichung

$$\varrho_1 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1)^{\frac{3}{2}} = \varrho (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}$$

oder, potenziert mit $\frac{2}{3}$,

$$\varrho_1^{\frac{2}{3}} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi_1) = \varrho^{\frac{2}{3}} (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)$$

und man findet die Excentricität aus

$$\varepsilon^2 = \frac{\varrho^{\frac{2}{3}} - \varrho_1^{\frac{2}{3}}}{\varrho^{\frac{2}{3}} \sin^2\varphi - \varrho_1^{\frac{2}{3}} \sin^2\varphi_1}. \quad *)$$

§ 26. Die Halbachsen des Erdsphäroids, berechnet aus der russischen Breitengradmessung.**)

223. Die russische Gradmessung. Durch den Direktor der Sternwarte in Dorpat, Wilhelm Struve***), und durch den General von Tenner ließ die russische Regierung an dem durch die Dorpater Sternwarte gehenden Meridian hin eine große Breitengradmessung ausführen, die vom schwarzen Meere bis zum nördlichen Eismeere sich erstreckt. An diesem großartigen Unternehmen wurde 40 Jahre gearbeitet, von 1816 bis 1855. Der südliche Endpunkt der Gradmessung ist Staro-Nekrassowka, östlich bei Ismail nahe der Donaumündung, in 45° 20′ nördlicher Breite; der nördliche Endpunkt ist Fuglenäs in 70° 40′ Breite, nördlich von Hammerfest; so daß der Meridianbogen eine Ausdehnung von 25° 20′ besitzt. Die Dreieckskette besteht aus einer fortlaufenden Reihe von 258 Dreiecken; zu diesen kommen noch die der Netze von 10 Grundlinien, welche, in

---

*) Zur Vereinfachung der logarithmischen Rechnung könnte man Zähler und Nenner dieses Bruches entweder durch $\varrho_1^{\frac{2}{3}}$ oder durch $\varrho^{\frac{2}{3}}$ dividieren. Allein bei den Zahlenwerten, welche hier in Rechnung treten werden, hätte man dann im ersten Falle ganz zu Anfang der Logarithmentafeln, wo die Mantissen mit 000 beginnen, die Zahl für den eingeführten Quotienten aufzuschlagen, im zweiten an ihrem Ende, wo 999 voransteht. An beiden äußersten Stellen der Tafeln liefert aber das Übergehen von den Logarithmen zu den Zahlen ungenaue Werte; und darum ergeben selbst siebenstellige Logarithmen für $\log \varepsilon^2$ in beiden Fällen recht erheblich abweichende Werte. Wir rechnen nach der unveränderten Formel. — Bohnenberger (Astronomie, Tübingen, Cottasche Buchhdg., 1811; § 137, Gleichung 16) verwandelt den so veränderten Zähler [nachdem er die Größe G und G_1 eines Grades für ϱ und ϱ_1 eingeführt und sehr geschickt $\frac{G - G_1}{3G} = D$ gesetzt hat] in eine Reihe mittels des binomischen Lehrsatzes für einen Bruchexponenten. Die danach ausgeführte Rechnung (in Nr. 224) giebt zwar genauer $\varepsilon^2 = 0{,}0067631466$, aber der Halbmesser a wird ebensogroß und die Halbachse b nur um 2^m kleiner. Wir führen deshalb dieses schöne, aber weitläufigere Rechnungsverfahren hier nicht aus.

**) Die Geschichte der Breitengradmessungen steht für das Altertum (Archytas, um 400 vor Chr.) und im Mittelalter (die Araber Chalid und Ali 827) in Nr. 50 (Seite 166 bis 169) und für die Zeit vom Jahre 1600 an (Snellius) in Nr. 124 (S. 385) und Nr. 219 bis 224 (S. 613 bis 629) bei Rudolf Wolf, Geschichte der Astronomie. München, R. Oldenbourg, 1877. 815 Seiten.

***) Geboren 1793 zu Altona, gest. 1864 als Direktor der Sternwarte in Pulkowa.

Abständen von 1 bis 4 Breitengraden verteilt, gemessen wurden zur Kontrolle für die zu berechnende Länge der Dreiecksseiten. Die Azimute der Seiten lieferten die Projektionen derselben auf den Dorpater Meridian. (Vergl. Nr. 134.) Von 13 Dreieckspunkten wurde die Polhöhe astronomisch bestimmt. Dadurch ist der ganze Meridianbogen in 12 Teile zerlegt.*)

Von den 13 astronomischen Punkten liegt der Mittelpunkt des Turmes der Dorpater Sternwarte der Mitte des großen Bogens am nächsten. Deshalb nehmen wir ihn als Teilpunkt des ganzen Bogens, und berechnen für den nördlichen und für den südlichen Meridianbogen den mittleren Krümmungsradius ϱ, das ist der von einer Bogensekunde am Halbierungspunkte. Das arithmetische Mittel aus den Polhöhen der Endpunkte giebt die Polhöhe φ für den Halbierungspunkt des nördlich und φ_1 für den des südlich von Dorpat liegenden Bogens. Ihre Werte setzen wir ein in die Formel für ε^2 (Nr. 222), und die erhaltene Excentricität ε der Meridian-Ellipse liefert dann die Größen für b und a durch die Formeln in Nr. 221.

224. Berechnung der Halbachsen. Der nördliche Bogen des Dorpater Meridians, zwischen dem Parallelkreise durch den trigonometrischen Punkt bei Fuglenäs und dem Mittelpunkte des Turmes der Dorpater Sternwarte, hat eine Länge von

$$s = 1\,370{,}2159^{\text{km}}$$

und der südliche, von Dorpat bis zum Parallelkreise durch den trigonometrischen Punkt bei Staro-Nekrassowka

$$s_1 = 1451{,}5730^{\text{km}}.$$

Es sind die Polhöhen der drei Punkte

Fuglenäs	70° 40′ 11,23″
Dorpat	58 22 47,56
Staro-Nekrassowka	45 20 2,94 .

Hieraus finden wir die Polhöhe des Halbierungspunktes des nördlichen Bogens

$$\varphi = 64^0\,31'\,29{,}395''$$

und die des südlichen Bogens

$$\varphi_1 = 51^0\,51'\,25{,}25''.$$

*) F. G. W. Struve, Arc du Méridien de 25° 20′ entre le Danube et la Mer glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu' en 1855. St. Pétersbourg. Tome I, 1860. Tome II, 1857. St. Pétersbourg, Eggers & Comp.; Leipzig, Léopold Voss. Prix 33 *M*. Die Tabelle im II. Teile Seite 210 giebt die Länge der Meridianabschnitte. Die Polhöhen der 13 astronomischen Punkte findet man in der Einleitung zum I. Teile Seite XLI bis LXX.

Die Zahl der Bogensekunden des nördlichen Bogens $\alpha = 44243{,}67''$ und die des südlichen $\alpha_1 = 46964{,}62''$ giebt mittels der Formel

$$\varrho = \frac{648000}{\pi} \cdot \frac{s}{\alpha}, \qquad \text{wo } \log \frac{648000}{\pi} = 5{,}31442513 \text{ ist,}$$

den Krümmungsradius einer Bogensekunde beim Halbierungspunkte des nördlichen Bogens

$$\varrho = 6387{,}972^{km} \quad (6388{,}01^{km})$$

und den beim südlichen

$$\varrho_1 = 6375{,}192^{km} \quad (6375{,}21^{km}).$$

Ferner kommt (Nr. 222)

$$\varrho^{\frac{2}{3}} = 344{,}27751 \quad (344{,}275)$$
$$\varrho_1^{\frac{2}{3}} = 343{,}81819 \quad (343{,}817)$$
$$\varepsilon^2 = 0{,}0067626 \quad (0{,}006743)$$
$$\varepsilon = 0{,}082235 \quad (0{,}08212)$$

was man auch schreiben kann

$$\varepsilon = \frac{1}{12{,}160} \quad \left(\frac{1}{12{,}18}\right).$$

Dann erhält man die Halbachsen (mit den Formeln in Nr. 221)

1) aus ϱ und φ des nördlichen Bogens

$$a = 6378{,}368^{km} \quad (6378{,}31^{km})$$
$$b = 6356{,}765^{km} \quad (6356{,}76^{km})$$

und die Abplattung [d. h. das Verhältnis (a — b) : a]

$$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{295{,}2538} \quad \left(\frac{1}{295{,}97}\right);$$

und 2) aus ϱ_1 und φ_1 des südlichen Bogens

$$a = 6378{,}366^{km} \quad (6378{,}42^{km})$$
$$b = 6356{,}763^{km} \quad (6356{,}86^{km})$$

$$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{295{,}2537} \quad \left(\frac{1}{295{,}84}\right).$$

Die arithmetischen Mittel aus beiden Berechnungen ergeben

Radius des Äquators $\mathbf{a = 6378{,}367^{km}}$ $(6378{,}37^{km})$
halbe Umdrehungsachse $\mathbf{b = 6356{,}764^{km}}$ $(6356{,}81^{km})$

und die

Abplattung des Erdsphäroids $\mathbf{\frac{a - b}{a} = \frac{1}{295{,}25}}$ $\left(\frac{1}{295{,}9}\right)$.

$$a - b = 21{,}603^{km}.$$

Die Erdachse ist 43,2^{km} kürzer, als der Durchmesser des Äquators.

225. Empfindlichkeit der Ergebnisse. Um zu erfahren, ob die erhaltenen Zahlen unbedeutend oder erheblich sich ändern, wenn die Messung die beiden Meridianstücke um einen sehr geringen Betrag anders geliefert hätte, wollen wir die Zahl für die Größe der beiden Bogen, die sich von Dorpat nach dem nördlichen Eismeere und nach dem unteren Laufe der Donau erstrecken, um zehn Meter anders annehmen. Es werde

I. der nördliche Bogen um 10^{m} größer, der südliche um 10^{m} kleiner genommen. Führt man mit den Zahlen 1370,2259^{km} und 1451,5630^{km} dieselbe Rechnung durch, so findet man, daß der Krümmungsradius ϱ des nördlichen Bogens um 47^{m} (50^{m}) größer und ϱ_1 des südlichen um 45,5^{m} (40^{m}) kleiner ausfällt. In Folge dessen vermindert sich bei der Berechnung aus ϱ und φ a um 20^{m} (40^{m}) und b sogar um 174^{m} (160^{m}), so daß die Abplattung steigt auf $\frac{1}{293{,}16}$ $\left(\frac{1}{294{,}3}\right)$; bei der Berechnung aus ϱ_1 und φ_1 wird im Vergleich mit der entsprechenden Rechnung a um 19^{m} (90^{m}) und b um 173^{m} (200^{m}) kleiner, und die Abplattung wie eben angegeben. Das arithmetische Mittel aus beiden liefert

für a 6378,348^{km} (6378,30^{km})
für b 6356,590^{km} (6356,63^{km})

$$\text{und für die Abplattung } \frac{1}{293{,}16} \left(\frac{1}{294{,}3}\right).$$

Wird II. der nördliche Bogen um 10^{m} kleiner, der südliche um 10^{m} größer gewählt, so nimmt der Krümmungsradius von jenem um 47^{m} (40^{m}) ab, von diesem um 44^{m} (50^{m}) zu, und dann wächst bei der Berechnung aus ϱ und φ a um 21^{m} (90^{m}) und b um 173^{m} (210^{m}); so daß die Abplattung sich vermindert auf $\frac{1}{297{,}347}$ $\left(\frac{1}{297{,}64}\right)$. Aus ϱ_1 und φ_1 folgt der Zuwachs bei a um 21^{m} (80^{m}) und bei b um 174^{m} (210^{m}); die Abplattung wird $\frac{1}{297{,}361}$ $\left(\frac{1}{297{,}64}\right)$. Das arithmetische Mittel giebt

für a 6378,388^{km} (6378,45^{km})
für b 6356,9375^{km} (6357,02^{km})

und für die Abplattung $\frac{1}{297,35}$ $\left(\frac{1}{297,6}\right)$.

Die sehr geringe Änderung um 10^m mehr und weniger bei 1370216^m und 1451573^m übt auf das Ergebnis für die Abplattung einen überraschend starken Einfluß aus, trotzdem hierbei die Halbachsen a und b beide kleiner und beide größer ausfallen. Bei solcher überaus starken Empfindlichkeit dieser Größen befremdet es nun nicht mehr, daß auch die vorzüglichsten Gradmessungen zu scheinbar erheblich von einander abweichenden Ergebnissen geführt haben; und man sieht ein, daß die äußerste Sorgfalt, mit welcher die Geodäten ihre schwierige Arbeit durchführen, durchaus notwendig ist. Gar leicht entsteht eine Abweichung von der Wahrheit, wie wir sie dieser Betrachtung zu Grunde gelegt haben. Denn wenn in irgend einem Dreieck ein an sich höchst unbedeutender Beobachtungsfehler in den Winkelsekunden eine Seite, wenn auch nur sehr wenig, zu groß, werden ließ, so werden bei völlig richtigen Winkeln alle folgenden Dreiecke zu groß, und in ihren Projektionen auf den Meridian wächst der Einfluß jenes Fehlers immer weiter, wenn nicht später günstigen Falls durch einen verkleinernden Fehler das fortgesetzte Wachsen eingeschränkt wird; erst ein dritter, wie der zweite wirkender Fehler könnte die Messung wieder der Wahrheit näher führen. Solchem Fortwachsen der Fehler entgegen zu treten, wurden bei der russischen Breitengradmessung in der langen Kette von 258 Dreiecken zehn gehörig verteilte Grundlinien wiederholt gemessen. Aber auch die Grundlinien allein können eine Unsicherheit, wie die oben gedachte, trotz großer Sorgfalt hineinbringen. Denn wenn, wie es beim Messen der Berliner Grundlinie (im Jahre 1846) vorkam (s. die zweite Note zu Nr. 131), die mittlere Länge der Meßstangen um 0,000007287 ihrer Größe (von $3,9^m$), das ist um weniger als 3 Hundertstel-Millimeter, zu klein gefunden wird, nimmt die Zahl für die Größe des nördlichen russischen Bogens ab um $9,98^m$ und die des südlichen um $10,58^m$.

Anmerkung. Als diejenigen Werte, welche zehn Gradmessungen am besten entsprechen, erhielt Bessel im Jahre 1841*)

$$a = 6377397^m \qquad \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299,15}.$$
$$b = 6356079^m$$

Drei von den zu Grunde gelegten Messungen wurden noch weiter fortgesetzt; nämlich die große ostindische, die englisch-schottische und die russische; es kam hinzu die von 1842 bis 1852 am Kap der guten Hoffnung ausgeführte. Alle diese forderten in ihren Ergebnissen eine Vergrößerung von Bessels Dimensionen des Erd-

*) In Schumachers Astronomischen Nachrichten Nr. 438. Die erste Berechnung vom Jahre 1837 steht in Nr. 333. Vergleiche A. v. Humboldt, Kosmos, 4. Band Seite 21 und 152.

sphäroids; so daß den zwei Messungen, welche diese Größen hatten zu klein werden lassen, nun acht gegenüberstanden, die für Vergrößerung und stärkere Abplattung sprachen.*) Deswegen veranlaßte General J. J. Baeyer**), welcher mit Bessel die Gradmessung in Ostpreußen (1831 bis 1834) ausgeführt hatte, die Regierungen der mittel-europäischen Staaten, durch ihre Astronomen und Geodäten auf dem Meridian von Berlin einen Bogen von Norwegen bis Sicilien messen zu lassen. Die Arbeiten wurden begonnen im Jahre 1861. Das Unternehmen erweiterte sich (als Spanien, Portugal und Rußland beigetreten waren) im Jahre 1867 zur europäischen Gradmessung, mit der Absicht, Bogen von mehreren Meridianen zu messen, von denen vier durch Deutschland gehen (ein Meridianbogen wird anfangen beim nördlichsten Punkte Europas, dem Nordcap), sowie auch mehrere Parallelkreisbogen, von denen auch vier durch Deutschland laufen. In der allgemeinen Versammlung der Vertreter im Oktober 1886 zu Berlin nahm man nach dem Anschlusse Englands und der amerikanischen Staaten die Bezeichnung Internationale Erdmessung an.

General Baeyer, Chef des Central-Bureaus der europäischen Gradmessung in Berlin, teilte in dem Generalberichte für das Jahr 1866***) Seite 8 mit, daß auf der Pariser Sternwarte aus den verbesserten astronomischen und geodätischen Bestimmungen (in Frankreich) berechnet sei

$$\text{die Abplattung} = \frac{1}{285{,}8}, \text{ die halbe große Achse} = 6\,378\,204^{\text{m}};$$

und daß die sehr übereinstimmenden Werte von Struve und dem großbritannischen Messungs-Amte ergeben haben im Mittel

$$\text{Abplattung} = \frac{1}{294{,}31}, \text{ halbe große Achse} = 6\,378\,233^{\text{m}}.\dagger)$$

---

*) Die von Professor Rogg nach dem Jahre 1855 gelieferte Zusammenstellung der Ergebnisse jener 10 Gradmessungen, verglichen mit Bessels Dimensionen des Erdsphäroids, findet man in Hermann J. Klein, das Sonnensystem nach dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft. Braunschweig, Vieweg u. Sohn; 2. Auflage 1871, Seite 81.

**) Generallieutenant Dr. Johann Jakob Baeyer, geb. am 5. Nov. 1794 zu Müggelheim bei Köpenik (Berlin), feierte am 8. Febr. 1883 sein siebzigjähriges Dienstjubiläum. Er starb am 10. Sept. 1885 zu Berlin als Präsident des geodätischen Instituts und des Centralbureaus der Europäischen Gradmessung.

***) Verlag von Georg Reimer in Berlin, 1867.

†) Eine Übersicht von 19 Bestimmungen des Erdsphäroids von 1800 bis 1868 giebt Listing, Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde. Göttingen, Dieterichsche Verlagshdlg., 1872. (66 Seiten, 8°.) Dazu in demselben Verlage 1878 eine Untersuchung: Neue geometrische und dynamische Konstanten des Erdkörpers.

Schließlich werde noch erwähnt, daß Hansen aus den (sphäroidischen) Ungleichungen der Bewegung des Mondes in Länge und Breite, in Verbindung mit der Präcession, abgeleitet hat die Abplattung 1 : 296 (mittels der Breite) und 1 : 294 (mittels der Länge).

226. Mittlerer Halbmesser des Erdsphäroids. Als der Erdhalbmesser von mittlerer Länge ist derjenige zu nehmen, welcher dem Radius einer Kugel von derselben Größe gleich ist. Denn da der Meeresspiegel abschüssig nach den Polen ist (Nr. 219), so müßte, wenn die Erde aufhörte zu rotieren, das Wasser der Meere nach den Polen fließen, die Anschwellung am Äquator würde schwinden, die Erde würde zur Kugel sich abrunden. Der ihr zukommende Halbmesser ist zu denken, wenn man vom Erdkugelradius spricht. Man findet ihn aus

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi a^2 b\ ^{*)}$$

$$r = \sqrt[3]{a^2 b}$$

und erhält ihn aus den Schlußwerten in Nr. 224

$$r = 6371{,}158^{km}\ (6371{,}1^{km}).$$

Anmerkung. Nach der Erklärung zur dritten Aufgabe in Nr. 220 und aus dem Anfange der Berechnung in Nr. 224 ist nun ersichtlich, daß das, was in Nr. 135 und 138 gefunden wurde, der Krümmungsradius für die Mitte des Meridianbogens südlich von Berlin war. Rechnet man mit den in der Anmerkung zu Nr. 225 mitgeteilten anderen Ergebnissen, so kommt für r mit den Zahlen von Struve und dem großbritannischen Messungs-Amte $6371{,}00^{km}$, mit den in Paris berechneten $6370{,}75^{km}$ und mit denen von Bessel $6370{,}28^{km}$. Mit letzterem Werte stimmt das Ergebnis der Berliner Messung fast genau überein. Demnach durften wir dieses (Nr. 138) als den Erdkugelradius nehmen.

Ausdrücklich werde darauf hingewiesen, daß wir noch nicht berechnet haben, wie weit von einem Punkte des Meridianbogens bei Berlin bis zum Erdmittelpunkte ist; denn der Endpunkt M des Krümmungsradius liegt unter der Ebene des Äquators. (Nr. 220, 3. Die Berechnung in Nr. 235, 1.)

---

*) Für ein halbes Sphäroid (nur eine halbe Ellipse, ein Meridiandurchschnitt, werde auf 2a gezeichnet) bekommt man den Ausdruck für den Inhalt leicht, indem man b in n gleiche Teile zerlegt, durch alle Teilpunkte Parallelkreise legt, und auf jedem derselben als Grundkreis nach oben und unten einen geraden Cylinder von der Höhe $\frac{b}{n}$ errichtet. Die Summe der stehenden Cylinder ist größer, die der hängenden kleiner als das halbe Sphäroid; und es wird schließlich

$$\pi a^2 b\left[1-\tfrac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right] > \tfrac{1}{2}J > \pi a^2 b\left[1-\frac{1}{n}-\tfrac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right].$$

Beide Grenzen fließen zusammen bei unendlich großem n.

§. 27. Bestimmung der Größe der Halbachsen aus Längengradmessungen.

227. Formeln. Aus der Größe zweier Bogen verschiedener Parallelkreise sind Ausdrücke für die Halbachsen des Erdsphäroids leicht zu entwickeln.

Nach der ersten Aufgabe in Nr. 220 ist $y = \frac{b^2}{a^2} x \operatorname{tg} \varphi$. Setzt man dies in die Ellipsengleichung ein, so kommt

$$a^2 = x^2 [1 + v \operatorname{tg}^2 \varphi]$$

wo das Verhältnis $b^2 : a^2$ mit v bezeichnet ist.

Hat man nun von dem Bogen eines Parallelkreises, auf dem die Polhöhe $= \varphi$ ist, 1) durch Triangulation seine Größe s berechnet und 2) durch die Differenz der Uhrangaben an den Endpunkten die Anzahl seiner Grade α gefunden (Nr. 117), so kennt man durch $\frac{s}{\alpha} = G$ die Größe eines Grades desselben, und hat seinen Radius

$$x = \frac{180}{\pi} G.$$

Somit wird

$$a^2 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 G^2 [1 + v \operatorname{tg}^2 \varphi].$$

Ebenso für einen andern Parallelkreis, dessen geographische Breite möglichst verschieden von der des ersten ist,

$$a^2 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^2 G_1^2 [1 + v \operatorname{tg}^2 \varphi_1].$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke erhält man jenes Verhältnis

$$v = \frac{(G_1 + G)(G_1 - G)}{(G \operatorname{tg} \varphi)^2 - (G_1 \operatorname{tg} \varphi_1)^2}$$

und hiernach

$$a = \frac{180}{\pi} G \sqrt{1 + v \operatorname{tg}^2 \varphi} \quad \text{und} \quad b = a\sqrt{v}.$$

228. Ausfall der bisherigen Messungen. Ist für denjenigen der beiden Bogen, welcher dem Äquator näher liegt, der Zeitunterschied an seinen Endpunkten, wenn auch nur wenig, zu klein gefunden, so wird die Länge G_1, da die Größe des Zählers s_1 doch nur eine mäßige sein kann, nicht unerheblich zu groß, und dieser

Parallelkreis erscheint ausgeweitet. Da aber beide durch ihre Polhöhe festliegen, so dehnt sich das durch sie gehende Sphäroid zum Äquator hin beträchtlich aus, und zugleich wird seine Umdrehungsachse kürzer; mithin ergiebt sich dann eine viel zu starke Abplattung.

Es war aber das Vergleichen der richtigen Uhrangaben beider Endstationen bisher höchst mißlich (durch Pulversignale auf einer Zwischenstation, oder durch Chronometerübertragung); und darum sind nach den ersten Versuchen einer Längengradmessung in Frankreich (1733 und 1740) nur sehr wenige ausgeführt: in Vorderindien (1790) und in Süd-Frankreich (1811) und Ober-Italien (1820), auch in England (vor 1849), von denen die wegen ihrer südlichen Lage wichtigen in Indien durch mangelhafte Instrumente unbrauchbar ausgefallen sind. So ist noch kein Paar von Längengradmessungen vorhanden, welches den hier erforderlichen hohen Grad der Genauigkeit besitzt. Erst jetzt, nachdem das Netz der elektrischen Telegraphen weit ausgespannt ist, haben wir ein scharfes Mittel für Zeitvergleichung. Dennoch muß es späterer Zukunft überlassen bleiben, Angaben zu erhalten, für welche die mit obigen Formeln ausgeführten Rechnungen gut übereinstimmende Ergebnisse liefern. Denn die Bogen von Parallelkreisen, welche von der europäischen Gradmessung bestimmt werden sollen, liegen für vorstehende Untersuchung viel zu nahe bei einander. Man sucht durch diese Messungen zunächst nur die Entscheidung darüber, ob die Gestalt der Erde wirklich eine Rotationsfigur ist. Die beobachteten Längendifferenzen einer Reihe von Orten liefern in einer Parallelkreisebene Centriwinkel, die ihren gemeinsamen Scheitel in der Umdrehungsachse der Erde haben. Die gemessenen Bogen zwischen den Schenkeln gleicher Winkel müssen dann gleich große Strecken, und die zwischen ungleichen Winkeln diesen proportional sein, wenn der Parallelschnitt auf der Erdoberfläche in der That ein Kreis ist.*)

§ 28. Stärke der Abweichung von der Kugelgestalt.

229. Die Abplattung ist im Überblick unmerklich. Die Abplattung ist bei einer getreuen Nachbildung der Erde mit freien Augen nicht zu erkennen. Vom Monde aus könnte die Verschiedenheit des Äquatordurchmessers und der Erdachse nur mit einem guten Sextanten wahrgenommen werden.

*) Zunächst wird wohl fertig werden die Struvesche Längengradmessung auf dem 52sten Parallelkreise, welche auf russischem Boden mehr als 290 Dreiecke mit 8 Grundlinien und 9 in Länge bestimmten astronomischen Punkten enthält.

Um die elliptische Gestalt eines Erdmeridians zu zeichnen, kann man um einen Punkt zwei Kreise beschreiben mit $a = 295^{mm}$ und $b = 294^{mm}$ Radius und zwischen beide Kreisumfänge die Ellipse einfügen. Überträgt man dieselbe auf einen aufgespannten großen Bogen, auf welchem für den Beschauer die Lage der Achsen in keiner Weise sich markiert, so ist nicht zu erkennen, wo der große oder der kleine Durchmesser bei unbekannter Stellung der Bildfläche sich befindet. Tritt man von der Figur zurück bis auf $17{,}8^{m}$, so erscheint sie in Größe und Form so, wie die Erde, vom Monde aus gesehen. Ohne Meßinstrumente ist der Eindruck von dem eines Kreises nicht zu unterscheiden.

Für einen Beobachter auf dem Monde, in dessen mittlerer Entfernung, ist die scheinbare Größe des Erddurchmessers in der Lage des Äquators $1^{0}54'6{,}4''$ und in der Richtung von Pol zu Pol $1^{0}53'43{,}2''$, also ein Unterschied von $23{,}2''$. Ein Sextant, welcher die Größe der Winkel von 10 zu 10 Sekunden angiebt, würde die Ungleichheit der Erddurchmesser erkennen lassen.

230. Abweichung der Erdmeridiane von der Kreisrundung. Die Form der Erdmeridiane weicht von der Kreisgestalt erheblich mehr ab, als die Bahn des Mondes um die Erde; sie kommt ziemlich nahe der Gestalt der Marsbahn.

Nimmt man zur Darstellung der Form der Erdmeridiane $a = 1^{m}$, so lehrt der Zahlenwert von $(a - b) : a$, daß die Scheitel der kleinen Achse von dem mit $a = 1^{m}$ beschriebenen Kreise schon um $3{,}4^{mm}$ sich entfernen, und aus ε erfährt man, daß jedem Brennpunkte $82{,}2^{mm}$ Abstand vom Mittelpunkte zu geben ist. Für jenes Zurücktreten der Scheitelpunkte kamen in ebenso großer Darstellung bei der Bahn des Mondes um die Erde nur $1{,}5^{mm}$ und bei der Marsbahn $4{,}36^{mm}$. (Nr. 211 und 200.) Die Form der Erdmeridiane steht also der sehr merklich elliptischen Marsbahn weit näher, als der der Bahn des Mondes um die Erde.

231. Ungleichheit der Erdmeridian-Grade.*) Wie lang ist der kleinste und der größte Grad eines Erdmeridians?

Die beiden Formeln in Nr. 221 liefern für den kleinsten Grad, dessen Mitte auf dem Äquator liegt,

*) Nach Picards von 1669 bis 70 bei Paris vollzogenen Gradmessung zuerst bestätigt durch die Breitengradmessungen, welche von Bouguer und La Condamine von 1735 bis 1741 in Peru unter $1^{1}/_{2}$ Grad südlicher Breite und von Maupertuis unsorgfältig 1736 bis 1737 (besser von Svanberg 1801 bis 1803) in Lappland bei Torneå unter $66^{1}/_{3}$ Grad nördlicher Breite ausgeführt wurden.

$$G_0 = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{b^2}{a}$$

und für den größten, dessen Halbierungspunkt der Pol ist,

$$G_{90} = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{a^2}{b}.$$

$$G_0 = 110{,}57067^{\mathrm{km}} \; (110{,}571^{\mathrm{km}})$$
$$G_{90} = 111{,}70184^{\mathrm{km}} \; (111{,}701^{\mathrm{km}}).$$

Die Grade eines Meridians können von dem arithmetischen Mittel zwischen dem kleinsten und größten, $111{,}13626^{\mathrm{km}}$, nur bis zu dem zweihundertsten Teile desselben abweichen.

Da man für die Länge des Äquators $40076{,}46^{\mathrm{km}}$ findet, so ist jeder seiner Grade $111{,}32350^{\mathrm{km}}$ lang. Sie weichen vom größten Meridiangrade nur halb so wenig ab, als vom kleinsten; denn die Unterschiede sind nahe $\frac{1}{300}$ und $\frac{2}{300}$ der Länge.

232. Geocentrische Breite. Der Neigungswinkel eines Halbmessers des Erdsphäroids gegen die Ebene des Äquators giebt die geocentrische Breite des Ortes an, nach welchem der Halbmesser gezogen ist. Der Neigungswinkel der Normale ist es, welcher, da er gleich der Polhöhe ist, die „geographische Breite“ liefert.

In Figur 89 zu Nr. 220 giebt der Winkel BOA die geocentrische, und der Winkel BKA die geographische Breite des Ortes B an. Der Winkel KBO, gebildet von der Normale und dem Erdhalbmesser, zeigt die Differenz zwischen geographischer und geocentrischer Breite. Null ist sie nur am Äquator und am Pol.

233. Differenz zwischen geographischer und geocentrischer Breite. Für welchen Parallelkreis weicht die geocentrische Breite von der geographischen Breite am meisten ab? und wie viel beträgt der größte Unterschied?

Auflösung. Die geocentrische Breite erhält man aus der geographischen, der Polhöhe φ, durch

$$1) \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi$$

wie aus der Gleichung in Nr. 220, 1) hervorgeht. Zu jeder, von Parallelkreis zu Parallelkreis sich ändernden Differenz $\delta = \varphi - \beta$ muß es jenseits des Maximums eine ihr gleiche geben, weil die Größe δ von ihrem höchsten Werte an durch alle denkbaren Zahlen wieder bis auf Null hinabgeht. Ist φ_1 mit β_1 die dortige Breite, welche die

ebenso große Differenz δ liefert, wie die zuerst genommene, so hat man aus $\varphi_1 - \beta_1 = \varphi - \beta$

$$2) \qquad \beta - \beta_1 = \varphi - \varphi_1 .$$

Subtrahiert man von 1) dieselbe Gleichung mit β_1 und φ_1, so folgt

$$\frac{\sin(\beta - \beta_1)}{\cos\beta\cos\beta_1} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\sin(\varphi - \varphi_1)}{\cos\varphi\cos\varphi_1}$$

woraus sich wegen 2) die Zähler fortheben

$$\frac{1}{\cos\beta\cos\beta_1} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\cos\varphi\cos\varphi_1} .$$

Diese Gleichung, in Verbindung mit 1) und 2), ermöglicht, zu jeder gewählten geographischen Breite φ die zugehörige, bisher nur gedachte Breite φ_1 wirklich auszurechnen, und wir würden, da die eine diesseits, die andere jenseits der dem größten δ angehörigen geographischen Breite liegt, φ_1 von anderer Größe als φ erhalten. Hätten wir aber bei der wiederholten Wahl einer Breite φ zufällig ihren Wert beim Maximum getroffen, so würde φ_1 gleich φ sich ergeben, weil dem Maximum keine andere ihm gleiche Größe zur Seite steht. Aus dieser Überlegung folgt, daß, wenn wir in der letzten Gleichung $\varphi_1 = \varphi$ und infolgedessen $\beta_1 = \beta$ setzen, wir in

$$\frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

die dem Maximum angehörenden Werte φ und β besitzen. Wir formen diese Bestimmungsgleichung in Hinsicht auf Gleichung 1) um in

$$1 + \operatorname{tg}^2\beta = \frac{b^2}{a^2}(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)$$

und erhalten nach dem Einsetzen

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b} \qquad \text{und dazu} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} .$$

Aus der Form beider Ereignisse geht hervor die größte Differenz

$$\delta = 2\varphi - 90^0 .$$

$$\varphi = 45^0\, 5'\, 49{,}9''\ (48{,}2'') \qquad \delta = 11'\, 39{,}8''\ (36{,}4'').$$

Dies ist der Parallelkreis von Turin.

234. Lage des horizontalen Erdbodens gegen seinen Erdhalbmesser. Man denke sich ein Senklot aufgehängt über einer Wasserfläche. Beide sollen keine andere Bewegung haben, als die sie durch die Achsendrehung (und das Fortlaufen) der Erde besitzen. Sie erscheinen also dem Beobachter vollkommen in Ruhe; der Faden

des Lotes und der Wasserspiegel sind rechtwinklig zu einander. Die Wasserfläche bildet einen Teil der Oberfläche des Erdsphäroids; mithin giebt der Faden die Richtung der Normale an. Er muß um den Winkel δ nordwärts abgelenkt werden, damit er zum Erdmittelpunkte weise.

1) Von der Decke eines Zimmers in Turin hänge ein 3^m langes Senklot herab. Wie weit muß sein tiefster Punkt nach Nord vorgeschoben werden, damit der Faden die Richtung zum Erdmittelpunkte angebe?

Antwort. 1 Centimeter weit. Die Rechnung ergiebt $1{,}018^{cm}$ $(1{,}013^{cm})$. Für Berlin lautet die Antwort ebenso. Denn in Nr. 235, 1) findet man $\delta = 11'16{,}46''$ $(11'15'')$, und dieses liefert für die Verschiebung $0{,}984^{cm}$ $(0{,}982^{cm})$. Bei dem $18{,}973^m$ langen Foucaultschen Pendel des Königstädtischen Realgymnasiums in Berlin muß die Spitze unter der Kugel aus der Ruhelage schon $6{,}2^{cm}$ nordwärts gebracht werden, damit sie zum Erdmittelpunkte zeige.

2) Der Meeresspiegel ist gegen eine zum Erdhalbmesser rechtwinklige Ebene geneigt unter einem Winkel, der gleich δ ist. (Figur 88 zu Nr. 219.) Wie tief ist das Gefälle 1^{km} weit nach Nord vom Turiner Parallelkreise aus?

Antwort. $3{,}4^m$. Die Rechnung liefert $3{,}39273^m$ $(3{,}376^m)$. Diese Tiefe ist gleich der Höhe eines Zimmers.

Aus 1) folgt, daß der Fußboden unserer Zimmer für jedes Meter in nördlicher Richtung $\frac{1}{3}^{cm}$ tiefer liegt, als es auf ganz kugelförmiger Erde stattfinden würde.

235. Größe von Halbmessern des Erdsphäroids.

1) Nach Berlin. Für das Schiller-Denkmal in Berlin ist die geographische Breite $52^0\,30'\,55''$; der Schillerplatz hat 34^m Seehöhe. Wie lang ist der nach dem Denkmal gehende Halbmesser des Erdsphäroids?

Auflösung. Aus der Formel in Nr. 220, 1) und der Ellipsengleichung hat man

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi\right)^2}} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\varphi$$

und nun

$$r_1 = \frac{x}{\cos\beta}.$$

Kürzer rechnet man mit dem Hilfswinkel u nach

$$1)\quad \operatorname{tg} u = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \qquad 2)\quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} \operatorname{tg} u \qquad 3)\quad r_1 = \frac{a \cos u}{\cos \beta}.$$

Es kommt für jenen Parallelkreis von Berlin $r_1 = 6364{,}807^{km}$ $(6364{,}73^{km})$
und mit der Seehöhe h $r_1 + h = 6364{,}841^{km}$ $(6364{,}76^{km})$

2) Besonderes Beispiel. Für den Parallelkreis von Turin, $\varphi = 45^0\,5'\,50''$, wo $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$ und $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$ ist.

Auflösung. Hier vereinfacht sich die erste Gleichung der vorstehenden Auflösung in $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ und, da $y = x \operatorname{tg} \beta$ ist, wird

$$r_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)}.$$

$$r_2 = 6367{,}574^{km}\ (6367{,}59^{km}).$$

Andere Beispiele:

3) Das Nordkap von Europa. $\varphi = 71^0\,15'$. $r_3 = 6359{,}014^{km}$ $(6359{,}26^{km})$.
4) Christiania. $\varphi = 60^0$. $r_4 = 6362{,}200^{km}$.
5) Berner Alpen: Finsteraarhorn und Jungfrau. $\varphi = 46^0\,33'$. $r_5 = 6367{,}029^{km}$.
6) Der Montblanc. $\varphi = 45^0\,50'$ $r_6 = 6367{,}298^{km}$.
7) Pyrenäen: Maladetta. $\varphi = 42^0\,33'$. $r_7 = 6368{,}533^{km}$.
8) Cuenza bei Madrid. $\varphi = 40^0$. $r_8 = 6369{,}487^{km}$.
9) Der Ätna. $\varphi = 37^0\,42'$. $r_9 = 6370{,}330^{km}$.
10) Der Pic von Teneriffa und der Everest im Himalaya. $\varphi = 28^0$. $r_{10} = 6373{,}636^{km}$.
11) Fuego, eine der Kapverdischen Inseln. $\varphi = 15^0$. $r_{11} = 6376{,}931^{km}$.
12) Der Chimborazo. $\varphi = -1^0\,30'$. $r_{12} = 6378{,}354^{km}$.

236. Abweichung der Erde von der Kugelgestalt für die Friedrichstraße in Berlin. Die 3240^m lange Friedrichstraße in Berlin läuft, ohne zu steigen oder zu fallen, in 34^m Seehöhe von Nord nach Süd. Um wie viel ist man an ihrem Nordende dem Mittelpunkte der Erde näher, als an ihrem Südende?

Auflösung. Berechnet man die Erdhalbmesser für die beiden Endpunkte nach Nr. 235 und nach der ersten der hier folgenden Formeln (vergl. Nr. 141, 2), so zeigt sich, daß die Genauigkeit fünfstelliger Logarithmen in dieser Frage weit überschritten wird, und daß folglich die Zuverlässigkeit der Ergebnisse bei siebenstelligen Logarithmen zweifelhaft wird. Deshalb ist nicht Minuendus und

Subtrahendus, sondern die Differenz selbst auf anderem Wege zu ermitteln, und zwar, indem man ausgeht von dem Halbmesser r_1 nach der Mitte der Strecke. Der Parallelkreis durch das Schiller-Denkmal halbiert die Friedrichstraße; r_1 ist also in der vorhergehenden Aufgabe schon gefunden als $r_1 + h$. (Nr. 235, 1.)

Aus der geocentrischen Breite β der Mitte der Strecke s bestimmt sich die des Nordendes $\beta + \gamma$ und die des Südendes $\beta - \gamma$; und so hat man aus der Ellipsengleichung für die nach den Endpunkten gehenden Halbmesser r_2 und r_3

$$\frac{\cos^2(\beta+\gamma)}{a^2} + \frac{\sin^2(\beta+\gamma)}{b^2} = \frac{1}{{r_2}^2}$$

$$\frac{\cos^2(\beta-\gamma)}{a^2} + \frac{\sin^2(\beta-\gamma)}{b^2} = \frac{1}{{r_3}^2}$$

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, so kommt nach bekannten Zusammenziehungen

$$\frac{(r_3 - r_2)(r_3 + r_2)}{{r_2}^2 {r_3}^2} = 2 \sin\gamma \cos\gamma \sin 2\beta \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

folglich

$$r_3 - r_2 = \frac{(r_2\ r_3)^2}{r_2 + r_3} \cdot 2 \sin\gamma \cos\gamma \sin 2\beta \cdot \frac{\varepsilon^2}{b^2}.$$

Die Differenz z zwischen dem in der Mitte liegenden Halbmesser r_1 und den beiden äußeren giebt

$$r_2 r_3 = (r_1 + z)(r_1 - z) = {r_1}^2 - z^2.$$

Es ist aber z voraussichtlich ein kleiner Bruchteil eines Kilometers, z^2 also nur wenige Millionstel, während ${r_1}^2$ über 40 Millionen Ganze hat und selbst bei siebenstelligen Logarithmen in den Einern sich gar nicht genau bestimmen läßt. Wir müssen also z^2 in der Rechnung unterdrücken und statt $r_2 r_3$ nur ${r_1}^2$ setzen. Dadurch verwandelt sich der erste Bruch auf der rechten Seite obiger Gleichung in $\frac{{r_1}^4}{2 r_1}$ und sie selbst in

$$r_3 - r_2 = {r_1}^3 \sin\gamma \cos\gamma \sin 2\beta \cdot \frac{\varepsilon^2}{b^2}.$$

$r_1 \sin\gamma$ bedeutet die Hälfte der Strecke s und $\cos\gamma$ wird, da γ weniger als 1 Minute beträgt (Nr. 141, 2), zu 1, und somit hat man zur Rechnung die Formel

$$r_3 - r_2 = \left(\frac{r_1}{b}\right)^2 \cdot \varepsilon^2 \sin 2\beta \cdot \tfrac{1}{2} s.$$

Mit $\log \varepsilon^2 = 0{,}8301141.8 - 3$ erhält man (nun mit guter Übereinstimmung bei sieben- und fünfstelligen Logarithmen)

$$r_3 - r_2 = 10{,}62586^m \ (10{,}6258^m).$$

Ergebnis. In der wagerecht laufenden Friedrichstraße muß man wegen der scheinbar geringen Abplattung der Erde in einem Hause am Nordende 10,6 Meter, also nahezu drei Treppen hinaufsteigen,*) um ebensoweit vom Mittelpunkte der Erde entfernt zu sein, wie die Leute, welche am Südende auf der Straße gehen. — Oder: Unter der Kugelfläche, die man um den Erdmittelpunkt mit dem nach dem Südende der Friedrichstraße gehenden Halbmesser beschreibt, biegt sich von der gemeinsamen Ausgangsstelle an die ellipsoidische Erdoberfläche so, daß das Nordende der Friedrichstraße schon $10{,}6^m$ unter der Kugelfläche hinstreicht.

Anmerkung. Für die in Nr. 233 ermittelte Breite war $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Dort wird $\sin 2\beta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ und nach Nr. 235, 2) $r_1^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$; mithin wird für diesen Parallelkreis (Turin)

$$r_3 - r_2 = \frac{a}{b}\varepsilon^2 \cdot \tfrac{1}{2} s.$$

Für eine ebenso lange Strecke $s = 3240^m$ steigt dort $r_3 - r_2$ auf $10{,}99266^m$ $(10{,}9926^m)$. [Und für $s = 1000^m$ kommt $3{,}392795^m$, als Bestätigung für die auf die zweite Frage in Nr. 234 erteilte Antwort, wo bei der Rechnung ein Kreisbogen genommen wurde. —] Südlich von diesem Parallelkreise nimmt die Differenz bis zum Äquator ab wegen des Faktors $\sin 2\beta$, obgleich der Koefficient $\left(\frac{r_1}{b}\right)^2$ sich langsam noch etwas weiter von 1 entfernt.

237. Lage des mittleren Erdhalbmessers. Zu welcher geographischen Breite gehört der mittlere Halbmesser des Erdsphäroids? (Nr. 226.)

Auflösung. Aus der Ellipsengleichung hat man durch die geocentrische Breite β

$$b^2 r^2 \cos^2\beta + a^2 r^2 \sin^2\beta = a^2 b^2.$$

Hieraus werde $\operatorname{cotg}\beta$ entwickelt in Rücksicht auf die Formel in Nr. 220, 1). Man erhält

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - r^2}}.$$

Wegen der Genauigkeit der Rechnung hat man aber die kleinen Differenzen zu vermeiden, und deshalb werde für r sein Wert $a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}$ eingesetzt; dann kürzt sich der Bruch durch $a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}}$ und der Ausdruck erhält die Form

*) Aula des Friedrichs-Gymnasiums.

$$\cot g\,\varphi = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{4}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

die sich durch den Hilfswinkel u aus $\cot g\, u = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ verwandelt in

$$\cot g\,\varphi = \frac{\cot g^4 u}{\sin u}.$$

Es ergiebt sich $\varphi = 35^0\,24'\,6{,}8''$ (6,4″).

Von den beiden hierdurch bestimmten Parallelkreisen trifft der eine die Nordküste der Insel Kandia (Kreta) und schneidet von Afrika den nördlichsten Streifen von Algerien ab; der andere läuft $\frac{2}{3}$ Grad südlich von der Südspitze Afrikas hin.

Frage. Von der mit dem mittleren Halbmesser r um den Erdmittelpunkt zu beschreibenden Kugel liegt welcher Bruchteil ihrer Oberfläche innerhalb und welcher außerhalb des Sphäroids?

Antwort. Das Verhältnis der Zone zur Kugelfläche wird durch $\sin\beta$ angegeben, und ist 0,5767. Also trotzdem die geographische Breite der beiden gemeinsamen Parallelkreise nur etwa 35° beträgt, liegen fast schon $\frac{7}{12}$ der Kugelfläche innerhalb und nur $\frac{5}{12}$ außerhalb des Sphäroids.

238. Zusammenstellung der Ergebnisse für die Gestalt des Erdsphäroids.

Nr.	Geograph. Breite $\varphi =$	Ortsangabe	Abweichung des Halbmessers vom mittleren Erdhalbmesser r $r_1 - r =$	Seehöhe es Ortes $h =$	Höhe des Ortes über der mittleren Kugelfläche $r_1 - r + h =$
1.	90°	Nordpol	— 14 394 m	0 m	— 14 394 m
2.	71° 15′	das Nordkap von Europa	— 12 144	500	— 11 644
3.	60°	Christiania	— 8 958	8	— 8 950
4.	52° 31′	Berlin	— 6 351	34	— 6 317
5.	46° 33′	Berner Alpen:			
		Finsteraarhorn	— 4 129	4 275	+ 146
		Jungfrau		4 167	+ 38
6.	45° 50′	der Montblanc	— 3 860	4 810	+ 950
7.	45° 6′	Turin	— 3 584	250	— 3 334
8.	42° 33′	Pyrenäen, Maladetta	— 2 625	3 480	+ 855
9.	40°	Cuenza bei Madrid	— 1 671	1 300	— 371
10.	37° 42′	der Ätna	— 828	3 320	+ 2 492
11.	35° 24′	die Nordküste der Insel Kandia	+ 0	0	0
12.	28°	der Pic von Teneriffa	+ 2 478	3 710	+ 6 188
		der Everest im Himalaya		8 840	+ 11 318
13.	15°	Kapverdische Inseln, Vulkan auf Fuego	+ 5 773	2 400	+ 8 173
14.	— 1° 30′	der Chimborazo	+ 7 196	6 530	+ 13 726
15.	0°	Äquator	+ 7 209	0	+ 7 209

Nach obigen Ergebnissen ist aus diesen Zahlen abzulesen:

Wenn die Erde aufhörte zu rotieren, würden die Meere bei ihrem starken Gefälle schnell nach beiden Polen abfließen. Der neue Meeresspiegel stellte annähernd dar die Kugelfläche vom mittleren Erdhalbmesser. Die beiden Polarmeere nähmen dann zusammen nur 5 Zwölftel der Erdoberfläche ein, während jetzt die Meere 9 Zwölftel bedecken; sie würden also fast auf die Hälfte ihrer jetzigen Ausdehnung eingeschränkt. Alles Festland bestände in einem äquatorialen Gürtel, der bis etwa $35\frac{1}{2}^0$ nördlicher und südlicher Breite sich erstreckte, und so breit wäre, wie Afrika lang ist.

Ganz Europa würde vom Nordmeere bedeckt. Es bliebe nur die Insel Kandia (Kreta), und von Spanien die Sierra Nevada als eine Insel von der Gestalt Kandias; denn selbst das höchste seiner Hochländer, das von Cuenza, käme gegen 400^m unter den Meeresspiegel. Nur hohe Berge ragten dort vereinzelt hervor; sogar der 2500^m hohe Kamm der Pyrenäen würde überflutet, und es blieben nur ihre Berge als eine Inselreihe übrig, die im Maladetta 850^m erreichte. Sicilien würde zu einer kleinen Ätna-Insel; denn der Meeresspiegel wüchse um mehr als 800^m; die Gipfel anderer hoher Berge Siciliens und Calabriens würden zu Klippen. Weiter nördlich wäre nichts sichtbar, als die höchsten Spitzen der Alpen. Läge der Mont Cenis, dessen Seehöhe 3584^m ist, genau auf dem Parallelkreise von Turin, so würde sein Scheitel bis an die Meeresfläche reichen; da er aber 8 Bogenminuten nördlicher liegt, so käme er ganz unter Wasser. Die Kuppe des jetzt 4810^m hohen Montblanc gäbe eine Felsmasse von 950^m Höhe. Von den penninischen Alpen träten nur diejenigen Berge aus dem Meere hervor, die höher als 3900^m sind, von den $\frac{3}{4}$ Grad nördlicher liegenden Berner Alpen allein die, deren Höhe 4130^m übersteigt; es wäre das Finsteraarhorn eine 150^m hohe Pyramide, der Gipfel der Jungfrau eine 40^m hohe Klippe. Sie beide wären die nördlichsten Spuren von Europa. Berlin läge 6300^m unter dem Meeresspiegel, Christiania 8950^m, der Fuß des Nordkaps schon 12100^m, endlich der jetzige Nordpol 14400^m.

Nicht so bedeutend, wie diese Meerestiefen fielen, wüchsen die Höhen des Gürtel-Kontinents. In 28^0, der geographischen Breite des Pics von Teneriffa und des Everest im Himalaya, käme die Erweiterung des neuen Meeresspiegels 2480^m tiefer als jetzt; die Seehöhe des Pics, 3710^m, würde dann 6190^m, also 1380^m mehr, als der Montblanc wirklich besitzt; und der Everest käme von 8840^m auf 11300^m. Die gebirgigen Kapverdischen Inseln verwandelten sich, durch das Versinken der Meeresfläche in eine Tiefe von 5770^m, in ein Alpenland mit weit mächtiger aufragenden Bergen, als die der Schweiz; denn der 2400^m hohe Vulkan auf Fuego käme auf 1,7 der Montblanc-Höhe. Unter dem Äquator würde der Fußpunkt

der Seehöhe in eine Tiefe von 7209^{m} rücken, also dort halb so viel sinken, wie er an den Polen steigen müßte. Der Chimborazo, in $1\frac{1}{2}$ Grad südlicher Breite, erhielte dadurch statt 6530^{m} 13730^{m} Seehöhe und würde, ohne sich zu verändern, der höchste Berg der Erde.

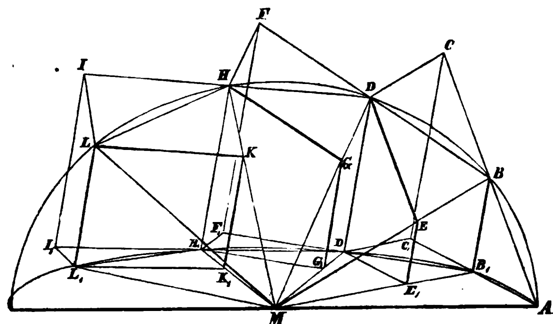
Diese Betrachtung läßt deutlich erkennen, in welcher Weise das Erdsphäroid von der Kugelgestalt abweicht.

239. Die Sphäroidgestalt als Beweis für die Achsendrehung der Erde. (Zu Nr. 157 bis 160 gehörig.) Da die Länder der gemäßigten und kalten Zonen nicht überflutet sind, so ist die Oberfläche der Gesamt-Meere eine Sphäroidfläche. Die Gleichgewichtsgestalt einer Flüssigkeit kann aber nur dann sphäroidisch sein, wenn sie rotiert, wie dies der Plateausche Versuch mit der Ölkugel, die in einem Alkohol- und Wasser-Gemische von demselben specifischen Gewichte schwimmt, bestätigt. Mithin ist die Sphäroidgestalt ein Beweis für die Achsendrehung der Erde.

Daß die Gestalt der Himmelskörper mit der Umdrehung in Zusammenhang steht, tritt uns deutlich vor Augen bei den Planeten Jupiter und Saturn und bei der Sonne. Die beiden Planeten, welche nur 10 Stunden zu einer Umdrehung brauchen, zeigen starke Abplattungen. Bei der Sonne dauert eine Umdrehung $25\frac{1}{4}$ Tage, und bei ihr ist eine Abplattung nicht wahrnehmbar. (Nr. 163 und 164.)

§ 29. Die Schwerkraft der Erde.

240. Das Pendel. Wenn man die Figur 76 zu Nr. 188 auf eine unter beliebigem Winkel durch M gelegte Ebene rechtwinklig oder in schiefer Richtung projiziert (Figur 90), indem man eine



Figur 90. Schiefe Projektion der Schwungkraft-Figur.

Gerade, parallel der gewählten erste Lage, durch alle Linien der Figur herumführt, so entstehen in der Projektionsebene wieder Parallelogramme, in denen aber die Seiten B_1E_1, D_1G_1, ... nicht mehr einander gleich sind, vielmehr wird

$$B_1E_1 = \frac{BE}{BM} \cdot MB_1 = \frac{c}{r} MB_1, \quad D_1G_1 = \frac{c}{r} MD_1, \ldots.$$

Daraus folgt: Soll ein materieller Punkt die länglich runde Bahn $AB_1D_1H_1$ .... durchlaufen gleichzeitig mit dem, welcher die Kreisbahn ABDH .... beschrieb, so müssen an den entsprechenden Stellen der Bahn Krafteinwirkungen eintreten, welche den derzeitigen Abständen vom Mittelpunkte proportional sind. Ist f die Kraft, welche den Punkt in der Einheit der Entfernung zum Mittelpunkte treibt, so beträgt demnach die für den Abstand MA rf. Sie ist die Schwungkraft, welche den ersten Punkt in der Kreisbahn während T Sekunden herumführte (Nr. 188), also

$$rf = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r, \qquad \text{woraus } T = \frac{2\pi}{\sqrt{f}}.$$

In derselben Zeit durchlief der zweite Punkt die längliche Bahn. Das Ergebnis für T zeigt, daß die Umlaufszeit unabhängig ist von der Größe und Form der Bahn. (Beispiel: Eine gespannte Saite giebt denselben Ton bei jeder Weite und Form der transversalen Schwingungen. Die Dauer einer Schwingung ist also immer gleich groß.) Dreht man die Projektionsebene so, daß sie nun rechtwinklig zur Kreisfläche liegt, so bewegt sich der zweite Punkt in einer geraden Linie hin und her.*)

---

*) Soll also ein Punkt eine elliptische Bahn in T Sekunden durchlaufen, so muß er von einer Kraft, deren Wirkung der Entfernung proportional ist, geführt werden, falls die Einwirkungen stets nach dem Mittelpunkte gerichtet sind; so daß, wenn R die derzeitige Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte bezeichnet, der Formelausdruck dieser Kraft ist

$$K = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R.$$

Nun liegt die Frage nahe: Wie lautet das Anziehungsgesetz, wenn der Punkt dieselbe elliptische Bahn in gleich großer Zeit durchlaufen soll unter Führung einer Kraft, deren Einwirkungen stets nach einem Brennpunkte gerichtet sind?

Es stelle Figur 89 in Nr. 220 die elliptische Bahn dar, welche der Punkt in beiden Fällen in T Sekunden ganz durchlaufen soll. Dort ist gezeigt [in der Erklärung am Ende von 3)], daß die Biegung des sehr kleinen Bogens B_1B die des Krümmungskreises vom Radius $BM = \varrho$ ist. Den Punkt dort in solchem Bogen weiter zu führen, sind in den nteln der Sekunde Einwirkungen einer Schwungkraft von der Stärke $\frac{1}{n}\frac{v^2}{\varrho}$ erforderlich. (Nr. 188.) Die auf der Normale BK liegende Komponente der führenden Kraft muß diese leisten. Im ersten Falle, wo die Krafteinwirkung $\frac{1}{n}K$ die Richtung BO hat

Eine solche Kraft, die der Entfernung von einem Punkte proportional wirkt, haben wir in der von der Schwerkraft der Erde übrig bleibenden, welche ein mathematisches Pendel in sehr kleinen Schwingungen bewegt. Denn hat man den materiellen Punkt P (Figur 91), welcher durch die Linie PA = l mit dem Aufhängepunkte A verbunden ist aus seiner senkrechten Ruhelage gebracht,

---

(und ohne die eigene Geschwindigkeit den Punkt B_1 in Figur 90 schon in $\frac{1}{n}$ Sekunde bis E_1 bringen würde), ist die Komponente $\frac{1}{n} K \cos\delta$. Hier muß also werden

$$\frac{1}{n} K \cos\delta = \frac{1}{n} \frac{v^2}{\varrho}.$$

Im andern Falle, wo die Krafteinwirkungen stets durch den Brennpunkt F gehen sollen, bildet die Richtung BF solcher Einwirkung $\frac{1}{n} S$ mit der Normale BK den Winkel FBK $= \alpha$ und giebt die Komponente $\frac{1}{n} S \cos\alpha$, deren Größe nur $\frac{1}{n} \frac{{v_1}^2}{\varrho}$ zu werden braucht, da unter Führung dieser Kraft der umlaufende Punkt in B eine andere, wohl kleinere Geschwindigkeit v_1 haben wird. Dividiert man die Gleichung

$$\frac{1}{n} S \cos\alpha = \frac{1}{n} \frac{{v_1}^2}{\varrho}$$

durch jene, so hat man

$$\frac{S \cos\alpha}{K \cos\delta} = \frac{{v_1}^2}{v^2}.$$

Nach dem zweiten Keplerschen Gesetze ist der vom Radius-Vektor des fortschreitenden Punktes in dieser ntel Sekunde beschriebene Ausschnitt der Tnte Teil vom Inhalte der ganz durchlaufenen Ellipse; also da seine sehr kleine Grundlinie $\frac{v_1}{n}$ ein Teilchen der Tangente SN ist und die Höhe dazu BF $\cos\alpha$ wird,

$$\frac{1}{2} \frac{v_1}{n} r \cos\alpha = \frac{\pi a b}{T n}$$

und im andern Falle, beim Umlaufe um den Mittelpunkt, kommt durch BO = R

$$\frac{1}{2} \frac{v}{n} R \cos\delta = \frac{\pi a b}{T n}$$

woraus

$$\frac{v_1}{v} = \frac{R \cos\delta}{r \cos\alpha};$$

so daß nun

$$\frac{S \cos\alpha}{K \cos\delta} = \frac{R^2 \cos^2\delta}{r^2 \cos^2\alpha}$$

ist und durch Einsetzen des zu Anfang angegebenen Wertes von K für die aus dem Brennpunkte wirkende Kraft der Ausdruck erhalten wird

$$S = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{R^3 \cos^3\delta}{\cos^3\alpha} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Verbindet man B auch mit dem andern Brennpunkte F_1, so wird der Winkel KBF_1 gleich dem auf der andern Seite der Normale liegenden Winkel KBF $= \alpha$ und deshalb ist die von F_1 auf die Tangente SN zu fällende Senkrechte $= BF_1 \cos\alpha$. Sie und die von F aus schon gezogene Senkrechte sind die Parallelen eines

und ihn dann losgelassen, so wird er in dem Punkte B seiner Bahn von einer Einwirkung der Schwerkraft, die wir mit $\frac{g}{n}$ bezeichnen (die also allein den Punkt in $\frac{1}{n}$ Sekunde die Strecke $\frac{g}{n^2} = BC$ zurücklegen ließe) getrieben mittels der Komponente $BE = \frac{1}{n^2} \frac{g}{l} BF$, wofür wir, da BP sehr klein sein soll, schreiben dürfen $BE = \frac{1}{n^2} \frac{g}{l} BP$. BE ist also solche Strecke wie B_1E_1 oder D_1G_1 in Figur 90,

---

Trapezes, dessen Mittellinie von O her wird $R \cos \delta$, so daß man mit $BF_1 = r_1$ und $r + r_1 = 2a$ hat

$$R \cos \delta = \tfrac{1}{2} (r \cos \alpha + r_1 \cos \alpha) = a \cos \alpha.$$

Dadurch ergiebt sich

$$S = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

An einer andern Stelle der elliptischen Bahn, wo die Entfernung des Punktes vom Brennpunkte F r_2 ist, wirkt auf ihn vom Brennpunkte her die Kraft

$$S_2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}$$

daher

$$S : S_2 = r_2^2 : r^2$$

und dies zeigt ein ganz anderes Anziehungsgesetz, als bei der Bewegung unter Einfluß einer Mittelpunktskraft:

Soll die von einem Brennpunkte aus wirkende Kraft den Punkt in der elliptischen Bahn herumführen, so müssen ihre Anziehungen umgekehrt proportional den Quadraten der Entfernungen sein.

Demnach hält die Sonne vom Brennpunkte aus (Nr. 188 am Ende) irgend zwei Planeten in ihren Bahnen durch die Kräfte

$$S_1 = 4\pi^2 \frac{a_1^3}{T_1^2} \cdot \frac{1}{r_1^2} \quad \text{und} \quad S_2 = 4\pi^2 \frac{a_2^3}{T_2^2} \cdot \frac{1}{r_2^2}.$$

Da nun nach dem dritten Keplerschen Gesetze bei den Planeten sich verhält

$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3, \quad \text{also} \quad \frac{a_2^3}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{T_1^2} \quad \text{ist,}$$

so kommt auch hier

$$S_1 : S_2 = r_2^2 : r_1^2$$

und das ist Newtons Gravitationsgesetz, abgeleitet aus den 3 Keplerschen Gesetzen. (Nr. 193 und 246.)

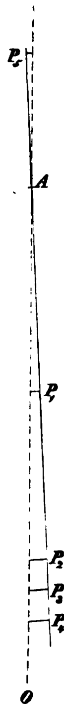
[Nach G. Helm in Grunert-Hoppes Archiv der Mathem. und Phys., 63. Teil (1879) S. 326.]

Figur 91. Pendel.

folglich ist die das Pendel jetzt bewegende Kraft, welche im stande war, schon in $\frac{1}{n}$ Sekunde durch Einzel-Wirkung die Geschwindigkeit n BE zu erteilen, $n^2 BE = \frac{g}{l} BP$. Die Größe der Kraft ändert sich also mit BP; sie ist dem Abstande des Punktes von P proportional, und würde also in der Entfernung 1 die Stärke $f = \frac{g}{l}$ erlangen. Mithin vergehen, bis das Pendel einen Hin- und Hergang vollführt, nach obiger Formel $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ Sekunden, eine einfache kleine Pendelschwingung dauert also

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ Sekunden.}$$

241. Die reduzierte Pendellänge und das einfache Sekundenpendel. Ein physisches Pendel ist als aus unzählig vielen mathematischen Pendeln zusammengesetzt zu betrachten. Jeden materiellen Punkt desselben, auch die der Pendelstange, muß man mit dem Aufhängepunkte durch eine gerade Linie verbunden denken. Die kürzeren dieser einfachen Pendel wollen, der Formel gemäß, schneller schwingen als die längeren, werden also, da sie mit allen durch Kohäsion verbunden sind, dem physischen Pendel eine etwas kürzere Schwingungsdauer geben, als die ist, welche man für seine wirkliche Länge nach jener Formel etwa erwarten möchte. Es läßt sich aber, wie wir sogleich zeigen werden, die (kürzere) Länge desjenigen mathematischen Pendels berechnen, welches mit dem betrachteten physischen Pendel gleich schnell schwingt. Diese Länge heißt die reduzierte Pendellänge. Trägt man sie vom Aufhängepunkte aus auf der durch den Schwerpunkt des Pendels gehenden Geraden ab, so findet man den Schwingungspunkt des physischen Pendels.



Figur 92. Zum physischen Pendel.

An einer unbiegsamen geraden Linie, welche um den festen Punkt A drehbar ist (Figur 92), seien in den Punkten $P_1, P_2, \ldots P_5$, deren Entfernungen von A $r_1, r_2, \ldots$ sind, die Massen $m_1, m_2, \ldots$ angebracht. Bewegt sich derjenige Punkt der starren Geraden, welcher um die Längeneinheit vom Drehpunkte entfernt ist, mit der Geschwindigkeit ω (man nennt sie die Winkelgeschwindigkeit der Drehung), so haben jene Massen die Geschwindigkeiten $r_1\omega, r_2\omega, \ldots$ Als Einheit der Kraft denken wir

diejenige, welche der Masseneinheit (einem Kubikcentimeter Wasser) in einer Sekunde eine Geschwindigkeit, die gleich der Längeinheit ist, giebt. Um also eine Masseneinheit z. B. im Punkte P_4 in die Geschwindigkeit $r_4 \omega$ zu versetzen, gehört eine $r_4 \omega$mal so große Kraft. Da aber m_4 Masseneinheiten dort zu bewegen sind, ist die Kraft $m_4 r_4 \omega$ erforderlich. Das Produkt aus dieser Zahl und der Entfernung r_4 von A, welches das statische Moment dieser Kraft in Bezug auf den Aufhängepunkt heißt, giebt die Größe der Kraftwirkung an; es ist $m_4 r_4{}^2 \omega$, und entsprechend die übrigen. Die Gerade um den Punkt A mit der Winkelgeschwindigkeit ω zu drehen, vermag aber eine einzige Kraft, wenn ihr Moment in Bezug auf den Drehpunkt gleich ist der Summe der Momente aller einzelnen Kräfte, $= \omega (m_1 r_1{}^2 + m_2 r_2{}^2 + \ldots)$, wofür man kürzer schreibt $\omega \Sigma m r^2$.

Zu den zu bewegenden Massen, deren Momente hier alle zu addieren sind, gehört auch die Luft, welche jene an einen andern Ort kommenden Massen erst dort verdrängen müssen. Allein da diese selber wieder die ihr benachbarten Luftteilchen fortstoßen muß, so haben die verdrängenden Massen ihr eine etwas stärkere Bewegung, als zum bloßen Platzmachen erforderlich wäre, mitzugeben. Wir wollen diese Summanden besonders hinschreiben und bezeichnen mit $k \Sigma m' r^2$, wo der durch Versuche zu ermittelnde Koefficient k voraussichtlich nicht viel über 1 betragen wird, da der Stoß der verdrängten Luft wohl eine in der umgebenden Luft nicht weit gehende Wirkung hat. Demnach lautet der gefundene Ausdruck $\omega (\Sigma m r^2 + k \Sigma m' r^2)$. Hatte die belastete Gerade schon eine Winkelgeschwindigkeit, so wird dieselbe durch die Kraftwirkung jetzt um ω vermehrt.

Wir haben nun zu untersuchen, wie die Schwerkraft der Erde solche Wirkung leistet. Ist das Pendel um den Winkel α aus der Gleichgewichtslage gebracht, so erteilt eine Einzeleinwirkung der Schwere (Figur 91 $nBE = nCD$) die Geschwindigkeit $n \cdot \frac{g}{n^2} \sin \alpha$; die tangentialen Komponenten der Kräfte, welche die Massen $m_1, m_2 \ldots$ durch solche Einwirkungen bewegen, sind also, in Gewichtseinheiten (Gramm) ausgedrückt, $(m_1 - m_1') g \sin \alpha$, $(m_2 - m_2') g \sin \alpha, \ldots$ (denn jeder in einer tropfbaren oder luftförmigen Flüssigkeit befindliche Körper verliert durch Auftrieb von seinem Gewichte so viel, als die von ihm verdrängte Flüssigkeit wiegt), und ihre Momente sind

$$(m_1 - m_1') r_1 g \sin \alpha, \quad (m_2 - m_2') r_2 g \sin \alpha, \ldots$$

und $$- (m_5 - m_5') r_5 g \sin \alpha,$$

weil r_5 die entgegengesetzte Richtung hat. (Figur 92.) Alle diese Kräfte lassen sich durch eine einzige ersetzen, deren Moment in Bezug auf den Drehpunkt ist $g \sin \alpha \Sigma (m - m') r$ oder, entsprechend der obigen Schreibweise, $g \sin \alpha (\Sigma m r - \Sigma m' r)$.

Aus beiden Entwicklungen für die neu eintretende Bewegung hat man die Gleichung

$$\omega(\Sigma m r^2 + k\,\Sigma m' r^2) = g \sin\alpha\,(\Sigma m r - \Sigma m' r)$$

aus welcher wir die für den Winkel α von der Schwerkraft jetzt hinzugefügte Winkelgeschwindigkeit ω berechnen könnten.

Wir wenden uns aber sogleich zur Bestimmung der Länge des zum gegebenen Pendel gehörigen einfachen Pendels. Die Gleichung lautet für ein mathematisches Pendel, welches sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt,

$$\omega m l^2 = g \sin\alpha\, m l$$

und wenn man diese durch die darüber stehende dividiert, so ergiebt sich die reduzierte Pendellänge

$$l = \frac{\Sigma m r^2 + k\,\Sigma m' r^2}{\Sigma m r - \Sigma m' r}.$$

Obige Formel für das mathematische Pendel $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ wird beim einfachen Sekundenpendel, dessen Länge mit λ bezeichnet werden soll, zu

$$1 = \pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

woraus durch dividieren gefunden wird

$$\lambda = \frac{l}{t^2}.$$

Endlich hat man die Schwerkraft der Erde

$$g = \pi^2 \lambda.$$

242. Länge des einfachen Sekundenpendels und die Schwerkraft für Berlin. Es werde die reduzierte Pendellänge für das unter Nr. 157 beschriebene Foucaultsche Pendel des Königstädtischen Realgymnasiums berechnet, und daraus die Länge des einfachen Sekundenpendels, so wie die Schwerkraft für Berlin bestimmt.

Bei jenem Pendel fängt der Kupferdraht mit einer kleinen Öse an $a = 0{,}035^m$ unter dem Aufhängepunkte (so viel beträgt nämlich die Hakenlänge unter der Schneide), er hat die Länge $b = 18{,}625^m$, ist $0{,}106^{cm}$ dick*) und wiegt $p = 143{,}2^g$. Er ist ein kupferner langer Cylinder, den man in eine außerordentlich große Anzahl sehr dünner Scheiben von der Höhe $\frac{b}{n}$ zerlegt denken

*) Die Dicke des Drahtes wurde gemessen mit einem Schönemannschen Meßkeil. (Poggendorffs Annalen der Physik, 146. Bd. S. 612.)

242.

möge. Der Schwerpunkt jedes solchen Blättchens liegt in der Mitte seiner Achse. Deshalb hat man die Produkte aus Gewicht*) und Entfernung und aus Gewicht und Quadrat der Entfernung

Nr.	$m_1 r_1 =$	$m_1 r_1^2 =$
1	$\frac{p}{n}\left(a + \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{n}\right)$	$\frac{p}{n}\left[a^2 + 1\, a \frac{b}{n} + \frac{1^2}{4} \frac{b^2}{n^2}\right]$
2	$+ \frac{p}{n}\left(a + \frac{3}{2} \frac{b}{n}\right)$	$+ \frac{p}{n}\left[a^2 + 3\, a \frac{b}{n} + \frac{3^2}{4} \frac{b^2}{n^2}\right]$
3	$+ \frac{p}{n}\left(a + \frac{5}{2} \frac{b}{n}\right)$	$+ \frac{p}{n}\left[a^2 + 5\, a \frac{b}{n} + \frac{5^2}{4} \frac{b^2}{n^2}\right]$
.	$+ \quad \vdots \qquad \vdots$	$+ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$
n	$+ \frac{p}{n}\left(a + \frac{2n-1}{2} \frac{b}{n}\right)$	$+ \frac{p}{n}\left[a^2 + (2n-1)\, a \frac{b}{n} + \frac{(2n-1)^2}{4} \frac{b^2}{n^2}\right]$

folglich

$$m_1 r_1 = \frac{p}{n}\left[na + \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot 2n \frac{b}{n}\right] = p\left[a + \frac{1}{2} b\right]$$

und

$$m_1 r_1^2 = \frac{p}{n}\left[na^2 + \frac{n}{2} \cdot 2na \frac{b}{n} + \frac{1}{4} \frac{(2n+1)\, 2n\, (2n-1)}{6} \frac{b^2}{n^2}\right]$$

$$= p\left[a^2 + ab + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right) b^2\right]$$

also für $n = \infty$

$$m_1 r_1^2 = p\left[a(a+b) + \frac{1}{3} b^2\right].$$

In unserem Falle wird

$$a + \frac{1}{2} b = 9{,}3475 \quad \text{und} \quad a(a+b) + \frac{1}{3} b^2 = 116{,}2833.$$

Am unteren Ende des Drahtes sitzt ein Stahlkügelchen, welches wie ein Knoten in einer messingenen Kapsel steckt. Dadurch, daß man sie in den höchsten Punkt der Pendelkugel schraubt, wird diese an dem Drahte befestigt. Bei der Pendelkugel hat jeder größte Kreis 484^{mm} Umfang, also beträgt der Radius $7{,}7031^{cm}$. In der Aufhängung bildet der Haken mit seiner Schneide einen stählernen Körper, welcher $m_5 = 19{,}7^g$ wiegt und dessen Schwerpunkt $r_5 = 0{,}002^m$ über dem Aufhängepunkte sich befindet. Ferner ist zur Berechnung des Gewichtes der verdrängten Luft noch mitzuteilen, daß die Bestimmung der Schwingungsdauer und der Gesamtlänge des Pendels stattfand am 12. Okt. 1877 bei einer Temperatur von 15° C. und bei 763^{mm} Barometerstand. Es wiegt in Berlin ein Liter trockene

---

*) Da das Gewicht in Grammen angegeben ist, so drückt es die Masse aus, gemäß der Erklärung des Gramm.

atmosphärische Luft bei 0° C. und 760mm Barometerstand 1,2936g.*) Daraus und aus dem Ausdehnungskoefficienten $\alpha = 0{,}003665$ ergiebt sich, daß an jenem Tage ein Kubikcentimeter Luft wog

$$c = \frac{763}{760} \cdot \frac{0{,}0012936}{1 + 15\alpha} \text{ Gramm} = 0{,}001231^{g}.$$

Demnach hat man für die 5 Teile des Pendels aus obigen und den folgenden Angaben die dahinter gesetzten berechneten Größen:

Nr.	Teile des Pendels	Messung			Rechnung			
		Gewicht	Entfernung r	Rauminhalt	mr	mr^2	m'r	$m'r^2$
1	Kupferdraht	143,2g	siehe oben	16,44ccm	1 338,6	16 651,8	0,2	2,4
2	Knotenkapsel	10,6	18,667m	1,09	197,9	3 693,6	0,0	0,5
3	Pendelkugel	20 070**)	18,746	1 914,63	376 232,2	7 052 849,2	44,2	828,2
4	Spitze unter der Kugel	34,4	18,858	7,02	648,7	12 233,5	0,2	3,1
5	Haken mit Schneide	19,7	— 0,002	—	— 0,0	0,0	— 0,0	0,0
				Σ	378 417,4	7 085 428,1	44,6	834,2

Bei seiner Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels in der Königsberger Sternwarte im Jahre 1826 ließ Bessel zur Ermittelung des Koefficienten k erst eine Kugel von Messing, dann eine ebenso große von Elfenbein an demselben Drahte schwingen. Da das Pendel in beiden Fällen genau gleiche Größe und Form hatte, so übte die Luft bei beiden Versuchen dieselbe Einwirkung aus, k mußte also denselben Wert haben. Demnach lieferten diese Beobachtungen (wenn man den Ausdruck 1 in Nr. 241 in den von λ einsetzt) für die Länge des einfachen Sekundenpendels zwei Gleichungen von der Form

$$\lambda = a + kb = c + kd$$

wo die durch die Messungen bestimmten Größen c und d erheblich verschieden von a und b ausfallen mußten, weil die Elfenbeinkugel 4,6mal so leicht war als die von Messing. Aus dieser Gleichung wird k gefunden. Darauf ließ er jede der beiden Kugeln an einem

*) W. Lasch, Bemerkungen über das absolute Gewicht der atmosphärischen Luft in Berlin. Poggendorffs Annalen der Physik, Ergänzungsband III (nach Bd. 87) (1853) S. 321. Bei 0° C. und 760mm Barometerstand wiegt ein Liter trockene atmosphärische Luft in Berlin fast 0,0005g mehr als in Paris, wegen des aus dem Breitenunterschiede und aus der ungleichen Seehöhe hervorgehenden andern Wertes der Schwerkraft der Erde.

**) Das arithmetische Mittel aus 20 Wägungen der Kugel, welche nur in den Einern vom Mittel abwichen, war 20069,9g. Die dazu gebrauchte Schönemannsche Brückenwage erwies ihre Empfindlichkeit dadurch, daß, wenn zu den 20070g der Kugel noch 1g ohne Stoß hinzugelegt wurde, die Stellung der Zunge sich merklich änderte.

viel kürzeren Drahte schwingen und fand k von gleicher Größe. Auch ergab sich, daß k bei verschieden weiten Schwingungen unverändert blieb. Bei seinen Pendelversuchen neben der Berliner Sternwarte im Jahre 1835 wandte er, um die Ungleichheit der Gewichte bei demselben Raume noch größer zu machen, einen hohlen Platincylinder von 34,5 ^{mm} Durchmesser und Höhe an, der durch einen hineinpassenden Platinzylinder ausgefüllt werden konnte. Diese Versuche ergaben $k = 1,4699$.

Da demnach der Koefficient k von der Länge des Pendels unabhängig ist, so können auch wir diesen Zahlenwert anwenden. Es wird $k \Sigma m' r^2 = 1226,2$ und nun

$$l = 18,72929^{m}.*)$$

Wir wollen nun auch den Schwerpunkt dieses sehr langen Pendels aufsuchen. Bezeichnet s seinen Abstand vom Aufhängepunkte, so muß $s \Sigma m = \Sigma m r$ werden; daher

$$s = \frac{\Sigma m r}{\Sigma m}.$$

Beim Berechnen der Σm ist zu beachten, daß m_5, weil diese Masse oberhalb des Drehpunktes sich befindet, das negative Vorzeichen erhalten muß. Man findet $s = 18,6979^{m}$. Es ist also die Entfernung vom Aufhängepunkte bis zu

dem Kugelmittelpunkte	$r_3 = 18,7460^{m}$
dem Schwingungspunkte	$l = 18,7293$
dem Schwerpunkte	$s = 18,6979$

also liegt der Schwingungspunkt $r_3 - l = 16,7^{mm}$ und der Schwerpunkt schon 48,1 ^{mm} über dem Mittelpunkte der 20 ^{kg} wiegenden Kugel.

Zur genauen Bestimmung der Länge λ des einfachen Sekundenpendels ist die Dauer sehr kleiner Schwingungen unseres Foucaultschen Pendels mit größter Schärfe zu ermitteln. Das dabei benutzte Chronometer wurde vor und nach dem Beobachungstage wiederholt mit einer Normaluhr der Berliner Sternwarte verglichen. Dadurch ist festgestellt, daß es zu der Zeit in 24 Stunden um 1,20 ^{s} zurückblieb, also stündlich 0,05 ^{s} nachging. Der in der folgenden Tabelle hinter den Sekunden stehende Summand ist die hieraus hervorgehende Verbesserung der Zwischenzeit.

Vor Beginn der Beobachtung wurde, während das Pendel ruhig hing, der senkrechte Faden eines Theodoliten auf die elfen-

*) Wie notwendig es ist, die Einwirkung der Luft zu berücksichtigen, wird deutlich, wenn man l ohne die Glieder m' berechnet. Man erhält dann schon 5,5 ^{mm} weniger; und das macht viel aus, denn dadurch wird die zu bestimmende Größe der Schwerkraft 9,80970 ^{m}, während wir mit Berücksichtigung der Luft finden werden $g = 9,81258^{m}$.

beinerne Spitze der Pendelkugel eingestellt und dann das Pendel in Schwingung versetzt. Von dem durch die Ruhelage auf der Grundfläche bestimmten Lotfußpunkte an war die Weite des Ausschlages zu Anfang $0{,}195^m$ und am Ende der Beobachtungsreihe $0{,}097^m$. Dies giebt mit der Länge des ganzen Pendels $R = 18{,}973^m$ den ersten Ausschlagswinkel $\alpha_1 = 0^0\,35'\,20''$ und den letzten $\alpha_2 = 0^0\,17'\,34''$; der mittlere Ausschlagswinkel war also $\alpha = 0^0\,26'\,27'' = 0{,}44^0$.

Während der Verfasser vorliegenden Buches bei den deutlich hörbaren Chronometerschlägen die halben Sekunden fortzählte, beobachtete er, durch das Fernrohr sehend, wann der Schlag einer halben Sekunde genau zusammentraf mit dem Augenblicke, in welchem die weiße Spitze unter der Pendelkugel gerade hinter dem senkrechten Faden war. Die gefundene Koincidenz wurde in Sekunde, Minute und Stunde aufgeschrieben. 1½ Stunde nach der fünften Notierung wurde mit Beobachten fortgefahren. In ungleichen Pausen wurden noch 6 Koincidenzen festgestellt. Da durch mehrmaliges Zählen von 100 und 200 Schwingungen die Dauer einer solchen Schwingung nahezu bis auf Tausendstel-Sekunden schon bekannt war, brauchte man bei diesen Beobachtungen die Pendelschwingungen nicht zu zählen; denn die vorläufige Größe der Schwingungsdauer mußte zwischen zwei Koincidenzen sehr nahe auf eine ganze Zahl (die Anzahl der Schwingungen) führen. Jede der 5 Anfangsbeobachtungen mit den 6 Schluß-Koincidenzen verbunden, giebt 30 Zwischenzeiten, und jede liefert eine Angabe für die Dauer einer Schwingung. Dem arithmetischen Mittel aus allen kommen folgende 10 nahe:

Nr.	Anzahl der Schwingungen	Zwischenzeit	Dauer einer Schwingung	Abweichung vom Mittel
1	1355	1h 38m 1,0 + 0,082s	4,340 282s	− 10
2	1424	1 43 0,5 + 0,086	299	+ 7
3	1446	1 44 36,0 + 0,087	309	+ 17
4	1452	1 45 2,0 + 0,088	281	− 11
5	1646	1 59 4,0 + 0,099	279	− 13
6	1662	2 0 13,5 + 0,100	313	+ 21
7	1665	2 0 26,5 + 0,100	300	+ 8
8	1715	2 4 3,5 + 0,103	294	+ 2
9	1812	2 11 4,5 + 0,109	292	0
10	1865	2 14 54,5 + 0,112	275	− 17

Mittel $t = 4{,}340\,292^s$.

Diese Schwingungsdauer $t = 4{,}340\,292^s$ liefert die Länge des einfachen Sekundenpendels an der Beobachtungsstelle in Berlin ($\varphi = 52^0\,31'\,20''$)

$$\lambda = 0{,}994\,222^m$$

und nun folgt die Größe der Schwerkraft daselbst

$$g_h = \pi^2 \lambda = 9{,}81258^{m}.^{*)}$$

Schließlich sind beide zurückzuführen auf die Erweiterung der Meeresfläche, senkrecht unter dem Beobachtungsorte. Es befindet sich der Schwerpunkt des Foucaultschen Pendels $h = 38{,}0^{m}$ über der Erweiterung der Ostsee.**) In dieser Höhe h ist die Schwerkraft g_h, am Meeresspiegel g, und es verhält sich (Nr. 193)

$$\frac{g}{g_h} = \left(\frac{r+h}{r}\right)^2 = \left(1 + \frac{h}{r}\right)^2$$

demnach mit Unterdrückung des Gliedes $\left(\frac{h}{r}\right)^2$

$$g = g_h\left(1 + \frac{2h}{r}\right) \doteq g_h + \frac{2h}{r} g_h.$$

Dies wird eingesetzt in den Ausdruck für das Sekundenpendel in Meereshöhe

$$\lambda_0 = \frac{g}{\pi^2}, \quad \text{also} \quad \lambda_0 = \frac{g_h}{\pi^2}\left(1 + \frac{2h}{r}\right).$$

Es ist aber $\frac{g_h}{\pi^2} = \lambda$, also hat man zu rechnen nach

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{2h}{r}\lambda.$$

---

*) Bessel erhielt bei der Berliner Sternwarte $\lambda = 440{,}7354$ Pariser Linien $= 0{,}994224^{m}$ und hieraus kommt für g am Beobachtungsorte schon $9{,}81260^{m}$. [F. W. Bessel, Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels für Berlin. Besonders abgedruckt aus den Abhandlungen der Akademie zu Berlin für 1835. Berlin 1837. S. 25.] Bessels höchst genaues Verfahren bestand darin, mit zwei Pendeln von bekannter Längendifferenz die Versuche anzustellen. Der Aufhängepunkt befand sich einmal an der Deckfläche eines auf einem Vorsprunge senkrecht stehenden eisernen Normalmaßstabes (es war eine Toise = $1{,}94904^{m}$), das andere Mal an der Grundfläche, auf welcher der Maßstab gestanden hatte. Während derselbe Körper in einer Versuchsreihe an dem langen Stahlfaden, in der folgenden an dem kurzen Faden Schwingungen vollführte, wurden ihre Koincidenzen mit dem Pendel einer Uhr, die fast 3^{m} weit gerade davor aufgestellt war, durch ein in derselben Richtung stehendes Fernrohr beobachtet. — Allein mancherlei Reduktionen hindern, solche Rechnung hier vorzulegen. Deshalb wurde obige Bestimmung der Schwerkraft mit dem Foucaultschen Pendel ausgeführt.

**) Von Prof. Sadebeck („Über die Seehöhe von Berlin", in der Zeitschrift der Gesellschaft für Erdkunde, 10. Bd. S. 300) wird angegeben nach den durch ein neues Nivellement verbesserten Bestimmungen von Baeyer

Marienturm, höchster Punkt $124{,}550^{m}$
Knopfmitte $121{,}291^{m}$

über dem Swinemünder Mittelwasser der Ostsee.

Aus beiden Angaben wurde durch trigonometrische Messung und durch Meßkette ermittelt, daß die Grundfläche des Foucaultschen Pendels $37{,}750^{m}$ und folglich der Schwerpunkt desselben $38{,}027^{m}$ über der Erweiterung des Mittelwassers der Ostsee liegt.

Hier ist $r = 6\,364\,803^m$. [Vergl. Nr. 235, 1) und 243. Der Erdkugelradius $6\,370\,260^m$ liefert für die Übertragung dasselbe.] Es ergiebt sich

an der Meeresfläche in der geographischen Breite $\varphi = 52^0\,31'\,20''$ (Berlin)

die Länge des einfachen Sekundenpendels $\lambda_0 = 0{,}994\,234^m$

und die Schwerkraft $g = 9{,}81270^m$.

243. Sitz der Erdsphäroid-Schwerkraft für Körper auf einem Meridiane in Berlin. Die Ellipse der Figur 93 bedeute einen mitten durch Berlin gehenden Meridian des Erdsphäroids. Ihn schneidet der Parallelkreis, welcher durch die Projektion des Kuppelcentrums der Berliner Sternwarte läuft, in B_1 und der Parallelkreis durch den Fußpunkt des Foucaultschen Pendels des Königstädtischen Realgymnasiums in B. Für den Punkt B der Meeresfläche gebe $BF = g$ die gemessene Schwerkraft an und $BC = DF = \gamma$ die Schwungkraft. Es ist die geographische Breite

von B $\varphi = 52^0\,31'\,19{,}7''$ und von B_1 $\varphi_1 = 52^0\,30'\,16{,}7''$.

Daraus findet man mittels der letzten Formeln in Nr. 235, 1) die geocentrischen Breiten

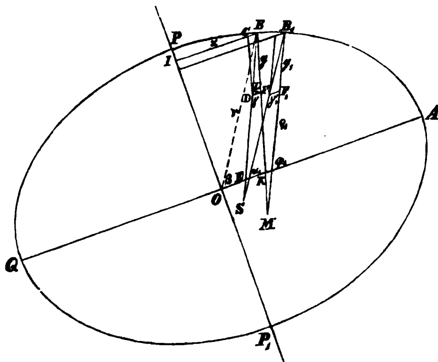
$\beta = 52^0\,20'\,3{,}28''$ (3,9'') und $\beta_1 = 52^0\,19'\,0{,}18''$ (3,1'')

sowie die Halbmesser des Erdsphäroids

$r = 6\,364{,}803^{km}$ und $r_1 = 6\,364{,}810^{km}$

und erhält nun*) die Schwungkraft aus

*) Bei fünfstelligen Logarithmen werde mit den aus siebenstelligen Logarithmen erhaltenen genauen Werten der Erdhalbmesser weiter gerechnet. (Nr. 236.)



Figur 93. Sitz der Erdsphäroid-Schwerkraft für Berlin.

$$\gamma = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^2 r \cos\beta, \quad \text{wo} \quad t = 86164^s \text{ ist,}$$

$$\gamma = 0{,}020681^m \quad \text{und} \quad \gamma_1 = 0{,}020689^m.$$

Da ein Wasserspiegel in B, welcher ein Teil der sphäroidischen Meeresfläche sein würde, sich rechtwinklig zur Richtung der Schwerkraft g stellt, so ist BF das Anfangsstück der Ellipsen-Normale BM. Diese schneidet die Ebene des Äquators unter dem Neigungswinkel BKA, welcher gleich der Polhöhe φ ist. (Vergl. die Figur 89 zu Nr. 220.) Deshalb kennen wir in dem Parallelogramme der Geschwindigkeiten BCDF die Seiten und Winkel und können die Teile berechnen, in welche die Diagonale BD den Winkel CDF $= \varphi$ zerlegt. Es werde bezeichnet der Winkel BDF mit α und FBD mit ϑ.

Für die Berliner Sternwarte ist nach Bessels Bestimmung die Schwerkraft, auf die Meeresfläche übertragen,

$$g_1 = 9{,}812676^m.$$

Diese und für B $g = 9{,}81270^m$ liefern mit obigen Werten von γ

$$\alpha = 52^0\,25'\,35{,}16'' \;(34{,}6'') \qquad \alpha_1 = 52^0\,24'\,32{,}11'' \;(32{,}35'')$$
$$\vartheta = 0 \;\; 5 \;\; 44{,}54 \;\; (45{,}1\;) \qquad \vartheta_1 = 0 \;\; 5 \;\; 44{,}59 \;\; (44{,}35\;).$$

Die Diagonalen BD und B_1D_1 geben die Richtungen an, in welchen die ganze Schwerkraft wirkt, die, weil sie die Schwungkräfte für B und B_1 hergegeben hat, nur als $BF = g$ und $B_1F_1 = g_1$ zur Erscheinung kommt. Die Richtungen BD und B_1D_1 treffen zusammen in S. Dies ist der Punkt, welcher für Berlin als Sitz der Schwerkraft des Erdsphäroids zu betrachten ist. Denn denkt man die ganze Masse der Erde im Punkte S vereint, so ist die Wirkung in B und B_1 so, wie sie in der That stattfindet. Der Anziehungspunkt S fällt nicht in den Erdmittelpunkt O, weil Winkel KBO, $\varphi - \beta = \delta$

$$\delta = 0^0\,11'\,16{,}42'' \quad \text{und} \quad \delta_1 = 0^0\,11'\,16{,}52''$$

größer ist als obiger Winkel KBS $= \vartheta$. Die Anschwellung am Äquator in A überwiegt durch größere Nähe die Anziehung des fernen Teiles in Q; dadurch kommt der Punkt S in die diesseitige Hälfte, in welche die senkrecht auf dem Berliner Meridian stehende Meridianebene das Erdsphäroid teilt.

Wie weit S von Berlin entfernt ist, wird durch den Winkel BSB_1 bestimmt. Da Winkel BEA $= \alpha$ und $B_1E_1A = \alpha_1$ ist, so wird der Winkel $S = \alpha - \alpha_1 = 1'\,3{,}05''$ (2,25''). Die Kleinheit der Differenz $\alpha - \alpha_1$ macht es fraglich, ob dieser Wert des Winkels S die hier erforderliche höchste Genauigkeit besitzt. Die Differenz selbst ist zu berechnen. Weil $\alpha = \varphi - \vartheta$ und $\alpha_1 = \varphi_1 - \vartheta_1$ ist, so wird

$$\alpha - \alpha_1 = (\varphi - \varphi_1) + (\vartheta_1 - \vartheta).$$

Dazu liefert der Sinussatz

$\vartheta = 344{,}54628''$ $(344{,}538'')$ $\vartheta_1 = 344{,}60294''$ $(344{,}585'')$

und nun hat man den Winkel

$$S = \alpha - \alpha_1 = 63{,}05666''\ (63{,}047'').$$

Ferner ist die Größe des Meridianbogens BB_1 genau festzustellen. Die Polhöhe seiner Mitte, $\varphi = 52^0\,30'\,48{,}2''$, giebt seinen Krümmungsradius (Nr. 221 und 224)

$$\varrho = \frac{b\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = 6\,375{,}911^{km}$$

und dadurch die Länge einer Meridian-Bogenminute in Berlin

$$m = 1{,}85468^{km}.$$

[Vergl. Nr. 141, 2) und 231.] Die Parallelkreise durch die beiden scharf bezeichneten Punkte B und B_1 haben folglich, wegen $\varphi - \varphi_1 = 1{,}05'$, den Abstand

$$d = 1{,}94741^{km}.$$

Mit der Größe dieses Bogens stimmt überein die Länge desjenigen Kreisbogens zwischen den Schenkeln des sehr kleinen Winkels BSB_1, welcher um S mit der mittleren Größe s der Schenkel SB und SB_1 zu beschreiben ist, und man findet diesen Radius

$$s = \frac{648\,000''}{\pi\,(\alpha - \alpha_1)''}\,d = 6\,370{,}178^{km}.$$

(Bei fünfstelligen Logarithmen kommt, weil sie $\alpha - \alpha_1$ um $0{,}01''$ kleiner ergaben, schon $6\,371{,}1^{km}$.)

Durch diese Größe s und durch den Winkel ϑ, den ihre Richtung mit der Normale des Meridianbogens bildet, ist der Ort des Anziehungspunktes S für Berlin bestimmt.

Anmerkung. Von der Decke eines Zimmers in Berlin hänge ein 3^m langes Senklot herab. In der sogenannten Ruhelage weist es auf den Krümmungsmittelpunkt M. Es ist um den Winkel ϑ nordwärts zu bewegen, damit es zum Sitze S der Schwerkraft zeige. Um dem 3^m langen Faden diese Ablenkung zu geben, muß man seinen tiefsten Punkt 5^{mm} nach Norden vorschieben. Die neue Lage würde das Senklot immer haben, wenn die Erde, ohne ihre Sphäroidgestalt zu ändern, aufgehört hätte zu rotieren. In die erste, um fünf Millimeter südwärts abweichende Lage wird es gebracht durch die langsame Achsendrehung der Erde, welche es als ein Centrifugalpendel nach außen schwenkt. — Die durch die Achsendrehung des Erdsphäroids veranlaßte Änderung der Stellung hat die Spitze der 96^m hohen Petrikirche in Berlin beim Aufbau um 16^{cm} nach Nord hinübergebracht. —

Soll das 3^m lange Senklot zum Erdmittelpunkte weisen, so muß man den unteren Endpunkt aus der Ruhelage um 10^{mm} [genauer $9{,}84^{mm}$, fast das Doppelte jener 5^{mm}] nach Nord führen. (Nr. 234, 1.) In dieser dritten Richtung befindet sich der Erdmittelpunkt in einer Entfernung von $6364{,}8^{km}$, in der zweiten liegt der Anziehungspunkt S $5{,}4^{km}$ weiter und in der scheinbaren Ruhelage noch $5{,}7^{km}$ weiter der Krümmungsmittelpunkt M. Die Punkte S und M sind also unter der Ebene des Äquators. Das Lot, vom Erdmittelpunkte auf die nördliche Schwerlinie BS gefällt, ist $10{,}241^{km}$ lang, und $10{,}242^{km}$ das auf die südliche B_1S. Dieses Vorbeilaufen der Schwerlinien vor dem Erdmittelpunkte erfolgt also in Abständen, die doch schon gleich dem 621sten Teile des Erdhalbmessers r_1 sind. [Die Entfernung des Punktes S von O ist $11{,}56^{km}$.] Von je zwei auf beiden Seiten in gleichen Abständen von BS einander gerade gegenüber liegenden, gleich dichten Massenteilchen heben die senkrecht auf BS stehenden Komponenten, in welche ihre Anziehungen des Körpers B zu zerlegen sind, sich gegenseitig auf. Deshalb tragen die nahe bei B zur Seite befindlichen Massen, trotz ihrer Nähe, nur wenig zur Gesamtanziehung bei. Bei den in der abgewandten Erdhälfte befindlichen Massen sind die in der Richtung BS liegenden wirksamen Komponenten alle fast gleich der ganzen Anziehung dieser fernen Teile. So kommt es, daß der Anziehungspunkt S großen Abstand von B, nahe beim Erdmittelpunkte, erhält.

Aus der Entwicklung ist klar, daß der seiner Lage nach bestimmte Punkt S nur für Berlin als Anziehungspunkt gilt. Für andere Orte erscheinen andere Punkte als Sitz der Schwerkraft des Erdsphäroids. Sie liegen stets zwischen dem Krümmungsmittelpunkte der Meridianstelle des Ortes und dem Erdmittelpunkte, — ausgenommen, wenn unter oder neben dem Orte eine unregelmäßige Massenverteilung vorhanden ist.

244. Die ganze Schwerkraft G der Erde in einer dem Erdkugelradius r gleichen Entfernung vom Anziehungspunkte. Um bei der Kleinheit des Winkels ϑ die Resultante BD genau zu erhalten (Figur 93), ist um B mit BF der Kreisbogen FL zu beschreiben und FLD als ein rechtwinkliges Dreieck zu nehmen. Dann wird die ganze Schwerkraft

$$G' = g + \gamma \cos\alpha$$

in B $G' = 9{,}82531^m$ und in B_1 $G_1' = 9{,}825297^m$.

Die Abstände OB und OB_1 unterscheiden sich um 7^m, also die Entfernungen SB und SB_1 um weniger. (MB und MB_1 sind gleich.) Die Mitte zwischen B und B_1 hat von S den Abstand $s = 6370178^m$ (Nr. 243); die Länge, welche wir Erdkugelradius nannten, ist $r = 6370260^m$. Solche Strecke, von S aus auf s abgetragen, ragt

aus der Sphäroidfläche hervor um $h = 82^m$. An ihrem Endpunkte vermindert sich die Schwerkraft zur Größe G, welche, wenn man $s = r - h$ einsetzt in $\frac{G}{G'} = \left(\frac{s}{r}\right)^2$, zu berechnen ist als

$$G = G' - \frac{2h}{r} G'.$$

Es liefert G'

von B $9{,}825057^m$ und von B_1 $9{,}825044^m$.

Die Größe der Verminderung wegen $h = 82^m$ lehrt, daß in einer Turmhöhe von etwa 80^m die Geschwindigkeit G schon um $\frac{1}{4}^{mm}$ kleiner wird. Deshalb ist abgekürzt zu nehmen

$$G = 9{,}825^m$$

für die Schwerkraft der Erde, mit welcher sie einen Körper in einer Entfernung, gleich dem Erdkugelradius $r = 6370{,}26^{km}$, anzieht.

245. Schwerkraft der Erde an einem Orte auf dem Äquator. Durch Bestimmung der Länge des einfachen Sekundenpendels an Orten, deren Polhöhe null ist, hat man gefunden, daß am Äquator die Schwerkraft, welche die Schwungkraft frei wirksam übrig läßt, beträgt $g_0 = 9{,}78019^m$. Die Schwungkraft am Äquator (Nr. 224) ist

$$\gamma_0 = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^2 \cdot a = 0{,}03392^m.$$

Mithin ist die ganze Schwerkraft daselbst $G_0 = 9{,}81411^m$.

Dies Ergebnis, mit dem G' für Berlin verglichen, lehrt: Die Schwerkraft auf dem Erdsphäroid nimmt mit der geographischen Breite nicht unerheblich zu.*)

Der Punkt, in welchem wir die ganze Masse der Erde vereinigt denken müssen, damit sie die Anziehung G_0 am Beobachtungsorte ausüben könne, hat von ihm den Abstand

$$s_0 = r\sqrt{G : G_0} = 6373{,}794^{km} \ (6373{,}80^{km}).$$

Er liegt also nur $4{,}573^{km}$ oder $\frac{1}{1400}$ des Äquatorialradius vor dem Erdmittelpunkte.

Hier, wie in Nr. 243, befindet sich der Anziehungspunkt in der diesseitigen Hälfte, in welche die auf dem Meridiane des Ortes senk-

*) Sabine (geb. 1788 zu Dublin) bestimmte (1822) auf Spitzbergen ($\varphi = 79^0 49' 58''$) die Länge des einfachen Sekundenpendels $\lambda_{80} = 0{,}9960373^m$. Daraus folgt das dortige $g_{80} = 9{,}83049^m$ und $G_{80} = 9{,}83156^m$. Dabei findet man, daß die Schwungkraft an jenem Orte, der nur 10^0 vom Pole entfernt ist, doch schon 6^{mm} beträgt.

recht stehende Meridianebene das Erdsphäroid teilt. Das Überwiegen der Anziehung der näheren Teile über die der anderen Erdhälfte wird geringer, wenn der angezogene Körper auf der Verlängerung des Äquatordurchmessers sich von der Erde fort bewegt. Mithin muß, je größer der Abstand des Körpers geworden ist, sein Anziehungspunkt um so näher dem Erdmittelpunkte gekommen sein. Schon für den Mond (in jeder Stellung) wird man den Mittelpunkt selbst als Sitz der Schwerkraft des Erdsphäroids nehmen. (Vergl. die Angabe über die Anziehung Jupiters am Schlusse der Nr. 188.)

246. Newtons Bestimmung des Mondabstandes. Aus der Umlaufszeit des Mondes, $27^d\,7^h\,43^m\,11{,}5^s$ (Nr. 209), ist durch das Gesetz der Gravitation und der Schwungkraft der Abstand des Mondes von der Erde zu berechnen. (Dabei wird die Bahn des Mondes um die Erde als Kreis betrachtet.) (Nr. 193 und 188.)

Der Abstand sei x Erdkugelradien r. Wegen G ist auch r in Metern zu nehmen. Es folgt sogleich

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{t}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{G}{r}} = 60{,}157 \text{ Erdradien.}$$

Die gute Übereinstimmung mit den auf ganz anderem Wege gefundenen Ergebnissen in Nr. 152 zeigt, daß es in der That die Schwerkraft ist, wodurch Erde und Mond zu einem Doppelgestirn verbunden werden.*)

247. Masse der Sonne. Die Schwerkraft an ihrer Oberfläche. Die Sonne bestehe aus m Erdmassen. Die Größe der Sonnenmasse ergiebt sich dadurch, daß sie im stande ist, die Erde in $365^d\,6^h\,9^m\,10{,}72^s$ in einer Entfernung von $f = 23\,340$ Erdkugelradien mittels

*) Von Newton nachgewiesen im Jahre 1682. Schon im Jahre 1666 nahm er, um das vermutete Gravitationsgesetz auf Richtigkeit zu prüfen, in obiger Gleichung die Schwerkraft als Unbekannte, um zu sehen, wie weit das Ergebnis mit Galileis Wert der Schwerkraft übereinstimmen würde. Nach den damals ihm zu Gebote stehenden Zahlenwerten setzte er nahe richtig den Mondabstand zu 60,4 Erdradien an; aber den Erdradius kannte man nur recht ungenau, nämlich um mehr als $^1/_8$ zu klein; und darum kam für die Schwerkraft ein um ebenso viel zu geringer Wert. Er mußte also die Sache auf sich beruhen lassen. Als er 1682 in einer Sitzung der Königlichen Gesellschaft erfuhr, welche Zahl Picard 1671 für den Erdradius gefunden, sah er, daß dieser um so viel größere Wert in jener Rechnung die Schwerkraft zutreffend liefern würde. Die Ahnung, das Weltall wirklich erschlossen zu haben, versetzte ihn so in Aufregung, daß er einen Freund bat, die kleine Rechnung nach der Formel auszuführen. Sie ergab für die Schwerkraft eine Zahl, die mit Galileis Messung fast ganz genau übereinstimmte. Dadurch wurde die Schwere, von der man bis dahin glaubte, daß sie nur der Erde innewohne, als die allgemeinste Kraft des Weltalls erkannt.

Schwungkraft in fast kreisrunder Bahn um sich herumzuführen. (Nr. 99, 202, 188 und 193.)

$$m = \frac{f^3}{t^2} \cdot (2\pi)^2 \frac{r}{G}.$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetze (Nr. 191 und 192) ist der Koefficient $k = \frac{f^3}{t^2}$ für alle Planeten eine Konstante; also erhält man aus jeder Planetenbahn

$$m = k \cdot (2\pi)^2 \frac{r}{G}.$$

Die Rechnung liefert

$$m = 326786 \; (326785).$$

Es hat aber f^3 starken Einfluß auf das Ergebnis. Denn nimmt man f nur um 30 größer oder kleiner (vergl. die Einleitung zu Nr. 202), so ändert sich m um ± 1260. Deshalb ist m in der Antwort auf die 3 ersten Ziffern abzurunden:

Die Sonne besteht aus 327000 Erdmassen.

Diese Masse bildet eine Kugel, die 1280000mal so groß ist, als die Erde. (Nr. 203.) Weil die Raum-Zahl dem Vierfachen von m gleichkommt, so ist der Stoff in dem großen Körper der Sonne gewiß viel ungleichmäßiger verteilt, als die sehr verschieden dichten Bestandteile bei der Erde.*)

Weil die Sonne eine Kugel ist, so gehen die Normalen aller Oberflächenstellen durch den Mittelpunkt. Dieser erscheint also als Sitz der Schwerkraft. Da der Sonnenradius $n = 108{,}7$ mal so lang ist, als der Erdkugelradius (Nr. 203), so giebt die Zahl m die Schwerkraft der Sonne an einem ihrer Pole

$$g_{90} = \frac{mG}{n^2} = 271{,}72993^m \; (271{,}725^m).$$

Die Schwungkraft am Äquator verbraucht, weil die Sonne erst in $25\frac{1}{4}$ Tagen sich einmal umdreht (Nr. 163), nur $5{,}74^{mm}$; sie vermindert also die Schwerkraft am Äquator ganz unbedeutend auf

$$g_0 = 271{,}72419^m \; (271{,}719^m).$$

Das Verhältnis dieser Größen zu der bei uns zu beobachtenden Schwerkraft $g = 9{,}8127^m$ giebt an, wieviel mal so stark, als bei uns, ein Körper an der Oberfläche der Sonne auf die Unterlage drückt. Ein Kilogramm wiegt am Äquator der Sonne 27691^g und

*) Die mittlere Dichtigkeit der Sonne oder der Erde zu berechnen, hat nicht mehr Wert, als die Angabe: die e Einwohner der Stadt N besitzen durchschnittlich m Mark. Von welchem Umfange und wie groß dabei Armut und Reichtum sind, bleibt in solcher Mitteilung unbekannt.

an den Polen nur 0,6^{g} mehr. Da die langsame Umdrehung an der Schwerkraft so gut wie nichts ändert, erscheint also auf der ganzen Oberfläche der Sonne jeder Körper fast 28 mal so schwer, als bei uns.

248. Masse des Jupiter. Die Abstände der Jupiter-Monde von seinem Mittelpunkte sind in der Tabelle zu Nr. 191 angegeben als das nfache seines Äquatorialradius a, welcher (nach Nr. 204, Spalte 14) $\alpha = 11{,}30$ Erdkugelradien lang ist. Mithin ist die Zahl nα das, was in Nr. 247 f genannt wurde. Die daraus hervorgehende Größe k müßte aus dem dort angegebenen Grunde für alle 4 Monde derselbe Wert sein. Allein wegen der begrenzten Genauigkeit der Messung bei der Bestimmung der Zahlen n ist nicht vollkommene Übereinstimmung zu erwarten. Für m ergiebt

der erste Mond	349,878	(349,878)
der zweite	349,605	(349,605)
der dritte	349,585	(349,595)
der vierte	349,563	(349,553)

Das arithmetische Mittel ist

$$m = 349{,}66.$$

Demnach könnten, wiewohl Jupiter 1350 mal so groß ist, als die Erde (Nr. 204, Spalte 15), doch nur 350 solche Planeten, wie die Erde, aus seinem Stoffe gebildet werden.

§ 30. Die Lotabweichung.

249. Störung der Breiten- und Längenbestimmung. Eine sehr dichte Masse, welche außerhalb oder innerhalb der durch den Meeresspiegel und seine Erweiterung angegebenen Erdoberfläche sich befindet, zieht den Schwerpunkt eines Senklotes zu sich hin, läßt also das Lot abweichen von der Lage, welche dasselbe, nur der allgemeinen Schwerkraft der Erde und der Schwungkraft bei ihrer Achsendrehung unterworfen, annehmen würde. Ein ruhiger Wasserspiegel liegt rechtwinklig zur Richtung des Lotfadens. Die Libelle des Theodoliten giebt diese Lage an. Befindet sich die ablenkende Masse z. B. südwestlich vom Beobachtungsorte, so steigt bei fertiger Aufstellung des Theodoliten die Ebene seines Grundkreises in der Richtung nach Süd und West, nach Nord und Ost senkt sie sich; die Vertikalachse des Instruments trifft also, nach oben verlängert, einen Punkt der Himmelskugel, welcher nördlich und östlich vom Zenit liegt. Wegen der nördlichen Abweichung des scheinbaren Zenits wird die Zenitdistanz des Poles zu klein, die Polhöhe zu groß gefunden. Diese

Abweichung der Lotlinie, bei welcher sie, aufwärts verlängert, die Nordseite des Zenits trifft, nennt man die nördliche Lotabweichung und giebt ihrem Zahlenwerte das positive Vorzeichen. Um so viel, als von der Zenitverschiebung auf Nord oder Süd kommt, ist bei der Beobachtung der Polsterne die Bestimmung der geographischen Breite des Ortes unrichtig geworden.

In dem gedachten Falle, daß die lotablenkende Masse südwestlich vom Beobachtungsorte liegt, weicht der durch das Instrumental-Zenit gehende Meridian von dem wahren Meridiane östlich ab. Dadurch sieht der Beobachter zu früh die Sterne kulminieren, und findet also die östliche Länge des Ortes zu groß. (Nr. 117 und 119.) Der nach Ost oder West gerichtete Teil der Zenitverschiebung stört die Längenbestimmung.

250. Über die Ermittelung der Störung der geographischen Breite. In der Figur 94 ist HZ_4 die zum Zenit gehende Verlängerung der Normale HM des Erdsphäroids; HA_4 sei die Stellung der Vertikalachse des Theodoliten bei der Beobachtung in H. Der Winkel A_4HZ_4 giebt die nördliche Lotabweichung ξ_4 an. Findet beim nächsten Orte D ebensolche Lotabweichung statt, so liefert die Beobachtung als Differenz der Polhöhen oder der geographischen Breiten (vergl. in Figur 89 zu Nr. 220 $\angle BMB_1$) nicht den Winkel HMD zwischen den wahren Normalen, sondern den Winkel HCD.

Da der gemessene Meridianbogen $s = \frac{\alpha^0}{180^0}\pi\varrho$ ist, so erhält man den Winkel α zwischen den Normalen an seinen Endpunkten, in Sekunden ausgedrückt, aus

$$\alpha = \frac{648000}{\pi}\,\frac{s}{\varrho}$$

oder wenn man für ϱ den Wert aus der Formel in Nr. 221, mit der Polhöhe φ der Mitte der Strecke, einsetzt,

$$\alpha = \frac{(1-\varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{648000}{\pi}\cdot s}{b\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

[wo $\log\varepsilon^2 = 0{,}830\,114\,18 - 3$ $(0{,}828\,864 - 3)$ ist], während die Differenz der beobachteten Polhöhen den Winkel zwischen den Lotlinien auf den Endpunkten $= \beta$ giebt.

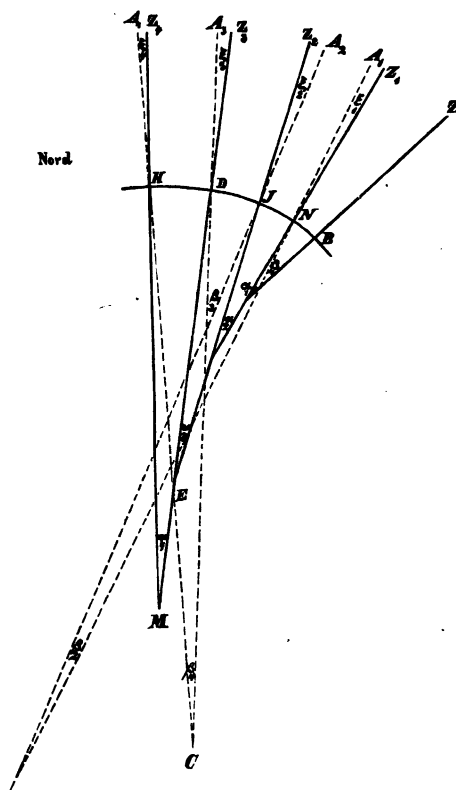
Durch den Dreiecksaußenwinkel HED hat man

$$\xi_4 + \alpha_4 = \xi_3 + \beta_4$$

also $\qquad \xi_4 - \xi_3 = \beta_4 - \alpha_4$ und dies sei $= \delta_4$.

Jeder Meridianteil liefert folglich die Differenz zwischen den Lotabweichungen an seinen Endpunkten. Wir haben mithin bei den 12 Stücken des russischen Bogens (Nr. 223) nur 12 Gleichungen für die 13 Lotabweichungen. Sie bleiben deshalb alle unbestimmbar, wenn man nicht Grund hat zu der Annahme, daß an einem Beobachtungsorte die Lotabweichung gleich Null sei. Dies gilt von jeder Gradmessung. Deshalb ist die ganze Aufgabe der genauen Gestaltermittelung, streng genommen, eine unbestimmte.

Der Endpunkt des 8. Meridianteiles, Belin, westlich von Pinsk in den weiten Morästen der Provinz Minsk, liegt in 148^{m} Seehöhe auf völlig flachem Lande. Dort ist in einem Umkreise von 75^{km} Radius kein Hügel zu finden. Es ist also wenigstens über der Erdoberfläche keine Masse vorhanden, die eine Lotabweichung bewirken könnte. Deshalb erscheint dieser astronomische Punkt unter allen 13 am meisten geeignet zu dem Versuche, zu einer Vorstellung von



Figur 94. Störung der Breitenbestimmung durch Lotabweichung.

der Größe der örtlichen Lotabweichungen zu kommen. Wir gestatten uns versuchsweise die Annahme, daß hier keine Lotabweichung stattfinde.

Bezeichnet B in obiger Figur 94 diesen Punkt, so haben wir nun am nächsten astronomischen Punkte N die Lotabweichung

$$\xi_1 = \beta_1 - \alpha_1 = \delta_1.$$

Ist die für den folgenden Ort eine südliche, so folgt, da wieder durch den Satz vom Dreiecksaußenwinkel $\alpha_2 = \xi_2 + \xi_1 + \beta_2$ ist,

$$-\xi_2 = \xi_1 + \beta_2 - \alpha_2 = \xi_1 + \delta_2;$$

dann aus $\xi_3 + \xi_2 + \alpha_3 = \beta_3$

$$\xi_3 = -\xi_2 + \beta_3 - \alpha_3 = -\xi_2 + \delta_3;$$

ferner $$\xi_4 = \xi_3 + \delta_4$$

und so fort. Jede folgende Lotabweichung wird gefunden, wenn man zur vorhergehenden die neue Winkeldifferenz δ addiert.

251. Tabelle der Teile des russischen Meridianbogens und die Abweichungen des Lotes in Breite. Aus den gegebenen Größen in Spalte 3 und 4 der folgenden Tabelle ist für jedes Meridianstück der Winkel α in Spalte 5 nach der eben aufgestellten Formel berechnet und von der Differenz der Polhöhen der Endpunkte abgezogen; der Rest δ steht in Spalte 6. Hieraus folgen vom Grenzpunkte der 8. und 9. Strecke, Belin, aufwärts und abwärts in Spalte 7 die mutmaßlichen Werte der Lotabweichungen in Breite.

Es zeigt sich, daß jede Lotabweichung ein solches Vorzeichen erhalten hat, wie wir es nach den örtlichen Verhältnissen erwarten müssen.

Die Insel Hogland erstreckt sich von NNW nach SSO in einer Länge von 10^{km} bei einer Breite von 2^{km}, die sich fast gleich bleibt.*) Sie ist ein Porphyrfelsen, der sich ziemlich steil aus dem nördlich und südlich von der Insel 55^m tiefen Meere erhebt und vier Hauptkuppen bildet. Ihre Seehöhen betragen, in der Ordnung von Nord nach Süd, 116, 136, 154 und 173 Meter. Ein Fünftel der Länge vom Nordende in einem Thaleinschnitte zwischen der kleinsten und der zweiten Kuppe befand sich das Zelt, in welchem die astronomischen Beobachtungen angestellt wurden. Südlich von ihm lag also die bei weitem größere Masse der Felseninsel. Die Lotabweichung muß also eine nördliche sein (vergl. Nr. 249); und in der That giebt die Tabelle bei Hogland $+1''$ an.

---

*) Struve, Breitengradmessung in den Ostseeprovinzen Rußlands. Dorpat 1831. II. Teil Seite 195.

Die russische Breitengradmessung.

1. Nummer der Strecke	2. Die 13 astronomischen Punkte der russischen Breitengradmessung	3. Beobachtete Polhöhe	4. Meridianstücke s zwischen den Parallelkreisen durch die astronom. Punkte in Kilometern	5. Der Winkel α zwischen den Sphäroid-Normalen der Endpunkte des Bogens s	6. Unterschied der Polhöhendifferenz β und des Winkels α $\beta - \alpha = \delta$ in Sekunden	7. Wahrscheinl. Größe der Lotabweichung in Breite ξ in Sekunden
	Fuglenäs, nördlich von Hammerfest,	70° 40′ 11,23″				+ 0,97 (+ 0,3)
1.			221,7105	1° 59′ 14,24″ (14,4″)	− 1,41 (− 1,6)	
	Stuor-oivi, südlich bei Kautokeino,	68° 40′ 58,40″				+ 2,38 (+ 1,9)
2.			318,1254	2° 51′ 8,41″ (8,5″)	+ 5,42 (+ 5,3)	
	Torneå, am Nordende des Bottnischen Mb.	65° 49′ 44,57″				− 3,04 (− 3,4)
3.			356,2727	3° 11′ 44,36″ (44,3″)	− 5,04 (− 5,0)	
	Kilpi-Mäki, südwestlich bei Kuopio,	62° 38′ 5,25″				+ 2,00 (+ 1,6)
4.			285,2599	2° 33′ 35,13″ (35,3″)	+ 0,96 (+ 0,8)	
	Hogland, Insel mitten im Finnischen Mb. (trigon. Hauptpunkt E.)	60° 4′ 29,16″				+ 1,04 (+ 0,8)
5.			188,8474	1° 41′ 42,58″ (42,6″)	− 0,98 (− 1,0)	
	Dorpat (Mittelpunkt des Turmes der Sternwarte)	58° 22′ 47,56″				+ 2,02 (+ 1,8)
6.			209,0937	1° 52′ 38,75″ (38,8″)	+ 3,84 (+ 3,8)	
	Jakobstadt	56° 30′ 4,97″				− 1,82 (− 2,0)
7.			206,0733	1° 51′ 3,15″ (3,3″)	− 2,34 (− 2,5)	
	Nemesch, südlich bei Wilno,	54° 39′ 4,16″				+ 0,52 (+ 0,5)
8.			290,0352	2° 36′ 21,48″ (21,5″)	+ 0,52 (+ 0,5)	
	Belin, in der Südost-Ecke der Prov. Grodno,	52° 2′ 42,16″				0 (0)
9.			216,7699	1° 56′ 54,39″ (54,5″)	− 2,18 (− 2,3)	
	Kremenetz, südlich bei Dubno,	50° 5′ 49,95″				− 2,18 (− 2,3)
10.			149,5912	1° 20′ 41,97″ (42,0″)	+ 4,94 (+ 4,9)	
	Ssuprunkowzi bei Kamenetz Podolsk (Kamjenjiez)	48° 45′ 3,04″				+ 2,76 (+ 2,6)
11.			192,0931	1° 43′ 39,36″ (39,4″)	− 1,30 (− 1,3)	
	Wodolui, östlich bei Kischenew,	47° 1′ 24,98″				+ 1,46 (+ 1,3)
12.			187,9166	1° 41′ 25,98″ (26,1″)	− 3,94 (− 4,1)	
	Staro-Nekrassowka, östlich bei Ismail,	45° 20′ 2,94″				− 2,48 (− 2,8)
		der ganze Bogen	2 821,7889 km.			

Das Meer im Süden von Tornea erreicht bald eine Tiefe von 35^{m}, die weiter auf 130^{m} hinabgeht in 90^{km} Entfernung. Im Norden steigt das Festland ziemlich schnell an; es ist Granitboden; auch wird in dortiger Gegend Eisen gewonnen. Eine südliche Lotabweichung ist daher zu erwarten. Die Rechnung weist nach: — 3″. Dieser Neigungswinkel von 3,04″ lehrt, daß der Meeresspiegel auf dem letzten Kilometer vor Tornea zur Küste hin ansteigt um $1\frac{1}{2}^{cm}$. Wieviel das Wasser am Ufer zu hoch steht, läßt sich nicht angeben, da unbekannt ist, wie weit die in der Ferne allmählich abnehmende Störung durch jene Massenanziehung seewärts hinausreicht.*)

Fuglenäs, 14^{m} über dem Meere, liegt nahe dem Nordende der Felseninsel Qual-öe, die von Nord nach Süd eine Ausdehnung von 30^{km}, und nur 3,6^{km} südlich von Fuglenäs den 420^{m} hohen Gipfel des Berges Tyven hat. Eine nördliche Lotabweichung ist also der Lage entsprechend. Die Lotabweichung am Endpunkte ist aber die algebraische Summe aller vorangehenden. Da sie das richtige Vorzeichen erhalten hat, so werden auch die Zwischenglieder in Ordnung sein.

Ob jedoch die Zahlenwerte selbst genau genug gefunden sind, um weitere Schlüsse zur Bestimmung der Gestalt und Größe des Erdsphäroids darauf zu gründen, das bleibt fraglich, zumal die Annahme, in Belin sei die Lotabweichung (in der Richtung des Meridians) vollkommen gleich Null, durch keine andere Station unterstützt wird. Dies würde ausreichend der Fall sein, wenn auf Hogland die Polhöhenbestimmung mitten auf der Insel (über dem Schwerpunkte des Porphyrfelsens) ausgeführt wäre, so daß hier die Lotabweichung gleich Null werden müßte. Sämtliche Lotabweichungen in Breite sind aber nur klein (Nr. 252) und oft mit verschiedenen Vorzeichen ausgefallen. Und dies zeigt, daß alle Meridianstücke sich dem aus den beiden Hälften des russischen Bogens gefundenen Sphäroide recht gut anschließen, indem sie nur wenig zu stark oder nur unbedeutend zu flach gewölbt sind; so daß unsere Bestimmung der Gestalt und Größe des Erdsphäroids ein durchaus befriedigendes Ergebnis ist. Dies würde nicht erreicht werden, wenn man irgend einen nördlichen Bogenteil mit einem der südlichen zur Ermittelung der Excentricität ε benutzen wollte. Nur dadurch, daß man die beiden der Rechnung zu Grunde zu legenden Bogen sehr groß nimmt, kann die Störung in der Polhöhenbestimmung für die Berechnung der beiden Krümmungsradien und der daraus folgen-

*) Ein Ansteigen des Meeres zum Festlande muß an allen Küsten eintreten, aber in ungleicher Stärke. Es ist gewiß sehr bedeutend an der Westküste Südamerikas, wo gewaltige Gebirgsmassen und Hochländer dem Meere nahe liegen. Deshalb sind die Seehöhen der dortigen Riesenberge der Andes wahrscheinlich erheblich größer, als man bisher angiebt.

den Größen des Sphäroids möglichst unschädlich gemacht werden. (Nr. 224.)*)

252. Gang der Breitenstörungen im Harz und in seiner Umgebung. Eine solche Berechnung wie in Nr. 251 hatte herausgestellt, daß auf dem Brocken eine ungewöhnlich große nördliche Lotabweichung von mehr als 9 Sekunden stattfinde. Diese Wahrnehmung weiter zu verfolgen, ließ General Baeyer, Chef des geodätischen Instituts in Berlin, im Sommer 1873 an mehreren Orten, welche nahezu im Meridiane des Brockens liegen, die Polhöhe beobachten. Bei der geodätischen Berechnung der Polhöhe (der geographischen Breite) legte man Bessels Dimensionen des Erdsphäroids zu Grunde und ging aus, wie wir oben von Belin als Nullpunkt, vom Seeberge bei Gotha.**) Ein Dreiecksnetz war schon einige Jahre vorher über die ganze Umgegend ausgespannt. Die überraschenden Ergebnisse veranlaßten, um das ganze Störungsgebiet näher kennen zu lernen, die Beobachtungen auf zahlreiche Punkte östlich und westlich von jenem Meridiane auszudehnen. Die für die Abweichungen des Lotes in Breite erhaltenen Zahlen (Winkel-Sekunden) stehen über den Orten in der Kartenskizze Figur 95.***) Die daruntergesetzten Zahlen geben die Seehöhe des trigonometrischen Punktes an.

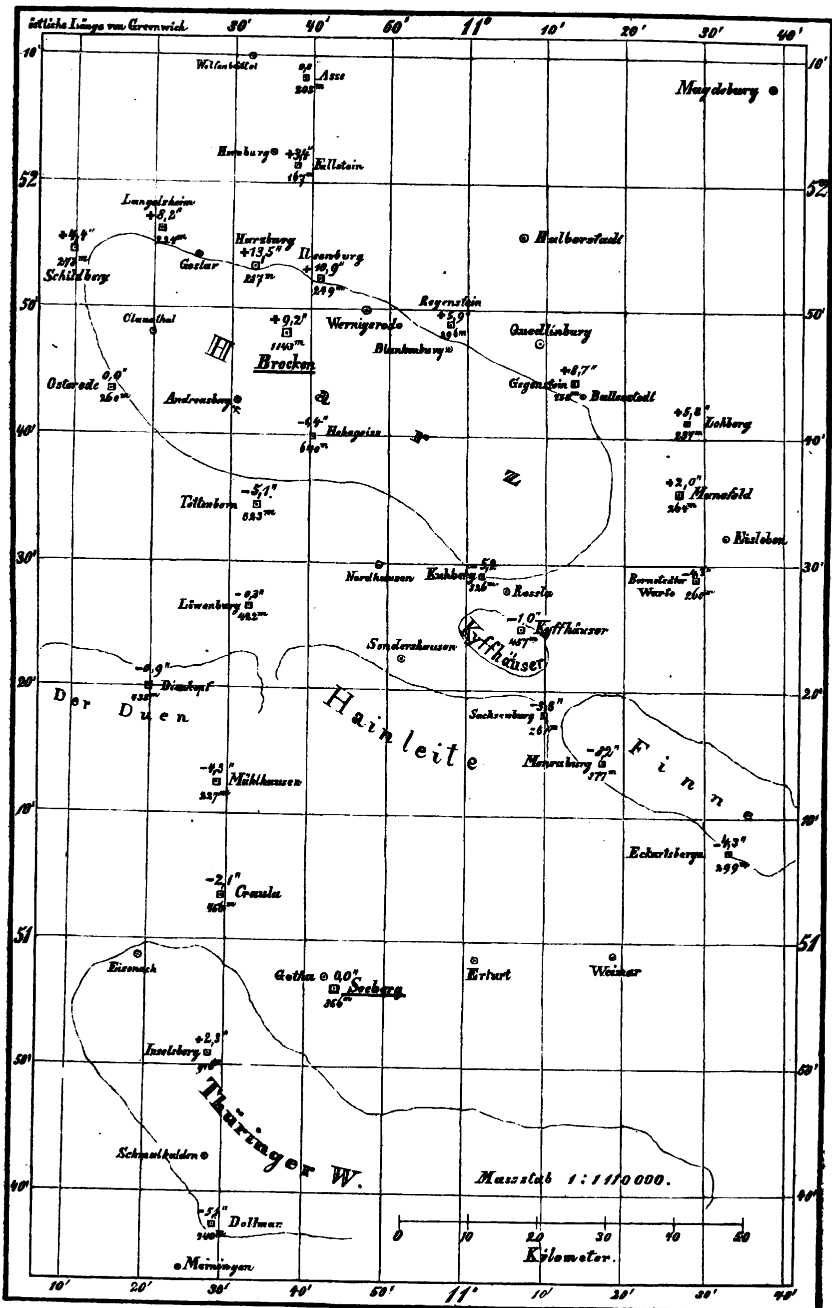
Vom Seeberge, dessen geographische Breite nach der Annahme geodätisch wie astronomisch 50° 56′ 6,10″ ist, gehen wir den Meridian des Brockens entlang nordwärts. Wir finden auf der Station

---

*) Den Einfluß der Lotabweichungen auf die Ergebnisse der Gradmessungen behandelt eingehend Philipp Fischer, Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt, J. P. Diehl, 1868. 318 Seiten.

**) Zur Erklärung der Bezeichnung „Polhöhe, geodätisch" werde das, was die Tabelle in Nr. 251 bringt, noch in folgender Weise dargestellt. Wir nahmen an, daß die in Belin beobachtete Polhöhe die geographische Breite ohne Störung durch Lotabweichen geliefert habe, also wirklich sei 25° 2′ 42,16″. Bei dem 8. Bogen erhielten wir $\alpha = 2^{0}\,36'\,21{,}48''$ als die Gradzahl, welche der Strecke s von Belin bis Nemesch auf dem geodätisch gefundenen Sphäroid zukommt. Addiert man nun α zu der geographischen Breite von Belin, so folgt: geographische Breite von Nemesch, geodätisch, 54° 39′ 3,64″. Die astronomisch bestimmte Polhöhe giebt sie aber mit 4,16″ an, also mit einem Überschuß von + 0,52″, und dieser ist die Lotabweichung in Nemesch. Der 7. Bogen ergab $\alpha = 1^{0}\,51'\,3{,}15''$; dies zur geodätisch erhaltenen Breite von Nemesch addiert, liefert: geographische Breite von Jakobstadt, geodätisch, 56° 30′ 6,79″; astronomisch nur 4,97″, also Lotabweichung — 1,82″. Und so fort.

***) Für die Figur ist zur Darstellung der Größe eines Meridiangrades 0,1 m angenommen. Daraus hat man (nach Nr. 120) das Gradnetz, sowie (nach Nr. 142) den Maßstab der Karte 1 : 1110000. Die trigonometrischen Punkte, kenntlich an der quadratischen Umrahmung, sind in das Gradnetz eingetragen nach der Tabelle der Ergebnisse Seite 150 der Publikation des Königl. preuß. geodätischen Instituts, astronomisch-geodätische Arbeiten im Jahre 1875. Berlin, P. Stankiewicz, 1876.



Figur 95. Breitenstörungen im Harz und in seiner Umgebung.

Craula eine kleine und in Mühlhausen eine größere südliche Abweichung der Lotlinie. Nördlich von ihnen breitet sich nämlich der 300 bis 350 Meter hohe Bergrücken, die Hainleite, aus, welcher langsam ansteigt und auf seiner Nordseite steiler abfällt zur goldenen Aue. Die Anziehungen der Hainleite und des Harzes gleichen sich kurz vor Löwenburg aus. Die des Harzes giebt in Tettenborn — 5,1″. Bei Hohegeiß auf dem Plateau des Gebirges ist der Meridian der anziehenden Masse nahe. Auf dem Brocken ist die Lotabweichung bereits stark nördlich geworden, + 9,2″; sie erreicht an der Nordgrenze des Gebirges in Harzburg ihren größten Wert, + 13,5″,*) geht auf dem Fallstein bei Hornburg hinab auf + 3,4″ und wird zu Null auf der Asse, einem Bergrücken bei Wolfenbüttel. Bei der südlichen Fortsetzung des Meridians wiederholt sich der Zeichenwechsel am Thüringer Walde. Auf dem an seinem Nordende liegenden Inselsberge ist die Abweichung positiv, auf dem an der Südgrenze befindlichen Dollmar negativ.

Daß die Ursache der Lotabweichungen nicht nur in den über das durchschnittliche Niveau emporsteigenden Gebirgsmassen zu suchen sei, zeigen die Beobachtungen auf dem Meridian von Mansfeld. Bei diesem weithin nur von mäßigen Höhenzügen umgebenen Orte wird Bergbau, besonders auf Kupfer, betrieben.

253. Die Lotabweichung auf dem Brocken. Zur Kenntnis der scheinbaren und der wahren Polhöhe des Ortes muß noch die Feststellung der Meridian-Verschiebung kommen, um für die gestörte Lotlinie die Lage im Raume angeben zu können. Da zur Ermittelung der Länge gegen einen Normal-Ort, von dem angenommen wird, daß er keine östliche oder westliche Lotabweichung habe, eine Telegraphenverbindung erforderlich ist, so kann die auf die Annahme gegründete Bestimmung der Lage der Lotlinie nur für Hauptorte ausgeführt werden. Dies ist für den Brocken geschehen.

Die Länge des trigonometrischen Punktes auf dem Brocken gegen den auf dem Seeberge ist**)

aus direkten Beobachtungen abgeleitet	$\lambda_1 = 0^h\ 0^m\ 26{,}757^s$ westlich
nach geodätischer Rechnung	$\lambda = 0\ \ 0\ \ 26{,}986$ „
also	$\lambda_1 - \lambda = -\ 0{,}229^s$ (in Zeit) $= -\ 3{,}435''$,

*) Infolgedessen steigen die Oberflächen der beiden Teiche bei Harzburg nach Süd hin an um 1cm auf 153m Länge. Würde ein Schlitten diese spiegelglatt gefrorene schiefe Ebene von selber hinabgleiten?

**) Astronomische Nachrichten Nr. 2144 (Seite 116) und 2170 (Seite 149). Man hat auch die Längendifferenz zwischen dem trigonometrischen Punkte auf dem Brocken und dem Centrum der Berliner Sternwarte ermittelt

durch astronomische Bestimmung	$0^h\ 11^m\ 6{,}340^s$
geodätisch	$0\ \ 11\ \ 6{,}546$

wo das Minuszeichen die östliche Lage der Lotlinie angiebt, da hier die Länge nach West gezählt wurde. Bezeichnet L den Punkt, in welchem die Lotlinie, aufwärts verlängert, die Himmelskugel trifft, so daß also L das Instrumental-Zenit ist, dagegen Z das wahre Zenit und P den Pol, so kennen wir hierdurch den Winkel zwischen dem wahren Meridiane und dem scheinbaren bei der Beobachtung, $\angle ZPL = \lambda - \lambda_1 = 3{,}435''$. Dazu haben wir die beiden ihn einschließenden Seiten, weil die Polhöhe des trigonometrischen Punktes auf dem Brocken ist

nach direkter Beobachtung $\varphi_1 = 51^0\,48'\,10{,}59''$
nach der Rechnung $\varphi = 51\quad 48\quad 1{,}41$

also durch die wahre Polhöhe φ die Seite $ZP = 90^0 - \varphi$ und durch die Beobachtung $LP = 90^0 - \varphi_1$. (Die Differenz $\varphi_1 - \varphi = +9{,}18''$ giebt die nördliche Lotabweichung auf dem Brocken in Richtung des Meridians an.) Mittels des sphärischen Dreiecks LPZ finden wir nun die Lage der gestörten Lotlinie BL im Raume (B bedeutet den Beobachtungspunkt auf dem Brocken) durch den Abstand $LZ = x$ und durch den Winkel $LZP = Z$; denn dieser giebt das Azimut an, nach welchem die Lotlinie BL sich hinneigt. Wegen der äußerst schmalen Gestalt dieses Dreiecks LPZ ist die Rechnung nicht in gewöhnlicher Weise zu führen. Da $\lambda - \lambda_1$ und infolgedessen auch x nur wenige Sekunden beträgt, so muß man in

$$\cos x = \sin \varphi_1 \sin \varphi + \cos \varphi_1 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_1)$$

ihren Kosinus durch den Sinus des halben Winkels ersetzen

$$1 - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} x = \cos(\varphi_1 - \varphi) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} (\lambda - \lambda_1) \cos \varphi_1 \cos \varphi$$

und nun ebenso bei $\cos(\varphi_1 - \varphi)$. Von den Sinus der dann dastehenden Gleichung geht man endlich zu den Bogen über, und hat

$$x^2 = (\varphi_1 - \varphi)^2 + (\lambda - \lambda_1)^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi$$

und nun durch den Sinussatz

$$\sin Z = \frac{\lambda - \lambda_1}{x} \cos \varphi_1$$

wo auch hier die Bogen statt der kleinen Sinus genommen wurden, wiewohl außer dem Zähler auch der Nenner des Bruches sehr klein wird; denn dies Verfahren ist bei dem behandelten Dreiecke voll-

---

also hiernach wäre, wenn für Berlin keine Lotabweichung angenommen wird, der Winkel zwischen dem gestörten und dem wahren Brocken-Meridiane $-0{,}206^s$ (in Zeit) $= -3{,}09''$. (Astronomisch-geodätische Arbeiten in den Jahren 1873 und 1874. Herausgegeben vom Königl. preußischen geodätischen Institut. Berlin, P. Stankiewicz, 1875. Seite 76.) Dies Ergebnis bestätigt das obige. Es zeigt, daß man die Wahl hatte, entweder Seeberg Abweichung 0, dann in Berlin eine östliche von 0,345″, oder Berlin 0, dann Seeberg eine westliche von nur 0,345″. Wenn also auf dem Seeberge eine seitliche Lotabweichung doch vorhanden sein sollte, so ist sie gewiß sehr gering; so daß obige Annahme gerechtfertigt ist.

kommen genau, weil schon das zweite Glied der Newtonschen Sinusreihe so gering wird, daß es auf die mit siebenstelligen Logarithmen angebbaren 12 Decimalstellen des ersten gar keinen Einfluß ausübt.

Die Rechnung liefert

$$x = 9{,}42255'' \text{ und } Z = 13^0\,1'\,40{,}69''.$$

(Fünfstellige Logarithmen geben, mit $\log(\lambda - \lambda_1)$ aus dem der ausmultiplizierten Zahl $(\lambda - \lambda_1)^2$, die Sekunden 41,2, mit log 3,435 ungenauer 41,7″.)

Die so gefundene Lage der Lotlinie LB giebt, in die Erde verlängert, die Richtung der auf dem Gipfel des Brockens zu beobachtenden Schwerkraft g an.*) Diese, mit der dortigen Schwungkraft durch das Parallelogramm der Geschwindigkeiten verbunden, führt auf einen besonderen Wert der ganzen Schwerkraft G, welcher für den Beobachtungspunkt die Resultante ist aus der Anziehung der sehr dichten lotablenkenden Masse und der allgemeinen Anziehung des Erdsphäroids. Da die störende Masse in so merklicher Weise aufkommt gegen die Gesamt-Anziehung der Erde, so kann sie auf der Südsüdwest-Seite der Meridianebene des Brockens nicht fern vom Beobachtungsorte sein. Darauf hin haben wir nun in obiger Figur 95 die Stationen in dem länglichen Ringe westlich am Brocken anzusehen. Die darüberstehenden Zahlen geben zwar nur die Projektion der Lotlinie auf die Ebene des Meridians an, nicht ihre seitliche Lage, aber der Vergleich ihrer Vorzeichen und Größe, besonders durch Osterode 0,0″, läßt deutlich erkennen, daß die dichte Masse östlich von Osterode zu suchen sei; und dort kommen wir auf die Silberbergwerke von Andreasberg.

Das messende Sternrohr ist zugleich eine Sonde in das feste Innere der Erde.

254. Differenz der Lotabweichungen in Breite an den Endpunkten der Gradmessung in Ostpreußen. Bei der von Bessel und Baeyer von 1831 bis 1834 ausgeführten Gradmessung in Ostpreußen wurde der Bogen des Königsberger Meridians gemessen, welcher von dem Parallelkreise durch den trigonometrischen Punkt

bei Memel, beobachtete Polhöhe	$55^0\,43'\,40{,}446''$
bis zu dem von Trunz**),	$54^0\,13'\,11{,}466''$

sich erstreckt. Er wurde

$$s = 167{,}962055^{\text{km}}$$

*) Zur Ergründung der Lotabweichungen sollen bei der internationalen Erdmessung an den wichtigsten Punkten Bestimmungen der dortigen Größe der Schwere durch Pendelbeobachtungen ausgeführt werden.

**) Trunz liegt 12^{km} nördöstlich von Elbing.

lang gefunden.*) Man berechne den Winkel α zwischen den Sphäroidnormalen der Endpunkte und subtrahiere ihn vom Polhöhenunterschiede β, um die Differenz δ der Lotabweichungen in Breite an den Endpunkten zu finden.

Das Ergebnis der Rechnung nach der Formel in Nr. 250 ist

$$\beta - \alpha = \delta = -2{,}433'' \;(-2{,}46'').$$

Das negative Vorzeichen der Differenz sagt, daß der Meeresspiegel flacher gewölbt ist, als er nach der Krümmung des Sphäroids dort sein sollte. Diesem Bogen ist benachbart die 7. Strecke des Dorpater Meridians, Jakobstadt-Nemesch. (Nr. 251.) Für sie erhielten wir $\delta = -2{,}34''$, und dies stimmt dem Zeichen und der Größe nach zu dem eben berechneten. Es scheint hiernach die Ursache der Lotabweichung ihre Wirkung durch das nördliche Littauen bis zur Ostsee auszudehnen.

255. Kleinheit einer Meeresabflachung. Um wieviel bleibt der Königsberger Meridianbogen in der Mitte unter der Sphäroidfläche?

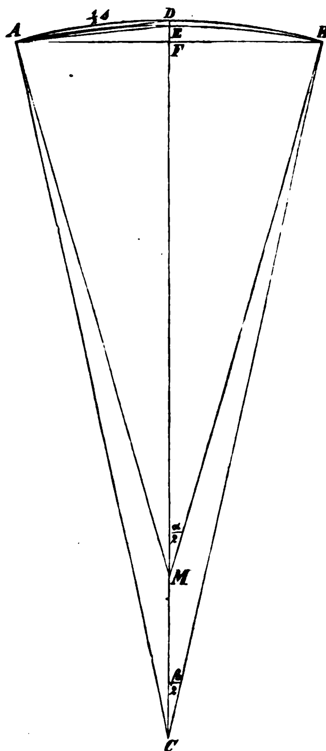
Auflösung. Da die Strecke nur $1\frac{1}{2}$ Grad beträgt, so nehmen wir sowohl den Bogen auf dem Sphäroide, als auch den für zu flach erkannten als Kreisbogen. (Figur 96.) Der Winkel DAB ist $\frac{1}{4}\alpha$, EAB $\frac{1}{4}\beta$ und darum DAE $\frac{1}{4}\delta$ (ohne Vorzeichen). Wegen der Kleinheit dieser Winkel sind die Abstände von D bis E und von D bis F als Kreisbogen mit dem Radius $\frac{1}{2}$s zu berechnen.

$$DE = \tfrac{1}{8}\, s\, \delta \sin 1''$$

und

$$DF = \tfrac{1}{8}\, s\, \alpha \sin 1''.$$

An der Stelle, welche am meisten abweicht, bleibt der Spiegel des Kurischen Haffs nur $\frac{1}{4}$ Meter unter der Sphäroidfläche. Diese wölbt sich in der Mitte über der Sehne des Meridianbogens 552,85^m hoch.



Figur 96. Meeresabflachung.

*) Bessel und Baeyer, Gradmessung in Ostpreußen. Berlin, F. Dümmlers Buchhdlg., 1838. Seite 448.

Die Formveränderung, welche von der Ursache der Lotabweichungen bewirkt wird, ist also eine sehr geringe, und besteht nur in schwacher Verminderung (oder Vermehrung) der Wölbung der Erdoberfläche.

256. Differenz der Lotabweichungen in Breite an den Endpunkten des Berliner Meridianbogens. Wir erhielten in Nr. 134 die Länge des Bogens Berlin-G

$$s_1 = 126{,}35745^{\text{km}} \ (126{,}355^{\text{km}}).$$

Dieser Bogen liegt aber in der Höhe der gemessenen Grundlinie, also $h = 0{,}046^{\text{km}}$ über dem Meeresspiegel. (Nr. 138.) Es muß folglich erst zwischen den Normalen der Endpunkte auf die Meeresfläche hinabgetragen werden. Ist die Länge des dortigen Bogens s und ϱ sein Krümmungsradius, so erhält man

$$s = \frac{\varrho}{\varrho + h} s_1$$

oder, wenn man die Division, ϱ durch $\varrho + h$, ausführt,

$$s = \left[1 - \frac{h}{\varrho} + \left(\frac{h}{\varrho}\right)^2 - + - \ldots\right] s_1.$$

Da aber schon die zweite Potenz des kleinen Bruches auf die in Rechnung tretenden Ziffern keinen Einfluß ausübt, so ist nur zu schreiben

$$s = s_1 - \frac{h}{\varrho} s_1.$$

Wir fanden in Nr. 138 $\varrho = 6370{,}262^{\text{km}}$, somit wird

$$s = 126{,}35654^{\text{km}} \ (126{,}3541^{\text{km}}).$$

Dazu haben wir (Nr. 135) für die Endpunkte des Bogens die durch die gemessene Polhöhe der Sternwarte bestimmte

Polhöhe Berlin (Marienturm)	$52^\circ 31' 19{,}06''$
beobachtete Polhöhe Strauch	$51^\circ 23' \ 7{,}72''$.

Es ergiebt sich

$$\beta - \alpha = \delta = + 3{,}23'' \ (+ 3{,}3'').$$

Der positive Wert von δ zeigt, daß dieser Bogen stärker gekrümmt ist, als die zugehörige Stelle des Sphäroids.

257. Kleinheit einer Meeresanschwellung. Um wieviel ist diese zu runde Wölbung in der Mitte höher?

Wie das Wasser der Ostsee an ihrem Nordende bei Torneå nach der Küste hin ansteigt (Nr. 251), so würde die Erweiterung des Meeres nach Süden ganz allmählich aufwärts gehen und unter dem

südwestlichen Teile der Provinz Brandenburg eine Oberflächenform besitzen, die etwas stärker gewölbt ist, als es nach unserem Sphäroide dort sein sollte. Dieses geht über der Sehne des Berliner Meridianbogens in der Mitte 313,04^{m} hoch fort. Die Wasser-Aufwölbung würde hier nur noch $\frac{1}{4}$ Meter höher kommen. Diese Höhe der Anschwellung beträgt gerade ebensoviel, wie die Tiefe der Abflachung beim Kurischen Haff.

258. Abschluß. Die Libellen der Theodoliten gaben bei der Beobachtung der Polhöhen diejenige Lage an, welche die bis zum Beobachtungsorte erweiterte Meeresfläche dort annehmen würde infolge der Einwirkung aller Massenanziehungen und der Schwungkraft der rotierenden Erde. Die Vertikalachsen der Theodoliten hatten überall die Richtung der Resultante aller dort auftretenden Kräfte. Ihre Projektionen auf die Ebene des Meridians lieferten, nachbarlich sich schneidend, die Winkel β, deren Größe verglichen wurde mit den Winkeln α zwischen den an entsprechenden Stellen eines Sphäroids errichteten Normalen. Der Unterschied gab durch das Vorzeichen an, ob die zwischen den Schenkeln der Winkel β liegende Strecke flacher oder stärker gewölbt sei, als dort das Sphäroid, und ließ durch seine Größe erkennen die Tiefe der Abflachung und die Höhe der Anschwellung. Die Abweichungen nach der einen und nach der andern Seite müssen im ganzen gleich groß ausfallen, wenn das benutzte Sphäroid als die Gestalt der nicht mehr durch zu dichte Massen gestörten Erdoberfläche bezeichnet werden soll.

Gehen wir in dieser Hinsicht die Spalte 6 der Tabelle in Nr. 251 durch, so springt in die Augen, daß sich nahezu ausgleichen Anschwellung und Abflachung bei Strecke 2 und 3, bei 4 und 5, bei $6 + 8$ und $7 + 9$, bei 10 und $11 + 12$. Zur strengen Durchführung der Vergleichung fehlen Polhöhen an Punkten, welche die Strecken mehr einander gleich machen. Nach dem, was vorliegt, entspricht das Sphäroid der Forderung. Es hat aber auch die Probe bestanden bei den Meridianbogen von Königsberg und von Berlin. Die Prüfung auf noch andere Gradmessungen auszudehnen, muß einem besonderen Studium überlassen werden.

Demnach dürfen wir die Behauptung hinstellen, daß das Sphäroid, welches wir aus den beiden Hälften der russischen Breitengradmessung erhalten haben, darstellt die Form der Erdoberfläche im östlichen Deutschland und westlichen Rußland vom 12. bis zum 27. Grade östlicher Länge von Greenwich (vom 30. bis zum 45. Grade östlicher Länge von Ferro).

Bei der europäischen Gradmessung, die sich von Portugal bis zum Ural erstreckt (Nr. 225 Anmerk.), wird man in jedem Lande nach Vollendung der Triangulationen und der Polhöhenbestimmungen

die Lotabweichungen berechnen auf Grund eines einstweilen angenommenen Sphäroids (des Besselschen), dann nachsehen, ob dasselbe einen Überschuß an Abflachungen oder Anschwellungen hat eintreten lassen*), hiernach das Sphäroid in Abplattung und in Größe der Halbachsen verbessern, und für dieses neue abermals die Lotabweichungen berechnen, um zu prüfen, ob mit ihm die Ausgleichung aller Abweichungen erreicht wird. Ist es der Fall, so lehrt dieses Sphäroid, welches den Namen **Geoid** erhalten soll, nicht nur die allgemeine Form des europäischen Teiles der Erdoberfläche kennen, sondern auch seine örtliche Gestaltung, indem es die Ausbreitung der Gebiete zeigt, in welchen Störungen der Oberflächenform eingetreten sind durch verborgene Massen von ungleicher Dichtigkeit, so daß auch der Bau der Erdrinde dadurch erkannt wird.

---

*) Diese Rechnung (Nr. 250) mit Bessels Werten, $b = 6356{,}079^{km}$ und dem genauen $\log \varepsilon^2 = 0{,}824410415 - 3$, ergiebt für die 12 Teile des russischen Meridianbogens

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
$\beta-\alpha=\delta=$	$-2{,}70''$	$+3{,}61''$	$-7{,}01''$	$-0{,}57''$	$-1{,}96''$	$+2{,}77''$
$\xi=$	$-10{,}11''$	$-7{,}41''$	$-11{,}02''$	$-4{,}01''$	$-3{,}44''$	$-1{,}48''$
	Fuglenäs		Torneå		Hogland	

	7.	8.	9.	10.	11.	12.	
$\beta-\alpha=\delta=$	$-3{,}37''$	$-0{,}88''$	$-3{,}19''$	$+4{,}26''$	$-2{,}15'$	$-4{,}74''$	
$\xi=$	$-4{,}25''$	$-0{,}88''$	0	$-3{,}19''$	$+1{,}07''$	$-1{,}08''$	$-5{,}82''$
	Jakobstadt		Belin				Staro-N.

Hier gleichen sich die negativen und die positiven Differenzen $\beta-\alpha$ nicht aus; erheblich im Überschusse sind die negativen. Ein negativer Wert $\beta-\alpha$ giebt an, daß der gemessene Meridianbogen s **flacher** ist, als der entsprechende Teil des Meridians auf Bessels Erdsphäroid. (Nr. 254 und 255.) Daß die russische Breitengradmessung eine etwas stärkere Abplattung fordert, steht hier deutlich vor Augen. (Nr. 225, Anm.) Für Nr. 254 ergiebt sich $\beta-\alpha = -3{,}26''$ und für Nr. 256 $+2{,}64''$; und hieraus für Nr. 255 $\frac{1}{3}^m$ und für Nr. 257 $\frac{1}{5}^m$, während dort Abflachung und Anschwellung gleich groß wurden.

Die Abweichungen sprechen sich noch schärfer aus in den für die Lotabweichungen hervorgehenden Werten ξ. Mit einer einzigen kleinen Ausnahme fallen sie alle negativ aus. Dies ist bei Hogland und besonders stark bei Fuglenäs, $-10''$, im Widerspruch mit den örtlichen Verhältnissen, nach denen man eine **nördliche** Lotabweichung erwarten muß. (Nr. 251.) Das in Nr. 224 erhaltene Sphäroid lieferte in Nr. 251 für die Lotabweichungen kleinere Größen und mit den der Örtlichkeit entsprechenden Vorzeichen, giebt also die Gesamt-Wölbung dieses Teiles der Erdoberfläche genauer an als das, welches vorstehender Berechnung zu Grunde liegt.

Verzeichnis der Figuren.

Die dahinter stehende Zahl giebt die fett gedruckte Nummer an (nicht Seite), unter welcher die Figur sich im Buche befindet.

Register.

Die Zahlen bedeuten die **fett gedruckten Nummern**, welche auch oben in der Ecke jeder Seite angegeben sind (also nicht die Seitenzahl.)

Siebenstellig	**Größen mit ihren Logarithmen**	Fünfstellig
3,804 1571.8	Erdkugelradius $r = 6\,370{,}26^{\text{km}}$	3,804 15.8
4,685 5748.7—10	$\frac{\pi}{648\,000}$ auch $\sin 1''$	4,685 57.5—10
5,314 4251.3	$\frac{648\,000''}{\pi} = 206\,264{,}806''$	5,314 42.5
4,935 3259	1 Sterntag $t = 86\,164$ Sekunden	4,935 33
2,046 0345.5	Auf der Erdkugel $1^{0} = 111{,}1820^{\text{km}}$ $1' = 1853{,}0^{\text{m}}$ $1'' = 30{,}88^{\text{m}}$	2,046 03.5
4,368 1009	Entfernungseinheit, $f = 23\,340$ Erdkugelradien (mittlere Entfernung der Erde von der Sonne).	4,368 10
2,982 4702	Mittlerer scheinbarer Halbmesser der Sonne $\sigma = 16'\,0{,}44'' = 960{,}44''$	2,982 47
	Erdsphäroid:	
3,804 7095.2	$a = 6\,378{,}367^{\text{km}}$ $(6\,378{,}37^{\text{km}})$	3,804 70.6
3,803 2360.5	$b = 6\,356{,}764^{\text{km}}$ $(6\,356{,}81^{\text{km}})$	3,803 23.7
0,830 1141.8—3	$\log \varepsilon^2 =$	0,830 11.4—3

Druck von Hesse & Becker in Leipzig.



